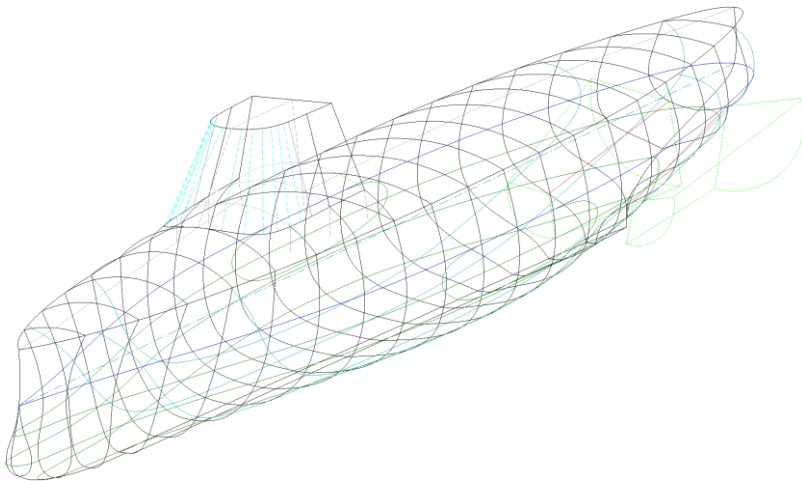


РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Специальное конструкторское бюро
средств автоматизации морских исследований

Трехмерная тензорная математика вычислительных экспериментов в гидромеханике



Владивосток
ДВО РАН
2005

УДК 514.743, 519.6, 532.5, 629.5

Храмушин В.Н.

Трехмерная тензорная математика вычислительных экспериментов в гидромеханике / В.Н. Храмушин. – Владивосток : ДВО РАН, 2005. – 212 с.

ISBN 5-7442-1402-X

Трехмерная тензорная математика представляется в виде аналитического обобщения численных решений прикладных задач гидромеханики, основанных на конечноразностных моделях метода крупных частиц (конечного объема). Ориентация изложения на прямые вычислительные эксперименты приводит к поиску элементарных объектов гидромеханики, допускающих сквозную смысловую интерпретацию динамики движения и физических свойств моделируемой жидкости. Рассмотрены особенности непротиворечивого проектирования алгоритмов, сводящиеся к ключевым элементам функционального языка программирования, способного автоматизировать применение тензорных выражений для построения вычислительных экспериментов при моделировании течений жидкости.

Небольшой исторический экскурс, приведенный в первой части книги, адресован читателям, познающим развитие естественных наук во взаимосвязи со становлением прикладной математики. Логические заключения второй части книги заинтересуют разработчиков аппаратных и языковых средств специализированной вычислительной техники. Вычислительные эксперименты гидромеханики представлены в третьей части книги, в которой строгость математических законов по возможности смягчается метафизическими ассоциациями из междисциплинарных естественнонаучных дисциплин.

Книга ориентирована на студентов и инженеров, ведущих поисковые исследования и реализующих прикладные вычислительные эксперименты в различных областях науки и техники, и прежде всего в механике сплошных сред.

Ключевые слова: Математика, тензорный анализ, вычислительный эксперимент, механика, гидромеханика, непротиворечивое проектирование, функциональное программирование, трилектика.

3D Tensor Mathematics for the Computational Fluid Mechanics Experience.

Vasily N. Khramushin. – Vladivostok : FEB RAS. – 212 p.

Special Research Bureau for Automation of Marine Researches, Far Eastern Branch RAS. Yuzhno-Sakhalinsk. E-mail: Khram@Mail.ru.

Book presents itself analytical review and all-round description for the one of new methods to formalizations and practical decision of the applied fluidmechanics problems with use modern digital computer.

Key words: fluid mechanics, computational experiment, tensor calculation, software engineering, optimal design, artificial intelligence.

Ответственный редактор: д.г.н. Р.П. Бернгардт

Рецензенты: д.ф.-м.н. В.В. Иванов, к.т.н. С.Д. Чижимов

ISBN 5-7442-1402-X

© СКБ САМИ ДВО РАН, 2005
© ДВО РАН, 2005

Применение вычислительных экспериментов на основе хорошо разработанной теории, позволяет получать значительные практические результаты. Но вычислительный эксперимент проводится не над реальным объектом, а над его математической моделью, где экспериментальной установкой служит программно-компьютерная система.

Традиционные модели гидромеханики в своей основе имеют системы дифференциальных уравнений в частных производных. Для их анализа эффективно используются конечноразностные методы, среди которых широко распространен метод конечных объемов. Однако исследования многих динамических процессов, например, связанных с сильно изменяющимися границами жидкости, до настоящего времени существенно затруднены (как с точки зрения построения расчетных алгоритмов, так и в плане вычислительных затрат). В этом и состоит **актуальность проблемы**. Имеющиеся математические приемы зачастую столь громоздки, что за ними легко теряется физика явления. В результате часто возникает проблема потери устойчивости вычислительного процесса. Упрощающие же допущения часто приводят к потере интересных решений.

Одна из причин такого положения раскрывается в первой части данной работы. Она связана с историей развития вычислительных средств и математических моделей, и заключается в опосредованном переходе от физической модели к конечно-разностной – через дифференциальную постановку. В связи с этим в работе ставится цель построения непосредственной конечно-разностной модели механики сплошной среды, основанной на тензорной алгебре. Для этого автором предлагаются расширенные тензорные представления гидромеханики, на основе которых получены численные модели, допускающие использование смешанного подхода Эйлера-Лагранжа, адаптивных алгоритмов и параллельных вычислений. Исследования первой части монографии опираются на исторический обзор и философский анализ развития механики сплошной среды. Этот раздел будет интересен не только специалистам, но также студентам и молодым ученым.

Во второй части работы рассматриваются общие вопросы компьютерной реализации вычислительной гидромеханики. Здесь объявляется принцип сквозной физической интерпретации всех вычислительных объектов и процедур, выполняемых в вычислительном эксперименте. Большое внимание уделяется выбору языка программирования с целью обеспечения поисковых алгоритмов и рекурсивно подстраивающихся под свойства течения процедур, способных обеспечить адаптивное перестроение пространственных сеток.

В третьей, основной части монографии в тензорной форме представлены основы моделирования и алгоритмы решения задач гидромеханики. Выполнена геометрическая формализация движения сплошной среды на основе скалярных, векторных и тензорных числовых объектов. Установлены соответствия свойств введенных тензоров и тензорных операций с реологическими параметрами частиц сплошной среды и моделями течений. Рассмотрев в общей тензорной форме алгоритм моделирования нестационарного течения, основанный на смешанном подходе Эйлера-Лагранжа. Математические модели доведены до простых арифметических выражений с матрицами тензоров. Отмечается возможность распараллеливания процесса вычислений вплоть до каждого конечного объема жидкости.

Последняя часть монографии представляет некоторые примеры реализации численных моделей. Следует, однако, отметить, что результаты расчетов пока сильно ограничены и недостаточно пояснены.

Новизна проведенных исследований и полученных результатов заключается в создании обобщенного тензорного представления задач гидромеханики, позволяющего строить эффективные алгоритмы численного моделирования течений. Монография представляет интерес для молодых ученых и научных работников, занимающихся проблемами численного моделирования в области гидромеханики.

Издание работы рекомендуется также в связи с тем, что в мире стремительно развиваются методы и средства компьютерного моделирования и эксперимента в механике жидкости. Вместе с тем в отечественной литературе явно недостаточно работ, посвященных современной вычислительной гидромеханике, особенно в прикладных задачах, связанных с анализом и проектированием судов, гидротехнических сооружений и других водных объектов.

Доцент кафедры кораблестроения КнАГТУ, к.т.н., С.Д. Чижумов

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
О технической задаче	6
Исторический экскурс	8
СВОДКА ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ И КЛЮЧЕВЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ	14
Геометрические определения	17
Ключевые принципы непротиворечивого логического проектирования	21
<i>Диалектика – как установление количественных зависимостей</i>	<i>22</i>
<i>Трилектика – как механика взаимодействия или язык непротиворечивого логического проектирования.....</i>	<i>24</i>
Краткая таблица основных обозначений	26

Часть 1.

Технико-исторический обзор трехмерных физических обоснований непрерывной и вездесущей среды.....	27
Метафизические основы фундаментальных законов гидромеханики.....	28
Из истории МЕХАНИКИ И ГЕОМЕТРИИ	30
Античная механика и геометрия	31
Галилей, Декарт, Ньютон	41
Аналитические модели гидромеханики Леонарда Эйлера	51
<i>Дифференциальные уравнения в частных производных</i>	<i>51</i>
<i>Моделирование течений с помощью потенциала скорости</i>	<i>53</i>
<i>Модели плоских течений</i>	<i>60</i>
О ПОСТАНОВКЕ И РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД	65
Мир компьютерных моделей механики сплошных сред	72
Тензорная формализация объектов и операций вычислительной гидромеханики	76
<i>Одномерные скаляры</i>	<i>77</i>
<i>Векторы</i>	<i>78</i>
Особенности координатных преобразований в дуальных базисах	81

Часть 2.

Логика создания вычислительных моделей и компьютерных алгоритмов.....	86
Построение программной среды для проведения вычислительного эксперимента	89
Определение цели, содержания и методологии проектирования вычислительного эксперимента	94
ПРОЕКТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НОВЫХ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ.....	99
Особенности языковой среды программирования	100
О логическом проектировании программных комплексов	102
Особенности использования логической матрицы проекта	107
Среда программирования на основе языка C++	110
Вычислительные операции с элементарными жидкими частицами, их физическая интерпретация	114
Построение числовых массивов для моделирования пространственных гидродинамических полей.....	118

Часть 3.

Тензорное представление алгоритмов вычислительной

гидромеханики.....	125
Вводные определения.....	127
Форма представления элементарных объектов вычислительной гидромеханики.....	129
Определение координатных систем.....	133
Пространственно-временные привязки вычислительных объектов.....	139
Основные действия и операции с пространственными объектами.....	141
Формальное приведение уравнений движения к Эйлеровым.....	144
Связь между уравнениями кинематики и законами гидромеханики.....	148
ПОСТРОЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ В ТЕНЗОРНОЙ ФОРМЕ.....	154
Построение базовых операций вычислительной гидромеханики.....	155
Свойства элементарных вычислительных объектов.....	158
Свойства вычислительных операций.....	160
ПОСТРОЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА.....	163
Вычислительная среда.....	167

Часть 4.

Опыт построения программных алгоритмов.....	171
Логическая структура обобщенного программного комплекса.....	175
Примеры реализации численных схем.....	178
Построение длинноволнового эксперимента на векторных формализациях.....	182
Особенности реализации вычислительного эксперимента на примере задачи о накате волны на пологий берег.....	185
Кинематическая модель расчета волновых фронтов и лучей.....	198
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	200
АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	201
УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН.....	203
ЛИТЕРАТУРА.....	205
Историческое наследие.....	205
Классическая гидромеханика.....	206
Вычислительная гидромеханика.....	207
Тензорный анализ.....	208
Теоретическая и корабельная гидромеханика.....	209
Компьютерные алгоритмы и функциональное программирование.....	210

Предисловие

Научное творчество, особенно если такое связано с изучением естественнонаучных вопросов или с инженерно-техническими исследованиями, не может не опираться на строгую и осознанную систему логических заключений, свойственных особому авторскому методу научного мышления. Следование единой логике становится жестким условием математизации знаний для их представления в виде прямых вычислительных экспериментов по моделированию изучаемых явлений природы, ставших ныне поверяемыми с помощью компьютерных алгоритмов.

Поиск точной логики познания естественного мира и построение на ее базе нового аналитического инструментария возможно исключительно и только путем философского постижения авторской методологии творчества. Процесс получения знаний о природе и мире всегда происходит на почве исторических исследований, ведущих к сосредоточению логики и совершенствованию языка описания сложных явлений, переходящих затем в практические технологии или методы управляемого воздействия на естественные процессы.

По мере осмысления и практического формирования прикладной теории обязательно должны проступать горизонты более совершенного и осознанного мировоззрения, в первую очередь для самого автора.

Ключевым направлением аналитической работы является поиск путей практического использования имеющегося комплекса знаний, вечно вопиющего о своей неполноте для решения внешне элементарных инженерно-технических задач. Такое положение дел считается естественным и общепринятым в современной прикладной и вычислительной механике сплошных сред, чем и поддерживается постоянная творческая активность всех инженеров-гидромехаников.

Механика сплошных сред и ее математические методы издревле претендуют на особую значимость в определении моделей мироздания, наполненных подвижным энергонесущим эфиром. Гидромеханическая модель мира отличается обязательным обоснованием всех видов взаимодействий между элементарными смежными объектами, происходящими посредством непрерывной среды со стро-

го определенными физическими свойствами. Не претендуя на какой-либо всеобщий характер, идея вездесущего и мирообразующего эфира всегда существовала в естественно-научной философии, и развитие науки всегда приносит множество фактов и логических заключений для углубленного развития идей о непрерывности материи. Историческая, философская и начальная математическая проработка данного вопроса и является предметом первой части настоящего исследования.

Во второй части книги рассматриваются вопросы непротиворечивого проектирования вычислительных систем для решения прикладных задач гидромеханики, в которых формальные законы трехмерной логики лежат в обосновании оптимальности сложных компьютерных алгоритмов. Это приводит к систематизации ключевых решений для специализированного функционального языка программирования, логически сосредоточенного на законах гидромеханики и обладающего достаточной полнотой для построения прямых вычислительных экспериментов, в том числе в понятиях древней троичной логики – трилектики - на пути созидательного поиска непротиворечивых проектно-технических и чисто инженерных решений.

Истинная красота научных результатов, вновь и вновь озаряемая глубоким смыслом божественного провидения, привела к обретению хорошо известного классического тензорного подхода, образовавшего как необходимую математическую основу, так и вполне достаточное инструментально-вычислительное средство, способное с абсолютной достоверностью определить искомые законы механики и алгоритмические методы их однозначного представления средствами цифровых дискретных ЭВМ.

Обновляемые материалы настоящих исследований планируются к представлению в интернет по адресу:
<http://ShipDesign.ru/Khram/Tensor.html>

О технической задаче

Главной целью настоящей работы является исследование тензорных конечно-разностных моделей механики сплошных сред, приводящих к реализации эффективных прямых вычислительных экспериментов, допускающих применение гибридных численных схем и адаптивных компьютерных алгоритмов для решения широкого круга инженерных задач гидромеханики реальных жидкостей.

Перспективной задачей тензорного подхода является поиск новых математических формализаций и численных алгоритмов для моделирования нестационарных течений жидкости, основанных на линейных аппроксимациях главных реологических параметров (вязкости, упругости и сжимаемости) в пределах малого, но конечного объема подвижной сплошной среды.

Тензорные конечно-разностные модели позволяют в строгой форме определять как базовые расчетные объекты, так и применяемые к ним вычислительные операции цифровой дискретной ЭВМ, которые в явной форме сопоставляются с реологическими свойствами жидкости и законами гидромеханики, позволяя на всех этапах компьютерного моделирования контролировать качество численных решений.

Очень важно, что новые числовые объекты и расчетные операции не противоречат постановке задачи о сквозном распараллеливании вычислений на цифровой ЭВМ, соблюдая при этом формальную независимость расчетных операций вплоть до уровня каждой из элементарных частиц жидкости. Это же условие является необходимым для обеспечения сквозного анализа физического состояния всех вычислительных объектов в размерном виде, обеспечивающего непрерывный и повсеместный контроль корректности численного моделирования.

Как и ожидалось, логическая и математическая систематизация вычислительных операций для элементарных числовых объектов гидромеханики привела к построению концепции и законченных проектных решений по синтаксису и семантике внутренних связей специализированного функционального языка программирования, ориентированного на автоматическое построение вычислительных экспериментов в механике сплошных сред, в том числе учитывающего особенности построения гибридных решений в критических областях течения жидкости (на свободных границах и в зонах вихревого поглощения энергии).

И все же, изложенные в работе теоретические результаты все еще очень далеки от сколь-нибудь законченных или канонических утверждений. Предложенные тензорные модели и методы построения алгоритмов для постановки вычислительных экспериментов, отражают не более чем текущий опыт автора, завершающийся вечно ускользающим горизонтом поиска красивых и ясных решений задач прикладной гидромеханики.

Исторический экскурс

Возвращаясь к истории естествознания, нельзя не отметить, что во многих из дошедших до наших дней естественно-философских работах сглаживаются логические и теоретические противоречия, если метафизические высказывания античных авторов соотносить с неперменным наличием сплошной среды, переносящей энергетику взаимодействия в различных фазовых состояниях естественной материи. Полагая Галилея, Декарта и Ньютона основоположниками современной механики важно отметить, что в их формулировках фундаментальных законов движения всегда присутствуют и в разной форме особо оговариваются условия сосуществования и взаимодействия непрерывной среды, в том числе всегда окружающей условно твердые тела с непроницаемыми границами.

В определении настоящей работы использован термин тензорная математика¹, несколько отличающий общепринятое понятие тензорного исчисления² в сторону прямого, полного и однозначного описания пространственно-временных законов гидромеханики.

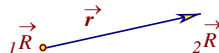
В истоках математических наук уже не одно тысячелетие стоят «Начала» геометрии Евклида³, векторные построения которой создают незыблемый фундамент определения законов статики, кинематики и динамики для любых инженерно-технических изысканий.

¹ Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

² Тензорное исчисление - математическая теория, обобщающая векторное исчисление и матричную алгебру. *Математический язык матричной алгебры недостаточен для построения законов механики элементарных частиц жидкости, так как в трехмерном пространстве необходимо еще и точное определение двух смешанных тензоров, задающих деформационные и конвективные характеристики в кинематике движения жидкости.*

³ Геометрическое (векторное) **пространство Евклида** характеризуется существованием метрики, которая позволяет однозначно измерять расстояние между любыми двумя точками. В трехмерном пространстве в декартовой системе координат такое правило задается квадратичной зависимостью:

$$\vec{r}^2 = \left| {}_2\vec{R} - {}_1\vec{R} \right|^2 = ({}_2x - {}_1x)^2 + ({}_2y - {}_1y)^2 + ({}_2z - {}_1z)^2.$$



Здесь и далее левые нижние индексы задают собственные отметки точек или объемных вычислительных объектов в геометрическом пространстве Евклида.

Основы современной механики, так же как и вычислительной гидромеханики, заложены во времена Ньютона⁴ в терминах исчисления конечных разностей метода флюксий, которые ныне обрели всеобщее употребление в упрощенной форме анализа бесконечно малых и дифференциального исчисления Лейбница⁵, сводящего законы гидромеханики к бестелесной точке в системах дифференциальных уравнений в частных производных Эйлера⁶.

С появлением эффективных вычислительных машин, прикладная, или вычислительная механика Ньютона⁷ вновь обретает возможность эффективного развития на пути прямого численного описания законов природы, в новом свете пересматривая двойственность непрерывной среды в рамках построения корпускулярно – континуальных алгоритмических процессов численного моделирования.

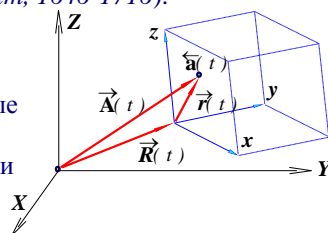
Безусловно, что сама по себе математика, пусть даже и вычислительная, не становится самоценным объектом исследований, а лишь представляется как постоянно развивающийся инструмент для решения каких-либо теоретических и сложных технических задач. Современная прикладная математика уже немислима без вычислительной техники, всецело находящейся под контролем автоматизированных информационных систем и искусственного компьютерного интеллекта. Вычислительная математика требует существенно более строгого подхода к определению всех числовых объектов и расчетных операций, в том числе в синтаксических формальностях и семантических связях математического языка. Так, к примеру, в тензорно-векторных записях становится существенным положение сомножите-

⁴ Исаак Ньютон (*Newton Isaac, 1643-1727*).

⁵ Готфрид Вильгельм Лейбниц (*Leibniz Gottfried Wilhelm, 1646-1716*).

⁶ Леонард Эйлер (*Euler Leonard, 1707-1783*).

⁷ Механика Ньютона подразумевает существование абсолютной системы отсчета, задающей однозначные и линейные преобразования координат с любым из локальных базисов, жестко связанных с подвижными телами или замороженных в элементарные континуумы сплошной среды. При этом для любых систем отсчета всегда справедливы кинематические идеализации абсолютного времени, последовательно текущего во всех законах механики и всегда единого для любых пространств и материальных объектов.



лей, чем уравнивается форма записи множимого-множителя и делимого-делителя; более глубокие смысловые ограничения включаются в описаниях законов механики и в алгоритмах для их практического применения.

И все же, в условиях внешне стремительного развития технических достижений, сама вычислительная математика обновляется медленно и весьма эклектично. Стремление к фиксации исходных положений математического языка для механики точки не только поддерживает самобытный консерватизм точного мышления, но и отражается множественностью разноречивых научных школ.

При этом все школы остаются в самостоятельном свободном поиске численного решения всевозможных прикладных задач, жестко сдерживаемом критериями по корректности и надежности дискретной аппроксимации классических уравнений математической физики, открыто указывающих на ограничения «докомпьютерного» языка математики для реализации новых вычислительных моделей, что более всего проявляется в задачах механики сплошных сред.

Упования на исторически выверенные математические модели и излишнее стремление к строжайшей преемственности в достижении сложных инженерных результатов, ныне заметно ограничивают творческие потенции и явно диссонируют с научно-эстетическими предпочтениями нового программистского сословия.

Вычислительные мощности современных компьютеров создают условия для быстрого и повсеместного внедрения сложнейших логических, математических и аналитических моделей для решения широкого круга задач гидромеханики, включая проектирование, производство и эксплуатацию морской и авиационной техники. В то же время традиционные и наиболее сложные для практической реализации "докомпьютерные" математические модели механики сплошных сред, как и ожидалось, словно в эпоху возрождения оживляют старые инженерные науки и фундаментальные идеи отцов современной гидромеханики: Зоммерфельда, Жуковского, Максвелла, Кельвина, Эйлера, Бернулли, Ньютона, Декарта, вплоть до Аристотеля, Эмпедокла, Анаксагора и Фалеса, заложивших в свое время базис не только инженерно-аналитических, но и прямых численных методов прикладной гидромеханики и физики в целом.

~~~~~

Богатство проявлений компьютерного мира математики и аналитической механики, как вполне материализованных аналитических и логических инструментов, стало возможным ввиду особых свойств новых языков математического мышления - языков программирования, не допускающих недомолвок и пустословия в изложении технической мысли, и дающих добротные экспериментальные материалы для проверки новых и оценки античных инженерных изысканий.

Многолетний авторский опыт реализации прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике подтверждает широкие возможности нового и очень своеобразного машинного языка – алгоритмического языка вычислительной математики, богатого по своим функциональным возможностям и неограниченного в практическом поиске совершенных аналитических законов механики сплошных сред.

Нельзя ли в таком случае поставить задачу разработки специального математического языка, изначально ориентированного на прямое описание числовых объектов и расчетных процессов, однозначно отображающих законы механики сплошных сред на архитектуру современных цифровых вычислительных машин, аппроксимирующих изменчивые пространственные поля гидромеханики с помощью больших дискретных числовых массивов?

Настоящее исследование начиналось из курса лекций по теории корабельных волн Александра Николаевича Шебалова, прочитанных им на кафедре гидромеханики Ленинградского кораблестроительного института в середине 80-х годов. Огромные вычислительные интегралы-операторы Кочина для корабельного волнообразования, определенные в рамках теории функций комплексного переменного, в те годы удавалось сворачивать к вполне прозрачным тензорным формализациям с анизотропными свойствами относительно осей действия гравитационных сил и направления движения корабля или подводной лодки вблизи свободной поверхности.

Нестройные начала тензорной теории складывались из чисто механистических построений, учитывающих кинематику взаимодействия подвижного тела и свободной поверхности. Компьютерные процедуры по-простецки настраивались на желаемые физико-алгоритмические операции из аналитических функций, и, как оказалось, не без успехов. Однако в математической основе таких искусствен-

ных моделей оказывались совсем уж простенькие формулы из «школьного учебника». При активной поддержке А.Н. Шебалова первым чисто тензорным достижением стало решение задачи, в которой параметры ядра сингулярного интегрального уравнения удалось втиснуть в обратный трехмерный псевдо-тензор-диполь. Инварианты эвристического тензора собрались из нелинейной численной оптимизации параметров волн Герстнера на условно большом удалении от ядра, и – численное решение задачи о движении тела вблизи свободной поверхности - получилось.

Классическая школа прикладной корабельной аэрогидромеханики в лекциях Ярослава Иосифовича Войткунского и Вальтера Борисовича Амфилохиева изобиловали инженерными решениями, в которых теоретический анализ пронизывался экспериментальными эмпириками и электрогидродинамическими аналогиями. Да, собственно, и корабельные учебники с изложением идей Кельвина, Жуковского и Прандтля целенаправленно вели к пользам морской гидромеханики, достигаемым всеми доступными теоретическими и экспериментальными средствами. В такой научно-инженерной среде тензорные формализации численных решений становились необходимым и довольно эффективным инструментом создания унифицированных алгоритмов для моделирования различных течений жидкости.

Тензорные записи вычислительных объектов и операций оказались на удивление эффектными и удобными для решения интегральных и дифференциальных уравнений гидромеханики, для попутных геометрических построений расчетных схем, и даже для анализа экспериментальных материалов об испытаниях моделей судов в замечательном гравитационном опытовом бассейне Ленинградского кораблестроительного института. Во всех случаях это приводило к углубленному пониманию сути и смысла математических моделей и вычислительных операций на ЭВМ, однако теоретическое выражение пользы тензорной математики сдерживалось немотой поиска универсальной записи для столь красивых, понятных и невыразимых на языке формул чувств.

И словно зная о безысходности поиска связей в математическом и алгоритмическом языках, по странным впечатлениям тех давних дней середины 80-х, Борис Валентинович Мукосеев специально и

~~~~~

только для наших гидроаэромехаников прочитал курс лекций о «тензорных математических моделях», переработанных для углубленного понимания именно прикладных задач гидромеханики. Удивительный курс *тензорной математики* сводился к иллюстрации полноты и точности тензорного определения законов движения в механике реальных жидкостей. И, как следствие, получались недоопределенными другие модели аналогичных математических представлений в теории упругости, электромагнетизме, и в прочих идеализированных сплошных средах и неньютоновых жидкостях.

Этого было уже вполне достаточно для определения пути в сторону тяжелого подъема к точному тензорному описанию трехмерных законов гидромеханики, однозначно задающих динамические процессы с элементарными континуальными объектами, всегда сохраняющими свою внутреннюю геометрию и физические размерности (*с выходом из матричных ограничений тензорного исчисления на прямое описание законов гидромеханики в понятиях обобщенной тензорной математики*).

Несколько быстротечных встреч в начале 90-х с Юрием Михайловичем Давыдовым, автором метода «Крупных частиц жидкости», популяризатором и выразителем глубочайшей философии вычислительных экспериментов в аэрогидромеханике, создали самую благоприятную почву для методичного построения искомой трехмерной тензорной математики. В результате, излагаемые в этой книге математические закономерности и идеи о численных решениях задач гидромеханики практически полностью покрываются глубокими идеями метода «Крупных частиц жидкости», благосклонно подкрепленные подборкой книг и статей с авторскими напутствиями Ю.М. Давыдова.

Невозможно представить более благоприятных условий для проведения исследований законов чистой гидромеханики, нежели в стране всепроникающей морской деятельности, на острове Сахалин и в стенах СКБ средств автоматизации морских исследований Дальневосточного отделения Российской академии наук. Остается только выразить искреннюю благодарность жене и невольному соавтору, Анне Вениаминовне Файн, воистину познавшей цену безбрежных морских влечений, беспросветных математических мытарств и нескончаемых поисков вчерашнего дня.

Сводка основных терминов и ключевых определений

В тексте книги широко используются разнообразные геометрические понятия и их кинематические аналогии, связанные с формализованным представлением трехмерных пространственных объектов и алгоритмических операций над ними, всегда ассоциируемых с малыми подвижными континуумами жидкой среды⁸ и их своеобразными метафизическими аналогиями. Отмечая, тем не менее, что нигде в этой работе не вводится каких-либо новых математических понятий или необычных физических законов, все же необходимо изначально определиться с особой терминологией и специальными математическими обозначениями, построению и обоснованию которых посвящено излагаемое в книге исследование.

Прямые вычислительные эксперименты гидромеханики с использованием цифровых дискретных ЭВМ, могут использовать только разностное представление пространственных физических полей, задаваемых ограниченным количеством аппроксимирующих узлов в пространстве. Динамика изменения этих полей также определяется дискретными этапами вычислений во времени.

В настоящей работе повсеместно используется жесткое условие о линейности всех интерполирующих функций, применяемых как для аппроксимации пространственных полей, так и к течению физических процессов внутри вычислительных этапов. Это сильно ограничивает контекст использования всех вычислительных объектов и расчетных операций, жестко связывая их с требованиями алгоритмизации, и необходимостью постоянного контроля и коррекции физиче-

⁸ Малый континуум включает в себя сплошную среду в ближайшей окрестности локального базиса, заданного базисными осями трехмерного конечноразностного тензора, внутри которого все физические характеристики и законы механики жидкости аппроксимируются линейными зависимостями.

ских свойств сплошной среды, выполняемых непосредственно в процессе проведения вычислительных экспериментов.

В этом случае многие понятия и определения современной математики и традиционного тензорного анализа становятся избыточно обобщенными, что приводит к недостаточности исходных условий и неоднозначности физической интерпретации моделируемых процессов; к отсутствию необходимой строгости в построении вычислительных объектов; к неопределенности всех вычислительных операций и к необычайной сложности компьютерных алгоритмов в целом.

Тензорные формализации вычислительных объектов и операций существенно упрощают логику построения новых математических моделей гидромеханики, сводя их непосредственно к структурам данных и алгоритмам современных ЭВМ. К сожалению, используемая здесь трехмерная тензорная математика, хоть и является совсем малой частью современного тензорного анализа, все же для сведения ее записей к канонической форме, приходится пользоваться новыми обозначениями и особыми объяснениями тензорных объектов и операций. Поэтому, в тексте книги, где это возможно, в сносках будут доопределяться используемые термины и математические операции. Здесь же, во вводном разделе, вкратце приводятся глоссарий и объяснения используемых математических операций и вычислительных объектов.

В определении координатных систем и векторных величин воспользуемся обобщенными терминами теоретической гидромеханики и понятиями математической теории поля:

Скаляры – эти величины вполне определяются своими численными значениями при заданных единицах измерения, например, как: время, длина и масса. Скалярными параметрами определяются также реологические (*инвариантные*) свойства сплошной среды, как: плотность, вязкость, упругость, сжимаемость (*метрики, объемы и ориентация базисов*) и др.

Векторы – это особые вычислительные объекты⁹, в точности характеризующие местоположение точек в абсолютной или локальной системах координатных отсчетов; задающие пространственную ориентацию и масштабные параметры моделируемых объектов – элементарных континуумов жидкой среды; а также направление действия сил и реакций в рамках законов аналитической механики для крупных частиц жидкости и поляризованных корпускул.

Тензоры – пространственные композиции (симплексы¹⁰) из базисных векторов или координатных осей, однозначно определяющие геометрические преобразования между различными системами координат и задающие линейные законы для описания физических свойств сплошной среды внутри и в ближайшей окрестности малых векторных триад – крупных частиц жидкости.

По физической сути *тензор II ранга* наиболее близко соответствует понятию *аффинора*, введенного в использование Людвигом Прандтлем в книге «Гидро- и аэромеханика» [1932], где тензором называлась только симметричная часть аффинора, а выделяемая антисимметричная часть аффинора определялась в качестве особого вектора вращения.

Тензорные операции с элементарными объектами гидромеханики, их свойства и правила арифметических преобразований наилучшим образом соответствуют определениям, принятым в работе Дж. Астарита и Дж. Маруччи «Основы механики неньютоновских жидкостей» [1978], от нотации и смыслового содержания которых в этой книге не делается значительных отклонений.

⁹ Векторные величины представляются с помощью композиций из числовых величин их проекций на координатные оси, либо с помощью задания длины (*модуля*) и угловой ориентации (*направления*) векторов. *Последние определяются в виде специальных полярных, цилиндрических или сферических систем координат, имеющих криволинейные изолинии, и потому в данной работе они рассматриваться не будут.*

¹⁰ Симплекс – минимальное количество базисных векторов, задающих линейное пространство в ближайшей окрестности пространственной точки. В трехмерном пространстве симплекс составляется из 3 векторов, в двумерном – 2, в одномерном – 1 вектора.

В целом же, используемая здесь тензорная математика ограничивается использованием тензоров не выше второго ранга, всегда представляющих пространственно-кинематические процессы в малых объемах трехмерного пространства. Однако, несмотря на изначальные ограничения на разнообразие вычислительных объектов и операций с ними, изложение выходит за рамки тензорного исчисления повсеместным использованием двух дополнительных смешанных тензоров, которые не формализуются в рамках матричной алгебры. В основах математических записей особо оговаривается местоположение сомножителей одночленных выражений, в которых умножаемая (*трансформируемая*) тензорно-векторная величина всегда располагается слева от множителя (*по аналогии с делимым – слева, и делителем - справа*). В качестве такого множителя чаще всего будет использоваться геометрический тензор формы крупной частицы жидкости, или обобщенные тензоры ее внутренней энергии, инерции, плотности и т.п.

Геометрические определения

Векторное исчисление составляет математическую основу современной геометрии, гидромеханики и электромагнетизма, всех явлений и процессов в океане и атмосфере, в законах теоретической гидромеханики и механики сплошных сред. Векторное описание пространственных объектов и методы геометрического представления непрерывных процессов берут свое начало из работ механиков XVII века Рене Декарта и Исаака Ньютона, создавших векторное исчисление в абсолютных координатных системах классической механики.

Вводя локальные системы координат для элементарных подвижных и деформируемых частиц жидкости, изначально ограничим рассмотрение принципов дальнего механического взаимовлияния, чтобы законы механики для близкого взаимодействия смежных частиц могли определять как большие внешние силовые воздействия, так и интенсивные инерционные реакции и значительные внутренние деформации элементарных гидродинамических объектов. Это позволяет сохранять декартовы базисы с евклидовым пространством для

каждой из локальных систем отсчета, а все законы кинематики жидкости и механики ее трансформаций представить в виде линейных пространственно-временных зависимостей в простейшей тензорно-векторной форме.

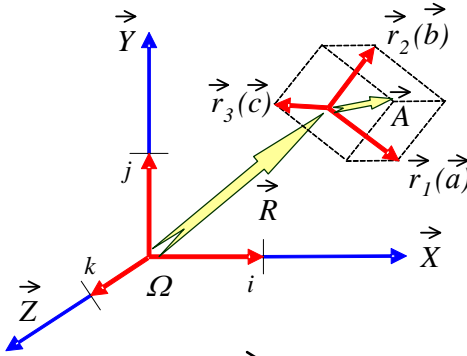


Рис. 1. Локальный базис \vec{r}_i местной системы координат образуется тройкой базисных векторов – ортов единичной длины.

Для удобства представления аналитических выражений, векторные величины будем обозначать различными способами:

1. \vec{R} – формальное обозначение векторной величины, где прописная буква R означает, что вектор измерен в проекциях с центром в единой абсолютной системе координат, а стрелка, направленная вправо обозначает, что векторные компоненты также измерены в проекциях абсолютной системы отсчета. Если стрелка направлена влево \overleftarrow{R} , то величины векторных компонент считаются спроектированными на базисные оси какой-либо отдельной крупной частицы жидкости, обладающей собственным или дуальным базисом, связанным с глобальной системой координат с помощью геометрического тензора формы этой элементарной частицы.

2. \mathbf{R}_i – определение векторной величины с помощью буквы и нижнего индекса, обозначающего наличие координатных проекций вектора на базисные оси двух- или трехмерного пространства. Такие компоненты вектора называют *ковариантными*. Если индекс у любого типа векторов или тензоров показан сверху, как: \mathbf{R}^j , то это означает, что величины координатных проекций отмерены в связанной локальной системе отсчета элементарной крупной частицы жид-

кости, а компоненты такого относительного вектора называют *контравариантными*.

3. Векторная величина, при необходимости анализа каждой из ее компонент, записывается в виде матрицы-строки для привязки к абсолютной системе отсчета, или матрицы-столбца – для ее связывания с локальным базисом. В окончательном виде векторные величины могут быть заданы одним из указанных способов:

$$\vec{R} = R_i = \{ R^X, R^Y, R^Z \} - \text{вектор в проекциях абсолютного базиса;}$$

$$\overset{\leftarrow}{R} = R^j = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} - \text{тот же «длинный» вектор в локальном базисе.}$$

Как это стало общепринятым в компьютерных моделях, в локальном базисе вместо наглядных буквенных обозначений координатных осей, нередко используются цифровые индексы с порядковыми номерами тех же векторных компонент.

Местная или связанная система координат в трехмерном пространстве математически формализуется в виде локального базиса, образуемого некопланарными векторами произвольной (*ненулевой*) длины, которые определяют собственный масштаб единичных ортов внутри локальной системы координат. В проекциях глобальной системы отсчета компоненты локальных тензоров могут быть представлены в виде строки из трех базисных векторов или - трех столбцов координатной матрицы из 9 чисел:

$$\hat{r} = \vec{r}_i = \{ \vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3 \} = \begin{Bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{Bmatrix}.$$

Новый математический объект, определяемый с помощью трех условно единичных базисных векторов или матрицы компонент этих векторов, называют геометрическим или базисным тензором 2-го ранга, или просто – **тензором**.

Простейшими примерами локальных систем отсчета в технике являются местные координаты, в том числе связанные с подвижными объектами, как самолет, корабль или автомобиль.

По формальным признакам иногда скалярные величины называют тензором нулевого ранга, а векторные величины – тензором первого ранга.

По аналогии, в местной системе отсчета единственным образом могут быть представлены проекции единичных ортов исходной абсолютной системы координат, что образует обратную матрицу, или – дуальный базис: $\check{\mathbf{r}} = \check{\mathbf{r}}^{\leftarrow j} = \hat{\mathbf{r}}^{-1}$, как:

$$\check{\mathbf{r}} = \check{\mathbf{r}}^j = \left\{ \begin{matrix} \check{\mathbf{r}}^1 \\ \check{\mathbf{r}}^2 \\ \check{\mathbf{r}}^3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} r^{1,1} & r^{2,1} & r^{3,1} \\ r^{1,2} & r^{2,2} & r^{3,2} \\ r^{1,3} & r^{2,3} & r^{3,3} \end{matrix} \right\},$$

где компоненты матрицы-тензора могут быть сформированы простыми геометрическими построениями со свободными единичными векторами–ортами из абсолютного базиса, спроектированными в отсечках по сторонам косоугольных параллелограммов внутри локального базиса (рис. 1).

В определении местных координатных систем используется правило, что собственные оси внутри локального базиса всегда представляются строго ортогональными (*взаимно перпендикулярными*) и ортонормированными (*с собственной единичной мерой*). Это означает, что из локального базиса абсолютная система координат смотрится как некая другая – «как бы локальная» (*дуально связанная или - обратная*), косоугольная и неортонормированная система векторных отсчетов.

Точно также операция умножения вектора на произвольный (*невырожденный*) тензор II-го ранга, всегда переводит его из собственного декартового базиса в некую произвольную, в том числе видимую изнутри как ненормированную и косоугольную внешнюю координатную систему, основанную на связных (дуальных) базисных осях.

Введенные таким образом геометрические правила позволяют при определении законов гидромеханики опираться на важное свойство локальных систем координат, всегда обладающих собственным декартовым базисом в локальном евклидовом пространстве, и дающих возможность определять базовые законы гидромеханики в явной или даже в канонической форме.

Ключевые принципы непротиворечивого логического проектирования

Вычислительная техника и систематическое программирование вернули к жизни многие антично-философские обобщения, усилив их древнюю словесную логику строгими правилами современных алгоритмических языков, обогатив давние учения новыми функциональными возможностями искусственного интеллекта современных вычислительных систем.

Поиск специальных математических начал гидромеханики, подобно созданию сложных технических объектов, происходит на пути прямого логического проектирования, с последующим всесторонним обоснованием принятых технических решений.

На начальных этапах такого проектирования можно линейно выстраивать ключевые умозаключения, выбираемые только из необходимых физических предпосылок *диалектическими* методами, как своеобразно позиционированный выбор между гиперболизированными логическими противопоставлениями. Последующая функциональная оптимизация внутренних свойств для новых логических объектов, строго связанных с условно внешними операциями над ними, требует удовлетворения жестких критериев единственности и достаточности принятых в качестве базовых законов механики и специальных математических инструментов, в свою очередь сводящихся к независимому трехстороннему обоснованию всего комплекса проектных решений в рамках непротиворечивой логики – *трилектики*.

Непротиворечивые методы логического проектирования могут быть жестко связаны с технологиями создания сложных программных комплексов, реализующих все этапы численного моделирования



в гидромеханике, от подготовки числовых объектов, до графической визуализации результатов и интерактивного управления проведением вычислительного эксперимента в целом. В диалектическом противопоставлении здесь встают технологии чисто функционального и декларативного программирования, которые применяются к особо организованным структурам данных и исполняемым последовательностям машинных кодов.

Непротиворечивость проектирования программ достигается трехсторонним рассмотрением всех вычислительных объектов и физических процессов с позиций достижения наиболее эффективной реализации конкретной прикладной задачи вычислительной гидромеханики.

Диалектика – как установление количественных зависимостей

Исходя из диалектического учения Платона, это метод восхож-

дения к новым знаниям на пути синтеза и разрешения всевозможных логических противоречий, как пути познания - ведущего к вершине понимания технической задачи в виде сложного, но единого инженерного комплекса. В терминах оптимального проектирования это путь «снизу-вверх», от анализа и накопления необходимых предпосылок и конкретных технических решений, к определению универсальных логических объектов и законов их динамического взаимодействия. Этот этап завершается достижением условной вершины знаний об изучаемых предметах и явлениях, называемой Платоном - «божественной». С такой высоты уже нечетко видится фундамент искомого предмета исследований, зато очень точно поименовывается условно новое направление чисто технического познания природы.

На поверочном пути «сверху-вниз», как минимум, должны быть жестко связаны все аналитические результаты: обоснована оптимальность новых теоретических построений; доказана достаточность найденных проектных решений и единственность их технической реализации. Для инженерной задачи только на обратном поверочном

пути проектирования могут быть определены окончательные параметры всех составляющих единую систему устройств и ее комплектующих звеньев; указаны области совместного существования различных технических решений и определены функциональные ограничения новых технико-теоретических разработок.

По формальным признакам такой всесторонний анализ результатов проектных исследований уже выходит за рамки одномерного диалектического познания, так как в обоснование технических решений закладываются качественно другие независимые критерии и иномродные количественные оценки, обуславливающие оптимальность позиционирования относительно диалектически противопоставляемых концепций. И все же, именно двухстороннее диалектическое изучение проектных крайностей, гиперболизация частных технических «достоинств», ярко освещает недостижимость слишком простых технических результатов, в том числе обусловленную динамической нестабильностью, как для отдельных конструкций, так и для всего будущего инженерного сооружения или сложного вычислительного эксперимента в целом.

Это означает, что диалектический метод может представляться лишь одномерно-скалярным аналогом в выборе направления поиска в трехмерном логическом пространстве, в котором формальные противоречия можно развести по ортогонально ориентированным базисам, добываясь поиска независимых оценок и оптимальных количественных критериев, изначально присущих противопоставляемым теоретическим концепциям.

При создании компьютерных алгоритмов, в рамках диалектики останутся не только скалярные проектные критерии, принимаемые в противопоставляемых системах логических определений, но также и тензорные математические объекты, которые логически фиксируются в абсолютной и в локальной системах отчета, устанавливаемые как связные, дуальные, а по сути – взаимно обратные объекты математической теории поля.



Трилектика – как механика взаимодействия или язык непротиворечивого логического проектирования

Применение троичной логики в физике лучше всего иллюстрируется аналогиями из трехмерного пространства – времени, в котором описываются, анализируются и решаются все прикладные задачи механики сплошных сред.

Важно отметить, что математические законы гидромеханики позволяют разрешить многие физические парадоксы, и в том числе обосновывать ограниченность энергетических взаимодействий и устойчивое существование подвижной среды именно в трехмерном абсолютном пространстве с идеальным временем.

К сожалению, для прикладных задач вычислительной гидромеханики до настоящего времени еще нет строгих определений даже для элементарных законов механики близкого взаимодействия смежных частиц жидкости, не установлены строгие математические зависимости между динамическими инвариантами движения и деформациями ограниченных жидких континуумов. Фактически отсутствуют универсальные теоретические разработки для численной реализации законов движения и кинематики деформируемых сред, математически строго не определяются пространственно распределенные реакции внутри и в окрестности жидких континуумов при их взаимодействии с внешними и внутренними силовыми полями; так же как и при локальных энергетических воздействиях на границы крупных частиц жидкости.

Современный тензорный анализ, используемый для описания законов движения жидкости, обладает значительным аналитическим заделом. Как оказалось, при минимальных понятийных уточнениях тензорная математика приводит к существенно более строгим и однозначным выражениям при числовой фиксации состояния элементарных частиц жидкости, включающим специальные правила для реализации динамики взаимодействия смежных числовых объектов в рамках аналитической механики и математической теории поля од-

новременно. Обобщенные тензорные числовые объекты определяют свойства жидкости и механику взаимодействия смежных частиц в строго линейной постановке аппроксимационной задачи.

Ограничивая теоретические исследования поиском эффективных численных решений прикладных задач гидромеханики, можно разделить исходную постановку проблемы на три взаимосвязанных и одновременно независимых объекта чисто прикладных исследований в области проектирования и компьютерной реализации прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике, как таковых:

1. Троичная логика исследования элементарных числовых объектов, вычислительных процессов и комплексных математических моделей, нацелена на создание условий для непротиворечивого проектирования и оптимального построения сложных прикладных вычислительных экспериментов в механике сплошных сред;

2. Поиск путей построения специальных функциональных языков программирования, управляющих адаптивными алгоритмами вычислительной гидромеханики, и предназначенных для автоматизированной постановки задачи и контролируемого решения прикладных задач гидромеханики, в том числе со сложными режимами течения жидкости;

3. Тензорный математический аппарат вычислительной гидромеханики, формализующий описание фундаментальных законов существования и динамики энергоемкой непрерывной среды.

Краткая таблица основных обозначений

T	– абсолютный отсчет времени; $t = \Delta T$ – расчетный интервал времени	с
p	– точечное (скалярное) давление	Н/м ² ; кг/(с ² ·м)
$\Omega^T R$	– координаты узла сеточной области Ω на момент времени T	м
${}^+ R$	– координаты смежной точки в следующий момент времени	м
\vec{V}	– полная скорость частицы жидкости в абсолютной системе отсчета	м/с
\vec{v}	– вектор скорости относительно подвижного центра частицы жидкости	м/с
\vec{w}	– вектор приращения скорости (ускорения) для частицы жидкости	м/с ²
$\hat{r} = \hat{r}_k = r_{ik}$	– геометрический тензор формы крупной частицы жидкости	м ³
$\hat{v} = \hat{\Delta} r_i$	– тензор локальных скоростей (приращений скоростей)	м ³ /с
$\hat{v} = \hat{v} \cdot \hat{r} = \hat{v} / \hat{r}$	– тензор конвективных скоростей	1/с
$\hat{\omega} = \hat{\Delta} V_i$	– тензор течений внутри крупной частицы жидкости	м ³ /с
$\hat{\rho} = \hat{\rho}^j = \rho^{kj}$	– тензор плотности или внутреннего состояния жидкой частицы	кг/м ³
$\hat{m} = \hat{\rho} \cdot \hat{r} = m^i_j$	– тензорная масса жидкой частицы, смешанный тензор, приводящий внутреннее состояние жидкости к абсолютной системе отсчета	кг
\vec{F}	– результирующий вектор массовых (объемных) сил	Н; кг·м/с ²
\hat{f}	– тензор напряжений на границах жидкой частицы	Н·м ² ; кг·м ³ /с ²
$\hat{f} = \hat{f} \cdot \hat{r}$	– напряжение внутри и в окрестности частицы жидкости	Н/м; кг/с ²
$\hat{f}_H = \hat{\eta} \cdot \hat{v}_H / \Lambda$	– условный тензор вязких напряжений	$\hat{\eta}$: кг/м·с, Н·с/м ²
$\hat{f}_T = \hat{c} \cdot \hat{v}_T \cdot t / \Lambda$	– условный тензор упругих напряжений	\hat{c} : кг/м·с ² , Н·м ²

Часть 1

Технико-исторический обзор трехмерных физических обоснований непрерывной и вездесущей среды

Все же, что не выводится из явлений, должно называться гипотезою, гипотезам же метафизическим, физическим, механическим, скрытым свойствам, не место в экспериментальной философии.

Исаак Ньютон

Современная история физико-математических наук берет свое начало от фундаментальных исследований и многочисленных опытов классической механики Исаака Ньютона, обладавшего изрядным трудолюбием и изобретательностью. Его аналитические обоснования механики, геометрический и вычислительный аппарат в форме дифференциальных разностей (*флюксий*), успешно используются и сегодня для решения самых разнообразных технических задач. Лондонское королевское общество и Парижская академия наук совместно создавали современный фундамент классической механики, определив главные пути эпохи научно-технических достижений, – эпохи все менее и менее полагавшейся на созидательное значение естественно-научной философии; на древние метафизические познания в области прикладной механики и физики.

Жаль, что в наше время философия, как наука, разделилась, отчасти сокрыв глубокие интересы к познанию естественной природы, уйдя в тень эклектичных дискуссий о бытии и сознании. Веление времен всецело согласуется с житием простых людей, со взрывами



социальных революций и стремительным прогрессом в освоении огромных земных пространств, получением удивительных технических знаний, ознаменовавших путь от чисто технических идей Леонардо да Винчи к теоретическим основаниям механики сплошных сред Леонарда Эйлера, к изумительному и задумчивому развитию современной научно-технической революции.

Метафизические основы фундаментальных законов гидромеханики

*Поиск новых знаний в области вычислительной гидромеханики,
– как в безмерно старой модели мироздания*

Как и всякое новейшее инструментальное средство, вычислительная математика претендует на революционное обновление своих наукоемких технологий, повсеместно наполняющих среду обитания людей новыми и почти интеллектуальными устройствами. Научно-революционное брожение со временем стабилизируется на пути планомерного и методичного освоения нового инструментария, восходящего от фундамента исторического и философского осмысления математических моделей, вычислительных экспериментов и искусственного интеллекта вездесущей микропроцессорной техники, усиленных информационной интеграцией в мировые базы инженерных знаний.

Поиск путей решения прикладных задач вычислительной гидромеханики приводит к созданию специализированных языков программирования и знакомству с основами математической лингвистики, изначально ориентированных на оптимальное проектирование и эффективную реализацию сложных программных комплексов, в том числе способных к интерактивному диалогу с инженером-исследователем.

Прямые вычислительные эксперименты в гидромеханике, изначально призванные к изучению неразрывных взаимосвязей и единства процессов и явлений природы, таким образом, вновь обрели пути обобщения базовых законов механики с позиций эксперименталь-

ной философии и в терминах гибких функциональных языков программирования, допускающих единое описание как подвижных и деформируемых корпускул, так и устаревшего вездесущего и «тончайшего эфира, проникающего во все сплошные тела и в них содержащемся» [Ньютон, 1989, стр.662], всемерно обогащая «... запас опытов, коими законы действия этого эфира были бы точно определены и доказаны».

Заметим, что прикладная математика Ньютона изначально была конечноразностной, трехмерной, и с естественной пространственно-временной постановкой прикладных задач. Исчисление флюксий Ньютона сохраняется во многих задачах современной механики, и замечательно проецируется на постановку прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике. К сожалению, удобные для решения прямых вычислительных задач, разностные численные схемы чрезвычайно сложны для чисто аналитических исследований, и до сего дня еще не блещут каноническими определениями, не допускают сколь-нибудь универсальной постановки расчетных задач, и нередко крайне противоречиво освещаются в современной технической литературе.

Ныне физико-математические модели и вычислительные изыскания Исаака Ньютона вновь широко востребованы и возвращаются на пути практического использования и быстрого совершенствования. Новые многопроцессорные компьютеры созданы как будто бы специально для возрождения слегка «подзабытых» ньютоновских математических идей, созданных когда-то в Лондонском королевском обществе морской страны - Великобритании.

Словно «добротный программист», Исаак Ньютон затвердил ключевые принципы и процедуры современной естественнонаучной философии, опубликовав законы научного поиска в области прикладной механики и вычислительной математики, обобщенные им в книге «Математические начала натуральной философии» [1947, в переводе академика, морского инженера А.Н. Крылова] (*Philosophiæ naturalis principia mathematica, 1726*).



Из истории механики и геометрии

Современное научное естествознание хронологически связано с философскими трудами Ионийской школы VII-VI вв. до н.э. Иония – район на западном побережье Малой Азии. В истории древних цивилизаций трудно устанавливать истину об уровне развития математических наук, даже если такие науки и процветали на фоне великих инженерных свершений античности. Слишком много жестоких войн, культурных революций и природных катастроф нещадно влияли на целостность исторического наследия, негативно отражаясь на преемственности инженерных и естественнонаучных знаний.

Основоположники античной греческой философии связывают свои начальные знания с научными школами процветающей Финикии - мореходного государства, обладавшего колониями на всем побережье Средиземного моря, на атлантическом побережье Африки, вплоть до мыса Доброй Надежды; оставившего следы торгового присутствия и инженерного строительства на всем атлантическом побережье Европы, и в том числе - на английских островах.

Это во многом объясняет переплетение многих познаний в ионийской философии, странным образом отражавшей многие законы современной физики, астрономии, географии и морской навигации, привнесенные в литературно-философские повествования из специализированных технических и естественнонаучных источников инженерного сословия Древней Азии. Письменная история не уберегла ценнейших первоисточников античных наук, не сохранилось и инженерного наследия ни Финикии, ни Лидии, ни древнего Египта.

Дошедшие до нас упоминания и редкие повествования об ионийской школе Фалеса показывают обыденность отношения людей к естественнонаучным знаниям в области географии, мореходной астрономии и навигации, в древности еще не подернутых эклектиками религиозных и политических суждений. По-видимому, в структуре малоазийских научных школ просвещенные греки довольствовались

популярно-просветительскими учениями на уровне начальной подготовки инженерно-технических кадров в удаленных греческих провинциях. Может быть, по этой причине древние цитаты и пересказы отличаются упрощенным изложением физических понятий (*peri physeos* - учения о природе), в то же время касающихся фундаментальных основ строения микромира и космоса.

После восстания в 494 г. до н.э. полностью разрушена столица Ионии, город Милет. Многие из ученых мужей нашли пристанище в активно развивавшихся Афинах, привнеся в греческую философию остатки технических достижений малоазийских наук, и отчасти промышленных технологий и ремесел.

Античная механика и геометрия

Фалес (625-547 гг. до н.э.) – философ и ученый, пользовавшийся непререкаемым научным авторитетом. Фалес – знатный гражданин Милета, получивший техническое и морское образование в Финикии, изучивший математические науки и мореходную астрономию в Лидии, познавший таинства египетских жрецов в длительных странствиях по Нилу.

Уровень образования и высокий общественный статус Фалеса позволял ему правильно оценивать военно-политическую ситуацию в Малой Азии и влиять на геополитические решения в жизни Милета и Ионии в целом. Фалес много времени проводил в дальних странствиях, привнося свет научных знаний во многие средиземноморские страны, активно влияя на становление общественного образования и научных школ в Греческом государстве. Античная Греция с благоговением признает Фалеса первым из семи мудрецов, своим первым просветителем и фактическим основателем будущей школы греческой философии. Ученый, философ и путешественник, Фалес стремился передать грекам свои обширные познания о мореходной астрономии, океанографии и других морских науках, отчего восхищенные греки называли его не иначе как поклонником и проповедником водной стихии. Сохранилось его любопытное гидромеханическое высказывание о происхождении вселенной: « ... вода есть начало и ко-

нец всего, ибо из нее путем сгущения и испарения составляется все и все ею поддерживается, вследствие чего происходят колебания земли и вихри и движение светил, и все увлекается и течет согласно природе первого родоначальника всего сущего».

С именем Фалеса связываются также и основополагающие математические знания: он ввел в пользование древних европейцев современный календарь и двенадцатеричную систему счисления; был автором пособия «Судоводительская астрономия», в котором излагались математические расчеты по астрономии и навигации с использованием звезд; умел рассчитывать и предсказывать солнечные и лунные затмения; правильно объяснял природу нагонных наводнений на Ниле.

Отметим еще раз: античные математические науки опирались на двенадцатеричную систему счисления, которая позволяла формализовать метафизические идеи с помощью цифр, трактуя их как в диалектическом противопоставлении фактов, так и в троичном (*пространственном*) объединении противоположностей.

В то же время судьба философского учения Фалеса является свидетельством безвозвратной утери практически всех достижений древне-античной цивилизации Восточного Средиземноморья, научно-философское наследие которого было рассеяно при многократных переделах земель и переменнах в сознании людей в эпоху становления современных политических режимов и мировых религий.

Пифагор (570-497 гг. до н.э.). По преданию в молодости Пифагор учился в Египте, отчего в пифагорейском учении немаловажную роль играют политико-религиозные и даже мистические направления, обосновывающие идеалы «аристократии духа» во «владычестве лучших», живущих и поныне в элитарных кругах, оторванных от реальной инженерной практики. Научная методология разделяла познание на две части: «*acousma*» – услышанное; и «*mathema*» – знание.

Пифагор утверждает, что «*все есть число*», вводя таким образом новую логику математизации знаний. Под термином «число» трактуются «*четыре канонических начала*» стихий природы – «*земля, вода, воздух и огонь*». В случае законов Вселенной это уже квадрату-

ется как: - «*арифметика; геометрия; астрономия и музыка*»; а также – «*квинтэссенция*» (пятая - сущность) как – «*общемировой эфир*».

По сути же, Пифагор декларативно вводил социальные и этические нормы, создавал экономические и политические законы управления государством. Безусловно, плодотворной была идея числовой и геометрической гармонизации мира, опиравшаяся на пятеричные законы музыкальной гармонии, по сути же – апеллировавшая к непознаваемости искусства и отвлеченно прекрасного.

Анаксагор (500-428 гг. до н.э.), являясь прямым наследником ионийской научной школы, более 30 лет жил и занимался просветительством в Афинах. В своем физико-философском учении оперирует понятиями малых элементов с однородными свойствами (*семян или гомеомерий*), которые всегда входят во все вещества, в совокупности определяя его внешние и внутренние свойства. Анаксагор оперирует понятиями очень близкими по смыслу современным построениям гидродинамической модели мира: вводит понятия эфира и воздуха, одновременно упоминая о корпускулярных моделях законов взаимодействия твердых тел и жидкой, деформируемой и неразрывной окружающей среды.

Ярким высказыванием Анаксагора о природе материи является следующее: « ... *никакая вещь не возникает и не уничтожается, но соединяется из существующих вещей и разделяется. И таким образом, правильнее было бы назвать возникновение соединением, а уничтожение – разделением ...* ». Вещество Анаксагор мыслит в форме непрерывных субстанций «гомеомерий» (семян), количественное преобладание которых определяет видимые и ощущаемые свойства предметов: « ... *следует полагать, что во всех соединениях содержится многое и разнообразное, в том числе и семена всех вещей, обладающие всевозможными формами, цветами, вкусами и запахами ...* ». Механизм соединения и разделения веществ Анаксагор называет «*абсолютным разумом*». Физика Анаксагора становится более естественной, если «*Разум*» переопределить обобщенным понятием физических законов, относящихся к материальным телам и энергоемким континуумам, или - реальным сплошным средам.

Из высказываний Анаксагора можно отметить его вовлеченность в решение инженерных и технологических проблем Древней Греции: «... Таким образом происходит вращение и отделение этих веществ под действием силы и скорости. ... Остальные вещи имеют часть всего, Разум же беспределен и самодержавен и не смешан ни с одной вещью, но один он существует сам по себе. ... Во всем заключается часть всего, кроме Разума, но существуют и такие вещи, в которых заключается и Разум». Последнее выражение предвосхищает средневековую гидромеханическую модель мира, основанную на замкнутых потоках энергии движения эфира в ограниченном пространстве, как процесса концентрации энергии-материи и ее независимое существование в непрерывном пространстве - времени.

Трудно сказать об истоках естественнонаучных познаний, Анаксагора, которые и через 20 столетий столь же актуальны, и столь же дискуссионны: « ... – все устроил Разум, а также то вращение, которое совершают звезды, Солнце и Луна, а также отделившийся воздух и эфир. ... Солнце снабжает Луну своим светом. ... Радугой же мы называем отражение Солнца в облаках. ... Гром и молния имеют причиной столкновение и трение облаков. ... Затмения Луны происходят оттого, что ее загораживает Земля, ... солнечные же затмения бывают, когда во время новолуния Луна загораживает [собой Солнце] ... Небо состоит из камней и держится вследствие сильного круговращения. ... Светящиеся небесные тела - суть раскаленные камни, захваченные круговращением эфира ... »

Эмпедокл (484-424 гг. до н.э.) уже не мог учиться в Милетских университетах, так как за 10 лет до его рождения столица Ионии была разрушена. Эмпедокл нередко посещал италийские штаты Греции, где ознакомился с общественно-политическими и естественнонаучными учениями пифагорейцев. Но все же постижения «аристократии духа» не завели его под сени «владычества лучших». Эмпедокл известен активным образом жизни: выступлениями на олимпиадах; участием в войнах, что заметно политизировало его физико-философские работы и придало им яркую метафизическую окраску.

Эмпедокл, также как Фалес и Анаксагор развивает гидроэнергетическую идею происхождения вещества и вселенной. По его представлениям Мир был раздроблен на элементарные гомеомерии и спрессован в горячий газообразный шар, внутри которого содержалось сразу все и в равных количествах, - и в таком состоянии существовал мировой «Хаос». После нарушения устойчивости столь напряженного «Хаоса» он стал расширяться, а образовавшееся в результате расширения вращение (*чем не классическая гидромеханика!*) разделило вещества с разными свойствами, что и привело к многообразию нашего Мира, который может быть охарактеризован четырьмя главными состояниями первообразующих элементов: «земля», «вода», воздух» и «огонь» (*огонь – эфир*).

Левкипп (500~440 гг. до н.э.), а позднее **Демокрит** (460~370 гг. до н.э.) опирались на пифагорейские учения и развивали одно из частных направлений физики Анаксагора и Эмпедокла. Элементарные гомеомерии (*семена*) наделялись свойствами корпускул - атомов, между которыми постулировалась возможность существования пустоты. Дискретное упрощение свойств материи вело к частным заключениям от противного, путем утверждения главенствующих гипотез.

В античные времена учение о множественности первооснов мира становилось актуальным учением о жизнестойкости цивилизации, а философия обрела общественную значимость. Так учение Демокрита вошло в медицину, в политику, в пророчества и в бизнес. Учение Левкиппа и Демокрита показало пути синтеза разнообразных познаний природы, даже если естественнонаучные идеи не формализованы физическими законами и строгими математическими зависимостями.

Сократ (469-399 гг. до н.э.) и **Платон** (427-347 гг. до н.э.) создавали свое философское учение в условиях расцвета Греческой государственности.

В демократических Афинах высоко ценилось образование и научное знание, что привело к расцвету всевозможных эклектичных идей и мнений, как естественнонаучных, так и оккультных. Бесконечные дискуссии и бурные споры софистов подготовили почву для

сквозной систематизации научных знаний, введению универсальной научной терминологии, сохранившейся и в современной философии всех языков мира: *phisis* и *homos* – природа и человек; *thesis* – установление; *techne* – искусство ... и т.д.

Сократ, описанный Платоном, представляется проповедником научных знаний тех времен, озвучивающим методологию познания природы, в форме диалогов обосновывающим множество этических, эстетических и социально-политических установок. Диалоги Платона основаны на диалектической логике, справедливость которой ставилась в зависимости от условий существования изучаемого явления, как в пространстве окружающих событий, так и во времени.

Методология Сократа не допускала односторонних заключений, призывала к обоснованному изучению всех мнений и всех известных факторов, имеющих прямое отношение к обсуждаемой научной проблеме.

Механистические воззрения Сократа во многом опираются и развивают представление о природе Анаксагора, расширяя абстракцию беспредельного и самодержавного Разума на единого Бога, к которому сводятся не только законы природы, но также и социальные условия жизни общества; этические нормы в науке и жизни людей.

В частности, Платон определял первый этап накопления научного знания как процедуру синтеза и поиска единого начала в различных проявлениях природы, что в современной терминологии определяется как проектирование: «снизу-вверх». В высшей точке такое восхождение достигает божественных вершин, однако истинно научным оно становится только при условии непротиворечивого анализа всех результатов исследования на поверочном пути «сверху-вниз», на пути единения различных знаний о природе, ярко проявляющем истинность божественных идей в естественной природе и в жизни людей.

Учения Сократа и Платона оказали самое позитивное и миротворческое влияние на все последующее развитие философского и естественнонаучного знания. Академия Платона просуществовала более 900 лет, что позволило Эллинистической философии сохра-

ниться в культуре и науке наших дней, неизменно освещая пути отступления из плена мистики и засилья догматизма.

Аристотель (384-322 гг. до н.э.). По-видимому, Аристотелю были доступны труды ионийских философов, и в том числе научные источники финикийцев и египтян, с которыми Греция имела постоянные научные, политические и торговые связи. Аристотелев Лицей, как независимая школа философии, уже не была ориентирована на решение чисто прикладных задач своего времени. Оставаясь чисто теоретической и умозрительной наукой, вобравшей в себя многочисленные схоластические учения античности, эта школа вела своеобразный логико-философский тренинг просвещенных граждан Греции, готовя их к самостоятельному использованию импортированных из Малой Азии инженерных технологий в строительстве, мореплавании, военных науках, торговле, государственном управлении и др.

Любопытно, что любой теоретический вопрос Аристотелем изучается параллельно и как минимум в трех независимых ипостасях, позволяя принять в качестве истины наиболее ценные для читателя обоснования. Нередко в трилектике Аристотеля сначала ставится и обосновывается какой-либо научный вопрос; затем эта же постановка вопроса полностью опровергается с целью поиска не менее обоснованных выводов, но с диалектически обратных позиций; чтобы в заключение показать полезность унификации логических противопоставлений при их практическом использовании. Поиск условий существования физического явления Аристотелем всегда превращается в отдельную и довольно сложную задачу познания природы.

Так, в трактате «О небе» Аристотель ставит вопрос о форме Земли. В первой части Земля круглая и вращается вместе с Луной вокруг Солнца. Во второй части все это уверенно опровергается, и вопрос представляется неразрешимым в принципе. Это позволяет в заключение обсудить методы примирения противоречивых доказательств, показав, что задача о форме Земли может быть решена исходя из потребностей реальной практики. Если строителю удобнее вести расчеты на плоской Земле, - то это правильно; мореплавателю для расчета географических координат и расстояний нужна сфериче-

ская Земля, - то он тоже вправе использовать астрономические законы для сферической и выпуклой Земли; а если астрологу удобнее, чтобы звезды были в центре Мироздания, - то он тоже вправе искать пророчества в геометрических фигурах, где вогнутая земная поверхность плывет внутри особого пространства.

В обоснование гидромеханической модели Мира у Аристотеля находим ключевые понятия абсолютного времени, пространства и наполняющего их неразрывного и вездесущего *эфира*:

1. В природе все есть движение. *Локальное движение* есть изменение положения тела с течением времени. Локальное движение разделяется на *естественное* и *насильственное*. Движение тела непрерывно поддерживается как парус на ветру воздухом (*эфиром*), стремящимся занять место, освобожденное в своем движении брошенным телом;

2. В динамике тело непрерывно находится под действием некоторой силы (*энергии*) и скорость его прямо пропорциональна приложенной силе и обратно пропорциональна сопротивлению среды. Отсюда следует, что в пустоте скорость стала бы бесконечно большой, и соответствующее движение приобрело бы свойство *вездесущности*.

Отсюда вывод: *«Природа не терпит пустоты!»*

Если же допустить существование пустоты, то *«невозможно было бы сказать, почему тело находится в движении, должно оставаться именно тут, а не там, ибо пустота, как таковая не несет в себе никакого различия»*. Таким образом, Аристотель абсолютно строго высказался о необходимости существования материальной системы отсчета, что в случае гидромеханической модели мира служит фундаментальным законом соотношения кинетической энергии относительного движения в непрерывной и деформируемой среде.

Далее Magistr dixit¹¹: *В пустоте нельзя выделить никакого предпочтительного движения: ни вверх, ни низа, ни правого, ни левого. Пустота пассивна и невозмутима. Следовательно, ее нет в нашем ограниченном мире.*

¹¹ Аристотель утверждает.

Учение Аристотеля всегда верно, исторически это утверждение может считаться глубоко обоснованным и потому справедливым. К сожалению, это учение настолько полно и всесторонне, что играющим в науку ученикам иногда проще опираться на какое-либо из противопоставляемых Аристотелем заключений, и тем самым недооценивать (*и дискредитировать*) методологию Аристотелевского Лицея в познании окружающего Мира.

Лицей Аристотеля - это особая академическая школа, объединившая и примирившая в рамках единой философии самые разнообразные учения античности и показавшая тем самым особую пользу фундаментальных познаний в жизни общества.

Роджер Бэкон (1214-1292) – знаменитый францисканский монах, которого признают прародителем экспериментального метода. Легенды приписывают ему изобретение пороха, оптических линз, подзорной трубы, компаса, паровой машины, самолета и т.д. Однако, образованнейший человек средневековой Европы проповедует на несколько особом языке: *«Опыт может быть двояким: один посредством внешних ощущений Но этот опыт недостаточен для человека, потому, что он не полностью говорит о вещах телесных и ничего не говорит о духовных. Значит необходимо, чтобы ум человеческий использовал другой опыт, и вот почему святые отцы и пророки, которые первыми принесли миру знания, испытывали внутреннее озарение, а не придерживались одних лишь ощущений»*.

Леонардо да Винчи (1452-1519) – величайший инженер из всех, кого знает современная история науки. Сам же он соглашался с тем, что в молодости ему не посчастливилось в получении достойного образования, он не смог познать полноту Аристотелевой физики и математики, и потому заново сделал и научные открытия, и новые истолкования ранее известных физических законов. Это положило начало первой инженерной революции в физике.

Леонардо да Винчи многократно излагал свои принципы научной методологии. В некоторых случаях у него снова отмечается использование именно «гидромеханической ветви» философского учения Аристотеля, но уже без многозначных определений. Леонардо

придерживался более простой и универсальной физической концепции: *«Движение есть причина всего живого»*. Достаточно большое внимание он уделяет волновым движениям, называя их наиболее естественными движениями материи и причисляя к ним звук, свет, цвет, магнетизм, и даже мысль.

«Силой я называю духовную способность, невидимую потенцию, которая через случайное внешнее насилие вызывается движением, помещается и вливается в тела, извлекаемые и отвлекаемые от своего естественного бытия, причем она дает им активную жизнь удивительной мощности; она принуждает все созданные вещи к изменению формы и положения, стремится с яростью к желанной ей смерти и распространяется при помощи причин ...».

Леонардо да Винчи преодолевает схоластическое обязательство о присутствии «Божественной Идеи» в творчестве, и формулирует правила познания мира почти с противоположных позиций: *«Всякое познание начинается с чувств»*, поэтому *«... и нужно ограничивать рассуждение опытом»*, а не простирает его за его пределы. *«Никакое человеческое исследование не может претендовать на то, чтобы быть истинной наукой, если она не использует математических доказательств, и нет никакой уверенности там, где нельзя применить одну из математических наук»*

В понимании Леонардо опыты сами по себе никогда не бывают ошибочными: *«Ошибочными бывают лишь ваши суждения, если вы ожидаете от этих экспериментов такого действия, которое не будет следствием их»*. И поэтому: *«Несправедливо жалуются люди на опыт, в величайшем гневе обвиняя его в обманчивости. Оставьте его в покое и обратите свои жалобы на ваше невежество, которое заставляет вас спешить со своими тщетными и вздорными ожиданиями таких вещей, которые не во власти опыта, и говорить, что он обманчив»*.

Конечно же, Леонардо да Винчи со своими великолепными опытами и изобретениями не мог сделать переворота в философии научного знания, его методология науки сильно уступала Магистру – Аристотелю. Однако после Леонардо уже никто не отваживался де-

лать серьезных научных исследований без опоры на экспериментальные опыты; математические обоснования; и естественные наблюдения за природными явлениями.

Уильям Гильберт (1544-1603) разработал множество приборов и опытов для изучения электричества и магнетизма и заслужил титула «отца науки об электричестве». Гильберт изготовил магнит сферической формы и с его помощью исследовал свойства магнитного поля земного шара. Однако Гильберту не удалось определить природу электричества и магнетизма, и он даже пришел к выводу, что ему *«не представляется совершенно абсурдным мнение Фалеса, приписывавшего магниту душу»*. Однако техническое развитие Европы ко времени Гильберта уже достигло того уровня, когда античные физико-философские учения пришли к серьезному противоречию с новыми физическими открытиями.

Галилей, Декарт, Ньютон

Строгие математические модели, базовые законы механики и аналитические методы изучения пространственно-временных явлений и динамических процессов, могут быть связаны с работами механиков Галилео Галилея, Рене Декарта в XVII веке и Исаака Ньютона в XVIII веке, определивших все аксиоматические правила векторных взаимодействий смежных элементов сплошной среды в абсолютных и локальных системах отсчета классической механики.

Галилео Галилей (1564–1642) успешно продолжил создание нового учения о строении мира, не преминув продолжить также и публичное развенчивание античных естественно-философских учений. Это была эпоха переосмысления и новой математической формализации всего философского наследия прошлого.

В те времена нередко использовался такой способ научной дискуссии, когда логически верное высказывание оппонента доводилось до диалектической крайности, что удается сделать только путем подмены условий проведения физического опыта, и – даже абсурдное заключение становилось противным физическим открытием.

Галилео Галилей формулирует и внедряет в практику научных исследований новую методологию, которая во многих областях естественнонаучных знаний успешно дожила до наших дней. Суть философской концепции Галилея состоит в интерпретации физического явления с целью очистки его от всех лишних или возмущающих причин. К примеру: *«Книга природы» « ... написана на языке математики, ее буквами служат треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без помощи которых человеку невозможно понять ее речь; без них – напрасно блуждание в темном лабиринте»*

Методология Галилея вполне соответствует Пифагорейским квадратовым разделением понятий; идеально подходит для целей популяризации науки; вполне применима для целенаправленного научного пересмотра и творческой (в хорошем смысле слова) компиляции чужих материалов:

1 фаза: - восприятие явления; - *чувственный опыт*, привлекающий наше внимание к изучению определенной частной группы явлений, но еще не дающий законов природы;

2 фаза: - *аксиома* или рабочая гипотеза. Центральный момент открытия, возникающий из внимательного и критического рассмотрения чувственного опыта, путем творческого процесса, сходного с интуицией художника;

3 фаза: - *математическое развитие*, то есть нахождение логических следствий из принятой рабочей гипотезы;

4 фаза: - *опытная проверка* – высший критерий всего пути открытия.

Галилео Галилей завещал, чтобы на обложке его собрания сочинений были написаны слова: *«Отсюда станет понятным на бесчисленных примерах, сколь полезна математика в заключениях, касающихся того, что предлагает нам природа и насколько невозможна настоящая философия без помощи геометрии, в соответствии с истиной, провозглашенной Платоном».*

Рене Декарт (1596-1650) продолжил дело математизации и геометризации физики. Декарт строго следовал гидромеханической концепции в физике, пытаясь во всем придерживаться непрерывно-

сти пространства и материальной связи между любыми взаимодействующими на расстоянии объектами. Для заполнения пустоты Декарт вводит понятие тонкой материи, которая находится в постоянном движении, что позволяет ему формально (*и вполне обоснованно*) определить концепцию гидродинамического притяжения между телами, окруженными вихревыми движениями тонкой материи.

Математического описания пространственного взаимодействия между непрерывными средами у Декарта еще не было, однако он хорошо владея геометрическими интерпретациями успешно применяет кинематические схемы движения «флюидов», связывая их с любыми материальными объектами. Поначалу флюиды наделялись свойствами переносчиков света, тепла и притяжения, затем, при описании магнитных взаимодействий, флюиды получили вихревые свойства и успешно сопоставлялись с реальными электрическими и магнитными наблюдениями.

Принципы познания природы Декарта сильно отличаются от научной методологии Галилея: для Декарта физика должна искать ответ на вопрос, почему происходят явления, по Галилею – исследовать, как они происходят; поиски причины – цель Декарта, описание явлений – цель Галилея.

Рене Декарт отрицает принцип абсолютного движения относительно пространства, в котором нет возможности оценить меру локального движения одного объекта относительно другого: *«Если из двух человек один движется с кораблем, а второй стоит неподвижно на берегу..., то нет никакого преимущества ни в движении первого, ни в покое второго»*. Это означало введение единых векторных законов для описания физических объектов и кинематических процессов в абсолютной и в локальных системах отсчета, связанных с подвижными предметами и сооружениями. Немаловажными научными достижениями Декарта являются принципы относительности и правила локального исчисления движения при изучении механизмов взаимодействия тел в непрерывной материальной среде.

Исаак Ньютон (*Newton Isaac, 1642 – 1727*). Эпоха Ньютона характеризуется расцветом философских школ, научных открытий и

величайших имен в европейской науке: Пьер Ферма (1608-1665), Блез Паскаль (1623-1662), Роберт Бойль (1627-1691), Христиан Гюйгенс ¹² (1629-1695), Роберт Гук ¹³ (1635-1703), Готфрид Лейбниц (1646-1716), Эдмунд Галлей ¹⁴ (1656-1742), Даниил Бернулли (1700-1782) и другие ученые, объединившиеся в Лондонском королевском обществе и Парижской академии наук.

Ключевыми понятиями учения Исаака Ньютона являются термины: «Система мира», «Природы строй», «Великий океан истины». Ньютон открыто формулирует «правила умозаключений в физике» (*regulae philosophandi*), которым он неукоснительно следует сам и которые до сего дня являются основополагающими в экспериментальной физике:

ПРАВИЛО I. Не должно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.

По этому поводу философы утверждают, что природа ничего не делает напрасно, а было бы напрасным совершать многим то, что может быть сделано меньшим. Природа проста и не роскошествует излишними причинами вещей.

ПРАВИЛО II. Поэтому, поскольку возможно, должно относить одни и те же причины к того же рода проявлениям природы.

Так, например, дыханию людей и животных, падению камней в Европе и Африке, свету кухонного очага и Солнца, отражению света на Земле и на планетах.

ПРАВИЛО III. Такие свойства тел, которые не могут быть ни усилены, ни ослаблены и которые оказываются присущими всем те-

¹² Гюйгенс Христиан (*Hugenius Christianus*, 1629-1695) – выдающийся голландский математик, астроном и физик, автор работ по механике, результатами которых пользовался Ньютон при подготовке «Начал».

¹³ Гук Роберт (*Hookius Robert*, 1635-1703) – английский естествоиспытатель, первый куратор экспериментов Лондонского королевского общества, вел астрономические наблюдения, один из авторов гипотезы о всемирном тяготении и основополагающих работ по теории упругости.

¹⁴ Галлей Эдмунд (*Halleius Edmundus*, 1656-1742) – английский астроном, математик и геофизик, инициатор подготовки «Начал», фактически осуществлял редактирование первого издания книги.

лам, над которыми возможно проводить испытания, должны быть почитаемы за свойства всех тел вообще.

Свойства тел постигаются не иначе, как испытаниями; следовательно, за общие свойства надо принимать те, которые постоянно при опытах обнаруживаются и которые, как не подлежащие уменьшению, устранены быть не могут. Понятно, что в противность ряду опытов не следует измышлять на авось каких-либо бредней, не следует также уклоняться от сходственности в природе, ибо природа всегда проста и всегда сама с собой согласна.

ПРАВИЛО IV. В опытной физике предложения, выведенные из совершающихся явлений с помощью наведения, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности, или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточнятся или же окажутся подверженными исключениям.

Так должно поступать, чтобы доводы наведения не уничтожались предположениями¹⁵.

Универсальный закон тяготения Ньютона может быть сформулирован из третьего правила: если все тела притягиваются к Земле, море притягивается к Луне, а планеты к Солнцу, то мы можем заключить, что все тела притягиваются друг к другу.

В дискуссии с Лейбницем о флюидах Декарта Ньютон опускает чисто философский тезис о «природе не терпящей пустоты», требующем определения свойств гравитационных сил и механизма их передачи на расстояние. Эта неразрешимая и для современной механики проблема до конца жизни волновала Исаака Ньютона: «Причину этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю [*hypotheses non fingo*]. Все же что не выводится из явлений, должно называться гипотезами, гипотезам же метафизическим, физическим, механическим, скрытым свойствам не место в экспериментальной философии. В такой философии»

¹⁵ В переводе А.Н. Крылова термин «наведение» означает «доказательство» или «логическое обоснование».

фии законы притяжения выводятся из явлений и обобщаются с помощью доказательства».

Ньютон не принимает плохо обоснованных гипотетических рассуждений о вихрях и флюидах, привлекавшихся в качестве переносчика энергии Декартом, а затем и Лейбницем, но и вовсе не отказывается от «... тончайшего эфира, проникающего во все тела и в них содержащегося...», завершая «Философские начала натуральной философии» следующим предложением: «*Но это не может быть изложено вкратце, к тому еще нет и достаточного запаса опытов, коими законы действия этого эфира были бы точно определены и показаны*». Убедительных опытов и математических обоснований для такого «эфира» не имеется и в современной науке.

Теоретические определения Ньютона задают абсолютное время и абсолютное пространство как фундаментальные метафизические понятия теоретической физики и геометрии.

« 1. Абсолютное, истинное математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью. Относительное, кажущееся или обыденное время есть или точная, или изменчивая, постигаемая чувствами, внешняя, совершаемая при посредстве какого-либо движения мера продолжительности, употребляемая в обыденной жизни вместо истинного, или математического, времени, как то: час, день, месяц, год.

2. Абсолютное пространство, по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным. Относительное - есть его мера или какая-либо ограниченная подвижная часть, которая определяется нашими чувствами по положению его относительно некоторых тел и которое в обыденной жизни принимается за пространство неподвижное¹⁶. ...

¹⁶ Получается, что абсолютное пространство всегда условно, а физические объекты могут быть математически строго связаны с производными от них локальными системами отсчета.

Возможно, что не существует такого равномерного движения, которым время могло измеряться с совершенной точностью. Все движения могут ускоряться или замедляться, течение же абсолютного времени¹⁷ изменяться не может. ...

Время и пространство составляют как бы вместительность самих себя и всего существующего. Во времени все располагается в смысле последовательности, в пространстве же – в смысле порядка положения. По самой своей сути это места, приписывать же местам движения нелепо. Вот эти то места и суть места абсолютные, и только перемещения из этих мест составляют абсолютные движения. ...

Причины происхождения, которыми различаются истинные и кажущиеся движения, суть те силы, которые надо к телам приложить, чтобы произвести эти движения. Истинное абсолютное движение не может ни произойти, ни измениться иначе, как от действия сил, приложенных непосредственно к движущемуся телу, тогда как относительное движение тела может быть и произведено, и изменено без приложения сил к этому телу»¹⁸

Таким образом, Исаак Ньютон создал стройную философию экспериментального изучения явлений природы и познания мира. Следуя правилам научного поиска и благодаря невероятной трудоспособности Ньютон провел огромное количество физических опытов и создал совершенную систему фундаментальных законов прикладной механики.

Очень много интереснейших явлений природы описаны в «Философских началах натуральной философии» в главах: V – «О плотности и сжатии жидкостей и о гидростатике»; VII – «О движении жидкостей и сопротивлении брошенных тел»; VIII – «О движении, распространяющемся через жидкости», которые до сих пор создают

¹⁷ Абсолютное время. Мировая скалярная величина.

¹⁸ Этих определений вполне достаточно для построения компьютерных вариантов математического описания элементарных объектов сплошной среды, базовых операций и алгоритмов вычислительной гидромеханики.

благоприятную почву для новых и новых открытий в философии, физике и прикладной механике.

Не менее значимыми научными достижениями Ньютона следует считать открытие закона линейной, относительно скорости течения, или Ньютоновой вязкости жидкостей; исследование волновых движений в упругой и вязкой среде, а также создание вычислительного аппарата прикладной математики в конечных разностях, который использовался для практического решения задач механики и обоснования новых законов природы.

При изучении вязкости Ньютон вводит своеобразную дуальность в определениях динамики малых подвижных частиц жидкости, наделяя их как корпускулярными свойствами, так и условиями сохранения исходной массы в малых контрольных континуумах, предвосхищая, тем самым, современные построения методов прямого численного моделирования в гидромеханике.

В таком численном представлении текущие координаты движущейся точки x , y , z , непрерывно изменяющиеся во времени, Ньютон называл флюентами (*fluens - течение*), а скорости их изменения во времени \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} – флюксиями (*fluxio - истечение*). Приращения флюент $\dot{x} \cdot t$, $\dot{y} \cdot t$, $\dot{z} \cdot t$ за малый интервал времени назывались моментами (*ныне - дифференциалами*). Поиск флюксий представляется как операция поэлементного добавления моментов ко всем, зависящим от времени функциям. Например:

$$x^2 + yz = 0 \rightarrow x^2 + 2x\dot{x}t + t^2 + yz + y\dot{z}t + z\dot{y}t + \dot{y}\dot{z}t^2 = 0.$$

Затем исключаются слагаемые, оставшиеся неизменными из исходного выражения, а результат делится на малый параметр t . Там где малый параметр не сокращается, то эти слагаемые просто отбрасываются. В итоге: $2x\dot{x} + y\dot{z} + z\dot{y} = 0$.

Решение обратной задачи, как, например, нахождение маршрута движения по заданной скорости, приводит к определению операции интегрирования.

Дифференциально-разностное исчисление флюксий не накладывает ограничений ни на класс математических функций, ни на раз-

мерность пространства, в котором ведется исследование реальных физических процессов.

Впоследствии Ньютон осуждал процедуру отбрасывания слагаемых, содержащих моменты, за ее нестрогость, говоря, что: «*в математике недопустимо пренебрегать даже самыми малыми величинами*». Встав на заманчивый путь анализа бесконечно малых, он не смог определиться с физическим смыслом отбрасываемых в исчислении флюксий моментов, зато, развивая анализ дифференциальных приближений в задачах механики, Ньютон приходит к построению полиномиальных рядов, способных определять функции любой сложности, что и поныне имеет самое прямое отношение к решению прикладных вычислительных задач.

Активно развивавшееся Лейбницем¹⁹ дифференциальное исчисление изначально сводило рассмотрение пространственных процессов к точке и потому теряло возможность построения прямых и полных вычислительных методов для моделирования континуальных явлений и процессов. Обретая значительные успехи в представлении законов аналитической механики, основанных на дифференциальных разложениях скалярных функций в разнообразных системах координат, прикладные исследования не открывают новых путей философского синтеза и единой методологии познания, завещанных античным Платоном, а лишь многократно разделяются в свободном поиске внешне противоречивых естественнонаучных решений (*что Анаксагор называл уничтожением*). В теоретических дискуссиях обнаруживается отторжение философии и метафизики; обособление прикладной гидромеханики от общей физики; во множестве рождаются новые разделы абстрактной математики, не опирающиеся на традиционные прикладные исследования и отрицающие классические и античные задачи натуральной философии.

¹⁹ Лейбниц Готфрид Вильгельм (*Leibniz Gottfried Wilhelm, 1646-1716*) – выдающийся немецкий философ и математик, один из создателей исчисления бесконечно малых, автор закона «*ж и в ы х с и л*», определяющем изменение внутренней кинетической энергии (*замкнутого*) движения жидкости под действием работы внешних сил.

При ослаблении аналитических методов, опытовое познание законов природы, будучи самым достоверным инструментом экспериментальной физики, только подтверждает свою особую практическую значимость. Прямые вычислительные эксперименты в механике сплошных сред занимают промежуточное положение между эмпирическим и аналитическим познанием естественнонаучных законов, и потому обладают особым потенциалом на пути синтеза знаний о внешне противоречивых явлениях и процессах природы.

Достоинством численных схем, основанных на обобщении исчисления флюксий Ньютона, состоит еще и в том, что они идеально соответствуют требованиям для прямого моделирования непрерывных физических процессов на современных цифровых (*дискретных*) ЭВМ. Однако это исчисление ныне не часто используется для получения простых и наглядных решений прикладных задач гидромеханики. Прямые вычислительные эксперименты довольно медленно совершенствуются и недостаточно полно изучаются в современных университетах.

Научная философия и мировоззрение Ньютона не позволили ему продвинуться в технических науках далее простых исследований фундаментальных законов механики, и в зрелом возрасте Ньютон сосредоточил основное внимание на философских вопросах истинно научного, исторического и религиозного знания. Возможно, это явилось следствием понимания недостаточности математических познаний тех лет для углубленного изучения вновь и вновь открывавшихся явлений и законов природы, сдерживаемых в практическом освоении несовершенством технических и вычислительных возможностей для проведения все новых и новых наблюдений и опытов с достаточным уровнем научной и технической обоснованности.

Аналитические модели гидромеханики Леонарда Эйлера

Экспериментальная физика и философское мировоззрение Ньютона вполне могут быть воссозданы в качестве новой аналитической концепции прикладных вычислительных систем для постановки и решения прикладных задач гидромеханики. Возможность сквозной

интерпретации физического смысла на всех этапах применения законов и правил Ньютона, создает основу для автоматического синтеза сложных процедур и адаптивного применения функциональных возможностей искусственного интеллекта, что крайне важно в областях со сложными или переходными режимами моделируемых процессов и явлений в сплошных средах.

**Дифференциальные уравнения
в частных производных**

Леонард Эйлер (*Euler Leonhard*, 1707-1783) – математик, механик и физик. В 1724 году в Базельском университете произнес речь, посвященную сравнению философии Рене Декарта и Исаака Ньютона, и был удостоен степени магистра искусств. Первые научные работы Эйлера посвящались актуальным задачам об изохроне в сопротивляющейся среде и о траекториях, а также исследованиям о наилучшем расположении мачт на корабле. Это определило главные направления его будущих исследований в прикладной гидромеханике и в морском деле. Теоретическая гидродинамика со строгими методами решения задач механики сплошных сред, создавалась Эйлером и Бернулли²⁰, определившими фундаментальные основы современной теоретической и экспериментальной гидромеханики. Эйлеру удалось в строгой математической форме определить все реакции сплошной среды под воздействием точечных векторов сил, и в том числе включить в общую систему уравнений конвективные составляющие скорости течения в ближайшей окрестности малых частиц жидкости.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \cdot \vec{v} = \vec{F} - \frac{\partial}{\partial r}(p/\rho), \quad (1)$$

где все величины измерены в единой абсолютной системе координат:

²⁰ Даниил Бернулли (*Daniel Bernoulli*, 1700-1782) – швейцарский математик, механик и физик, член Петербургской академии наук. Впервые ввел термин «гидромеханика». Уравнения стационарного движения идеальной жидкости опубликованы в 1738 г. в фундаментальном труде «Гидродинамика» (*Записки о силах и движениях в жидкости*).

- \vec{F} [M/c^2] – кинематический вектор внешних сил;
 \vec{v} [M/c] – скорость в точке измерения течения;
 t [c] – отсчет времени;
 $\partial/\partial\vec{r}$ – условное определение пространственной производной;
 p [$\kappa z/(c^2 \cdot M)$] – скалярное давление в точке приложения сил;
 ρ [$\kappa z/M^3$] – плотность жидкости.

Скалярная запись системы уравнений гидродинамики для идеальной невязкой и несжимаемой жидкости, выполняется без привязки к каким-либо размерам элементарного жидкого континуума:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= F_x - \frac{\partial}{\partial x}(p/\rho); \\
 \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= F_y - \frac{\partial}{\partial y}(p/\rho); \\
 \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_z - \frac{\partial}{\partial z}(p/\rho); \\
 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где для полноты добавлено четвертое уравнение неразрывности, которое исключает приток дополнительной жидкости в данной точке.

Эта система дифференциальных уравнений в частных производных может быть приведена к локально-сферическим координатам с помощью преобразований Громека, где кроме поступательных скоростей: v_x, v_y, v_z будут использованы вихревые составляющие течения, пока в виде скоростей вращения элементарной частицы жидкости: $\omega_x, \omega_y, \omega_z$:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v^2/2 + 2(v_z \omega_y - v_y \omega_z) &= F_x - \frac{\partial}{\partial x}(p/\rho); \\
 \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} v^2/2 + 2(v_x \omega_z - v_z \omega_x) &= F_y - \frac{\partial}{\partial y}(p/\rho); \\
 \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} v^2/2 + 2(v_y \omega_x - v_x \omega_y) &= F_z - \frac{\partial}{\partial z}(p/\rho).
 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где: $2\omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}$; $2\omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}$; $2\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$, что удобно

представить в векторном виде как:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{F} - \text{grad} \frac{p}{\rho}, \quad (3')$$

в котором в явном виде участвуют как поступательная скорость движения, так и вращение элементарной частицы жидкости.

Полагая движение жидкости установившимся, интегрирование векторного уравнения Эйлера в форме Громека²¹ приводит к закону Бернулли, справедливому вдоль линии тока в подвижной системе координат, движущейся со скоростью \vec{v}_0 :

$$\rho \frac{v_a^2}{2} - \rho \cdot \vec{v}_0 \vec{v}_a + p = p_\infty, \quad (4)$$

где: \vec{v}_a – абсолютная скорость течения в точке измерения; p и p_∞ – давление в точке измерения и на удалении от источника возмущения.

Моделирование течений с помощью потенциала скорости

При интегрировании уравнений Эйлера (2 и 3) традиционно используется понятие поля размерного скалярного потенциала, введенного в научный оборот Эйлером в 1765 г. как: φ [m^2/c], градиент которого задает вектор скорости:

$$\vec{v} = \text{grad} \varphi = \nabla \varphi,$$

²¹ Громека Ипполит Степанович (1851-1889) русский гидромеханик. С 1873 – работал в Московском, и с 1880 – в Казанском университете (1882 - профессор). Вихревая форма уравнений движения жидкости введена им в 1881 г. Заложил основы современной математической теории капиллярности (1879), винтовых потоков и потоков с поперечной циркуляцией (1882). Исследовал неустановившееся движение вязкой жидкости (1882), распространение ударных волн жидкости в упругих трубках (1883), вихревые движения жидкости на поверхности сферы (1885), ряд случаев равновесия идеального газа и др.

для которого условие неразрывности записывается с помощью оператора: $\nabla = d/d\vec{r}$, также впервые показанного Эйлером в 1767 г.

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

задающего уравнение Лапласа²² для потенциала скорости φ .

Существование поля скалярного потенциала φ , как функционального представления поля течений жидкости, подразумевает, что векторное поле скорости является безвихревым.

Сопряженная с потенциалом функция тока²³ в трехмерном пространстве становится векторной: $\vec{\psi}$, определяющейся с помощью нормалей к линии тока:

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{\psi}.$$

При моделировании поступательного потока \vec{v}_∞ в качестве потенциала употребляется скалярное произведение с вектором \vec{e} [м] единичной длины, задающим направление поступательного потока в пространстве:

$$\begin{aligned} & \rightarrow \quad \rightarrow \\ \varphi_0 &= v_\infty \cdot e. \end{aligned} \quad (5)$$

Градиент этого произведения всегда сводится к вектору \vec{v}_∞ .

В определении пространственного источника выражение для потенциала скорости представляется как:

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r}, \quad (6)$$

²² Лаплас Пьер Симон (*Laplace Pierre Simon, 1749-1827*) – французский астроном, математик и физик, сторонник механистического детерминизма в классической физике, автор функциональных преобразований Лапласа, широко используемых в теории автоматического регулирования и управления подвижными объектами. Современное представление «уравнения Лапласа» показано им в 1796 г.

²³ В двумерном пространстве функция тока доопределяет мнимую часть комплексного потенциала скорости, представляющегося в качестве плоского аналога к изучаемому в этой книге тензорному представлению трехмерных течений.

где: Q [$\text{м}^3/\text{с}$] – задает объемный приток жидкости из точечного источника. Получим радиальное поле скорости течения жидкости, зависящее только от квадрата расстояния до точечного источника:

$$|\vec{v}| = v_r = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2}. \quad (6')$$

Обратим внимание, что полученная модель течения от источника имеет чисто эвристический характер. На практике обычно используются распределенные источники, например, по поверхности тела:

$$\vec{q}_s = q \cdot d\vec{s}, \quad (6'')$$

задающие простой слой (слой источников \vec{q}_s [$\text{м}/\text{с}$]) на поверхности с разрывом поля скорости течения по нормали к элементарной площадке $d\vec{s}$, что удобно использовать при искусственном моделировании условий непротекания через поверхность твердого тела. Для моделирования сжимаемой жидкости можно использовать распределенные по объему источники:

$$\vec{q}_\Omega = \vec{\delta} r^3 / \delta t, \quad (6''')$$

задающие истинное изменение объема элементарной частицы жидкости, при условии, что ее масса: $m = \rho \cdot r^3 = \text{const}$, будет сохраняться за счет соответствующего уменьшения плотности жидкости ρ .

Потенциал для построения поля скорости от пространственного диполя получается в виде поляризованной функции четной степени:

$$\varphi = -\frac{M \cdot \vec{r} \cdot \vec{e}}{4\pi \cdot r^3}, \quad (7)$$

где: M [$\text{м}^3/\text{с}$] – задает величину, а единичный вектор \vec{e} [м] определяет ориентацию центральной оси дипольного момента в пространстве.

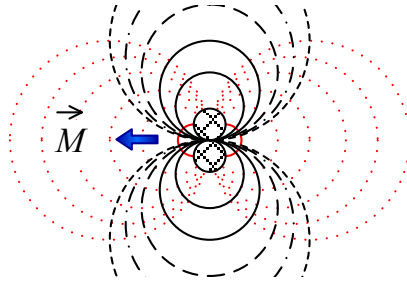


Рис. 1.2. Линии и функции тока для потенциальной модели наведенного поля скорости течения от точечного диполя.

Судя по физической размерности, поляризованные дипольные особенности должны соответствовать скорости течения жидкости, условно распределенной по объему (рис. 1.1).

Скорость течения в наведенном поле диполя уменьшается в кубической зависимости от расстояния до его центра:

$$\vec{v} = -\frac{\vec{M}}{4\pi \cdot \{r^3\}}, \quad (7')$$

где в знаменателе показана условная векторная функция $\{r^3\}$, которая легко моделируется алгоритмически, однако она редко употребляется в общепринятом обиходе теории поля. Наведенное диполем векторное поле наиболее наглядно (рис. 1.2) анализируется в сумме со встречным равномерным поступательным потоком жидкости:

$$\varphi = \vec{v}_\infty \cdot \vec{e} + \frac{M \cdot \vec{r} \cdot \vec{e}}{4\pi \cdot r^3}, \quad (8)$$

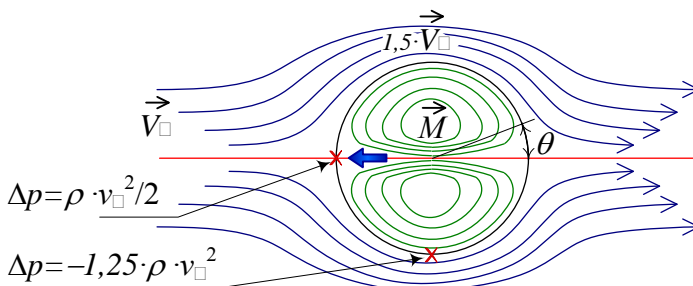


Рис. 1.3. Линии тока и основные характеристики обтекания шара, построенного с использованием модели гидродинамического потенциала.

в котором суммарное векторное поле скорости образует обтекание сферы, внутри которой образуется замкнутое дипольное течение, никогда не пересекающее своей условной сферической границы. На примерах с дымными кольцами можно видеть, что в замкнутом дипольном потоке может сколь угодно долго сохраняться та жидкость, которая была захвачена диполем в момент его зарождения.

Сам же диполь в свободном движении может перетечь в среду с совершенно иными реологическими свойствами, что отразится на его геометрических размерах и кинематических характеристиках внутренних течений, но не приведет к обновлению жидкости, изначально захваченной внутри дипольной сферы.

Бесконечность времени существования таких частиц воодушевила Кельвина²⁴ к предложению «вихревой модели атома», в основе которой использовано открытие Гельмгольца²⁵ о безусловном сохранении единой порожденной вихревой энергии в совершенной жидкости.

Экспериментальная гидромеханика активно использовала вихревые теории для проектирования крыльев и гребных винтов, а также для обоснования вихревой природы сопротивления движению тел в вязкой жидкости - теории вихреобразования пограничного слоя, наиболее полно разработанной Прандтлем²⁶.

²⁴ Томсон, лорд Кельвин Уильям (*Thomson (lord Kelwin) William, 1824-1907*) – английский физик и математик. 1887 г. построил волновую картину за движущимся на поверхности воды точечным источником возмущения, обосновав групповую структуру волн и метод стационарной фазы для корабельного волнообразования. Теорема Кельвина говорит о сохранении интенсивности вихрей в идеальной жидкости, находящейся под действием потенциальных сил. В 1848 г. построил абсолютную шкалу температур Кельвина.

²⁵ Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд (*Helmholtz Hermann Ludwig Ferdinand, 1821-1894*) – немецкий физик, математик, физиолог и психолог. Три теоремы Гельмгольца о вихревых трубках в идеальной жидкости говорят: 1 – интенсивность постоянна по ее длине; 2 – состоит из одних и тех же частиц жидкости; 3 – интенсивность не меняется с течением времени.

²⁶ Людвиг Прандтль (*1875-1953*) – немецкий гидромеханик, создатель научной школы прикладной гидроаэромеханики. Ввел представление о пограничном слое и отрывном течении. Фундаментальные исследования турбулентности (в т.ч. свободной атмосферы), сверхзвукового истечения, теплопередачи в потоке газа.

Искомый радиус сферы будет отмечен в точке на осевой линии, в которой скорость внешнего потока компенсируется встречным течением жидкости из центра диполя: $r_0^3 = \frac{M}{2\pi v_\infty}$.

Объем захваченной жидкости составит: $\Omega = \frac{2}{3} \frac{M}{v_\infty}$.

Можно вынести величину дипольного момента из определения потенциала скорости, используя в качестве определяющего параметра только радиус сферы r_0 :

$$\varphi = \vec{v}_\infty \cdot \vec{r} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_0^3}{r^3} \right).$$

Отсюда получаются выражения для всего поля скорости в сферической системе координат, размеченной в плоскости вектора встречного поступательного потока жидкости и просуммированного с полем течений от свободно движущегося диполя (рис. 1.2):

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right); \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -v_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_0^3}{r^3} \right). \quad (9)$$

Максимальная скорость течения на поверхности сферы ровно в полтора раза превышает скорость набегающего потока.

$$\Delta p = \rho \frac{v_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right). \quad (10)$$

При движении сферы различные участки ее поверхности подвержены значительным перепадам гидродинамического давления (10), изменяющемся от величины скоростного напора от $\Delta p = \rho \cdot v_\infty^2 / 2$ в критических точках, до разрежения на поперечной окружности сферы: $\Delta p = -1,25 \cdot \rho \cdot v_\infty^2 / 2$.

В соответствии с известным парадоксом Эйлера – Д'Аламбера, суммарная сила гидродинамического давления по всей поверхности любого тела всегда полностью скомпенсирована (рис. 1.2). Если же в потоке находится только часть сферы, например, рассеченная надвое

плоской непротекаемой поверхностью, то на выступающей полусфере возникают большие суммарные отрывные усилия, возрастающие пропорционально квадрату скорости набегающего потока. Если полусфера установлена поперек потока, то превышение давления вблизи критической точки, предвосхищая парадокс Даламбера²⁷, не только компенсируется разрежением в расширяющемся потоке на пути к большому диаметру сферы, но и приводит к небольшому растяжению полусфер суммарным потоком с силой:

$$\vec{F} = -\frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{\vec{\Omega}}{8},$$

где: $\vec{\Omega}$ – условно поляризованный объем сферы.

Кинетическая энергия для полного потока жидкости в окрестности сферы может быть получена интегрированием потенциала по ее поверхности [Павленко, 1988]:

$$K_e = \frac{\rho}{2} \iint_S \varphi \cdot \nabla \varphi \cdot \vec{n} \, ds,$$

где: \vec{n} – единичный вектор нормали к элементарной площадке ds на замкнутой поверхности Ω :

$$+ K_e = \frac{\rho v_\infty^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot r_0^3 = \frac{\rho v_\infty^2}{2} \cdot \frac{\Omega}{2}. \quad (11)$$

Это означает, что кроме диполя, в движении участвует дополнительный поток присоединенной массы²⁸ жидкости, составляющей половину объема дипольной сферы. Присоединенная масса должна учитываться во всех инерционных и энергетических зависимостях, связанных с движением любого элементарного жидкого объекта.

²⁷ Даламбер (Д'Аламбер) Жан Лерон (*D'Alembert Jean Le Rond, 1717-1783*) – французский математик и философ. В 1743 г. сформулировал общие правила составления уравнений движения любых материальных систем (*принцип Д'Аламбера*).

²⁸ Присоединенные массы для плоского диска: $\lambda_{11} = 8/3 \cdot \rho \cdot r^3$, что на 27,3% больше, чем у сферы: $\lambda_{11} = 2/3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot r^3$ с таким же радиусом: К диску также добавляются внешние инерционные реакции при его поперечном вращении: $\lambda_{66} = 16/45 \cdot \rho \cdot r^5$.

Особый кинематический объект – диполь, участвующий в свободном движении и состоящий из той же жидкости, что и окружающая сплошная среда, моделируется с помощью функции дипольного момента, величина которого в точности равна полному количеству движения, инициированному диполем во вне и внутри такого элементарного подвижного гидромеханического объекта:

$$\vec{M} = \rho \cdot \Omega \cdot \vec{v}_\infty \quad [\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}]. \quad (12)$$

Модели плоских течений

При плоском обтекании кругового цилиндра, объем присоединенной массы становится равным объему этого цилиндра. В то же время, в отличие от пространственных тел [Войткунский, ..1982], присоединенные массы эллиптического цилиндра: λ_{11} и λ_{22} , зависят только от поперечного размера, а λ_{66} - для осевого вращения эллиптического цилиндра связаны с геометрической суммой полуосей эллипсоида:

$$\lambda_{11} = \rho \cdot \pi \cdot r_x^2; \quad \lambda_{22} = \rho \cdot \pi \cdot r_y^2; \quad \lambda_{66} = \rho \cdot \pi \cdot (r_x^2 + r_y^2)^2 / 8. \quad (13)$$

Если положить одну из осей r_x или r_y равными нулю, то формулы (13) дадут присоединенные массы для обтекания и вращения плоской пластины, не имеющей собственного объема или инерции. Это еще раз указывает на особенности кинематики внешнего воздействия на неразрывную среду, в гидромеханике которой превалирует обобщенная величина возмущаемого потока, в то время как собственно форма возмущающего тела или иного источника – вторичны.

Моделирование плоских течений выполняется в рамках теории функций комплексного переменного, в полной мере реализующей двумерные аналоги трехмерных тензорных операций. Плоские модели позволяют независимо исследовать поверхностные гидродинамические особенности (*распределенные и дискретные вихреисточники и диполи*), моделирующие обтекание плоских контуров с помощью простых и двойных слоев. В трехмерных задачах все процессы взаимодействия элементарных частиц жидкости являются смешанными, и нередко предстают взаимопереходящими между смежными расчет-

ными ячейками на последовательных этапах гидродинамических вычислительных экспериментов.

Плоские комплексные функции представляются в качестве векторов и тензоров, геометрические свойства которых наглядно иллюстрируются с помощью формулы Эйлера:

$$r = x + iy = r \cdot (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = r \cdot e^{i\vartheta},$$

где: $r^2 = x^2 + y^2$, ϑ - угол ориентации r в связанной системе координат.

По формуле Эйлера наглядно показывается, что произведение двух векторов в комплексной плоскости сводится к умножению их модулей и сумме угловых аргументов:

$$r_1 \cdot r_2 = |r_1| \cdot |r_2| \cdot e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}.$$

В двумерном пространстве функция тока доопределяет мнимую часть комплексного потенциала скорости:

$$W(z) = \varphi + i\psi; \quad \frac{dW}{dz} = u + iv,$$

представляющегося в качестве плоского аналога к изучаемому в этой книге тензорному представлению трехмерных течений.

$$\vec{M} = \pi \cdot r^2 \cdot \vec{v}_\infty = \vec{v}_\infty \cdot S \quad \text{плоский диполь};$$

$$\vec{G} = Q + i\vec{A} = 2\pi \cdot \vec{r} \cdot \vec{v}_\infty \quad \text{плоский вихреисточник}.$$

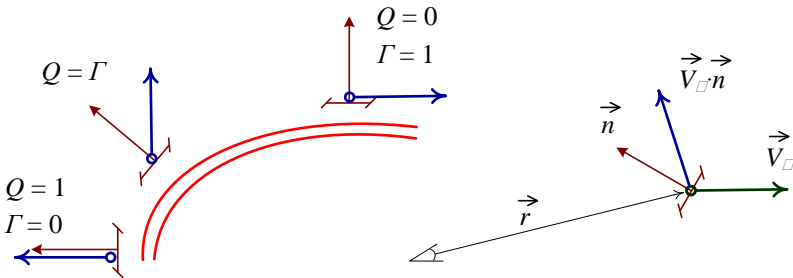


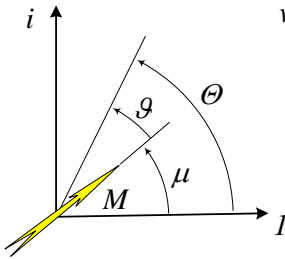
Рис. 1.4. Вихреисточники, моделирующие обтекание плоской фигуры.

- Q - интенсивность распределенных по контуру тела источников;
- $\vec{\Gamma}$ - интенсивность присоединенных вихрей;
- \vec{v}_∞ - скорость набегающего потока;
- \vec{n} - вектор нормали и длины элементарного участка контура;
- r - расчетный радиус из точки измерения наведенной скорости.

При моделировании обтекания плоского тела с использованием суперпозиции поступательного потока и слоя вихреисточников, в комплексной плоскости (рис. 1.3) наглядно представляются свойства перераспределения интенсивностей вдоль обтекаемого контура тела.

По поверхности плоского тела должны быть распределены гидродинамические особенности в виде диполей, вызванные скорости от которых определяются как:

$$\vec{v}(r) = \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}^2}{\pi \cdot |r|^4} = \frac{\vec{M}}{\pi \cdot r^2}.$$



$$v = \frac{m}{\pi \cdot r^2} \cdot e^{i(-M+2\Theta)} = \frac{m}{\pi \cdot r^2} \cdot e^{i(\mu+2\vartheta)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = M + 2\Theta = 2\vartheta - \mu, \\ \text{т.к. } \vartheta = \Theta - M \end{array} \right\}$$

Рис. 1.5. Диполь в плоскости комплексного переменного.

r – геодезическое (кратчайшее по времени действия) расстояние от центра энергетического источника до точки воздействия

Θ – угол для r в абсолютной системе координат;

ϑ – угол для r в относительной системе координат, связанной с диполем;

φ – ориентация результирующего вектора вызванной скорости \vec{v} ;

μ – ориентации диполя \vec{M} в абсолютной системе координат.

Скорость \vec{v} определяется в дуальном базисе (рис. 1.4) по отношению к базису, в котором определен дипольный момент \vec{M} .

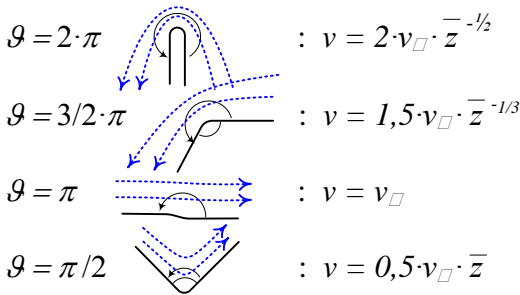
Полное моделирование обтекания плоского тела может быть однозначно представлено с помощью суммы двух интегралов:

1 - от равномерно распределенных по всей поверхности плоского тела диполей: $\vec{v}_S = \int \frac{\vec{m}}{\pi r^2} dS$, где: $\vec{m} = v_i$ – распределенные диполи;

2 - от вихреисточников, образующих простой слой по граничному контуру плоского тела: $\vec{v}_L = \int \frac{\vec{g}}{\pi r} d|L|$; $\vec{g} = i \cdot \frac{\vec{m}}{L}$ - вихреисточники.

Приведенные интегралы дают верные результаты численных расчетов для наведенного вокруг подвижного контура поля скорости при условии, что кривизной элементарного сегмента контура можно пренебречь. На сломках вблизи углов должны располагаться вихреисточники в качестве полноценных гидродинамических особенностей:

$$v = v_{\infty} \frac{\bar{z}^{\eta-1}}{\eta} :$$



где: $\eta = \pi / \vartheta$, ϑ - угол сломки; v - вызванная скорость.

По аналогии можно расширить использование степенных функций:

- для точечного вихря: $\vartheta = \infty \Rightarrow v = \frac{G}{2 \cdot \pi} \cdot \bar{z}^{-1}$;
- для диполя: $\vartheta = -\pi \Rightarrow v = \frac{M}{\pi} \cdot \bar{z}^{-2}$.

В математической модели плоских трохлоидальных волн существует потенциал Лапласа для всего поля течения, и, одновременно, в лагранжевом представлении траекторий малых континуумов обнаруживается реальное вихревое поле для крутого морского волнения:

$$h_w(x, z) = A \cdot e^{-kz + i\sigma x} = e^{-2\pi(z/\tau - x/\lambda)} ;$$

$$V_r = \sigma \cdot r_w ; \quad r_w = A \cdot e^{-kz} = e^{-2\pi \cdot z / \tau} ; \quad k \cdot \lambda = 2\pi ; \quad \sigma \cdot \tau = 2\pi ,$$

где: h_w - ордината волнового профиля; A - амплитуда на поверхности; z, x - глубина и горизонтальное отстояние; k, λ - частота формы и длина волны; $\sigma \cdot \tau = 2\pi$ - частота и период во времени; V_r - модуль скорости орбитального движения; r_w - радиус кругового движения.

Решение для волн Герстнера²⁹ получено в 1802 году, и представляется как удивительное и поныне неочтенное открытие универсальности лагранже-эйлеровых свойств элементарных частиц жидкости, повсеместно используемых в инженерной гидромеханике.

В историческом обзоре классических моделей механики сплошных сред нельзя не упомянуть о Российской школе аэрогидромеханики Н.Е. Жуковского³⁰ [1949], приведшей в 1936 году к постановке проблемы «Обобщения основных уравнений аэродинамики и электродинамики», озвученной в виде предварительного научного сообщения Н.П. Кастериним³¹. В теории Кастерина рассмотрен вопрос ограниченности уравнений Эйлера и Максвелла³² для описания реальных физических полей. Частичное расширение этих линейных уравнений с помощью вихревых теорем Гельмгольца до второго порядка, приводило к унифицированным моделям математической теории поля для задач гидродинамики и электродинамики. Однако, как будет показано в главе III в тензорных функциях, любое уточнение с повышением порядка дифференциальных уравнений гидромеханики нередко приводит к их переопределенности, чрезмерному усложнению или - к формальному вырождению базисных числовых объектов.

²⁹ Франц Иосиф Герстнер (*Franz-Joseph Ritter von Gerstner, 1756-1832*). В 1806 г основал Чешский технический институт в Праге, ставший прототипом для всех технических школ Германии. Теорию трохонидальных волн создал в 1802 г. с целью оптимального проектирования профилей морских дамб и плотин.

³⁰ Жуковский Николай Егорович (*1847-1921*) – основоположник современной гидроаэродинамики, вихревой теории крыла и движителей. Диссертация по «Кинематике жидкого тела» (*1876*). Активно развивал гидромеханические учения Кельвина. Впервые широко использовал функции комплексного переменного в прикладной аэрогидродинамике. В 1906 г. опубликовал «теорему Жуковского» о присоединенных вихрях и гидродинамических реакциях.

«Функция Жуковского»: $z = \zeta + l_1^2/\zeta$, моделирует поле течения для обширного семейства теоретических профилей крыла.

³¹ Кастерин Николай Петрович (*1869-1947*) – профессор Московского университета. Теория Кастерина посвящена рассмотрению с единых позиций математических полей гидроаэродинамики, электромагнетизма и строения атома.

³² Максвелл Джеймс Клерк (*Maxwell James Clerk, 1831-1879*) – английский физик, член Лондонского королевского общества (*1860*), создатель классической теории электромагнитных полей, основанной на свойствах жидкого и упругого эфира.

О постановке и разрешимости задач механики сплошных сред

Вкратце коснемся современных основ и перспектив развития математических моделей механики жидкости, изначально ориентированных на трехмерность пространства и минимум арифметических операций с базовыми расчетными объектами, которые по мере совершенствования архитектуры ЭВМ смогут образовать массивы активных смежных элементов памяти, одновременно взаимодействующих на принципах гибридных аналоговых процессов с глубоко распараллеленными цифровыми потоками числовых операции.

Исторически вычислительные эксперименты в гидромеханике связаны к классической дисциплиной: «Математическая физика», ныне получившей совершенный аппаратно-технический инструментарий в виде мощных вычислителей – цифровых однопроцессорных компьютеров.

Постановка расчетной задачи с помощью разностной аппроксимации традиционных систем дифференциальных уравнений в частных производных, позволяет качественно проверить вычислительные эксперименты в гидромеханике, сопоставляя результаты как с известными аналитическими решениями, так и с натурными экспериментами для аналогичных модельных течений.

Цифровая вычислительная техника (*в отличие от аналоговой*) не позволяет в точности моделировать задачи гидромеханики, так как континуальные явления подменяются ограниченными по объему цифровыми массивами, а непрерывные процессы – простым и многократным последовательным перебором разрозненных параметров пространственных полей, к которым применяются только операции сложения и умножения, и всегда для одних и тех же смежных числовых объектов.

Постановка алгоритмических задач на однопроцессорных компьютерах также значительно снижает потенциальную эффективность

вычислительных моделей гидромеханики, так как все описатели пространственных полей постоянно доставляются на одно-единственное универсальное арифметико-логическое устройство, где реализуются те же операции сложения и умножения, с последующим возвратом результатов в отдаленную память ЭВМ. Столь своеобразное сведение моделируемых процессов к последовательной обработке перебором больших числовых массивов, в принципе, согласуется с технологией использования только одного арифметико-логического устройства ЭВМ.

Числовые операции с существенно отличающимися числовыми величинами, к которым, например, относятся пространственные проекции в абсолютной и в локальных системах отсчета, и особенно, если в основе математической модели лежат интегро-дифференциальные аппроксимирующие разности предельно малой величины, то вычислительные эксперименты теряют разрешимость по чисто техническим причинам.

И все же, интерактивные возможности по контролю и управлению современной вычислительной техникой, ее фантастическая результативность в числовых расчетах, позволяют на новом техническом уровне всесторонне изучить существующие подходы к решению прикладных задач гидромеханики, провести комплексный анализ и экспериментальные проверки методов тензорного представления задач теории поля в классической гидромеханике; сравнить их с хорошо опробованными математическими моделями, с аналитическими и асимптотическими решениями.

В традиционной математической физике [Тихонов, 1966] рассматриваются три основных типа систем дифференциальных уравнений в частных производных, используемых при решении прикладных задач механики сплошных сред. В данном случае это дифференциальные уравнения движения, имеющие второй порядок и определяющие полное решение задач механики. В канонической форме такие уравнения становятся похожими на обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, определяющие свойства их аналити-

ческих решений и дающие им соответствующие названия, как эллиптические, параболические и гиперболические.

$$a_{11} \cdot \Phi_{XX} + 2 \cdot a_{12} \cdot \Phi_{XY} + a_{22} \cdot \Phi_{YY} + C(x, y, \Phi, \Phi_x, \Phi_y) = 0$$

общий интеграл этого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка представляется в виде следующего характеристического уравнения:

$$a_{11} \cdot dy^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot dx \cdot dy + a_{22} \cdot dx^2 = 0.$$

Класс уравнения определяется знаком детерминанта этого обобщенного интеграла второго порядка, получаемого после двойного дифференцирования по одной из переменных:

$$a_{11} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \cdot a_{12} \cdot \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0,$$

отчасти условно воспринимаемого затем, как решение обыкновенного квадратного уравнения:

$$D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}.$$

Если: $D < 0$ – эллиптического типа;

$D > 0$ – гиперболического типа;

$D = 0$ – параболического типа.

Кратко рассмотрим свойства этих классов дифференциальных уравнений в частных производных, приведенных к каноническому виду в применении к простейшим двумерным задачам, так как в трехмерных задачах такие канонические интерпретации, как правило, являются смешанными и потому существенно более сложными для какой бы то ни было интерпретации.

1) $\Phi_{XX} + \Phi_{YY} + k \cdot \Phi + C = 0$. Система дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа описывает кинематику «идеальной» жидкости и чаще всего применяется к решению задач о течениях невязкой и несжимаемой жидкости. В этом классе уравнений известны аналитические (и численные) решения только для установившихся течений жидкости, получаемые исключи-

тельно с помощью неявных численных схем. Характерной особенностью численных расчетов таких течений является то, что любое изменение условий течения, пусть даже в одной из удаленных точек, требует пересчета всего массива данных, определяющего поле течения. Данный класс численных решений до настоящего времени не имеет сколь-нибудь простых и эффективных численных реализаций, особенно, если к уравнениям добавляются вязкостные поправки (*параболичность*), или делаются попытки построить модели нестационарных течений (*гиперболичность*).

Несмотря на то, что системы дифференциальных уравнений эллиптического типа определяют только стационарные течения, и не дают возможности для изучения процессов трансформации или зарождения гидромеханических процессов, их использование относится к наиболее сложному типу физических задач, как в плане их аналитического решения, так и при их асимптотическом упрощении или прямом численном моделировании. Однако именно этот класс уравнений в полной мере определяет законы классической гидродинамики, со всеми их красивыми явлениями и поразительными для теоретической механики парадоксами. Отметим, что реализация решений для течения идеальной жидкости вполне допускает бесконечные напряжения в локальных областях со сложными граничными условиями, что не может реализоваться на практике с реальными жидкостями, всегда обладающими как вязкостью, так и сжимаемостью.

Важнейшим свойством динамики идеальной жидкости является принцип прямолинейности взаимодействия удаленных друг от друга частиц жидкости, при соблюдении закона об изменении интенсивности такого взаимодействия обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Это важнейшее свойство ближнего взаимодействия (*т.е. в пределах допустимости линейных аппроксимаций численных решений*), далее будет использовано при построении обобщающей тензорной теории для реализации вычислительных экспериментов гидромеханики реальной жидкости.

2) $\Phi_{xx} + \kappa \cdot \Phi_y + C = 0$. Система дифференциальных уравнений в частных производных **параболического типа** описывает процессы

типа диффузии или распространения тепловой энергии, где скорость процесса зависит от интенсивности распределенных полей. Это класс наиболее простых динамических уравнений, для которых хорошо отработаны вычислительные задачи в применении к нестационарным процессам, в том числе протекающим в сплошных средах с анизотропными свойствами. Однако и для параболических уравнений обычно не получается наглядных и явных вычислительных схем (даже в одномерных случаях), но зато и не возникает непреодолимых трудностей с вычислительной устойчивостью или аппроксимационной гладкостью пространственных решений.

3) $\Phi_{xv} + \kappa \cdot \Phi + C = 0$ или $\Phi_{xx} - \Phi_{yy} + \kappa \cdot \Phi + C = 0$. Системы дифференциальных уравнений в частных производных **гиперболического типа** обычно описывают процессы в упругих средах. Пожалуй, это наиболее изученные в современной физике явления и гидродинамические процессы, освоенные и широко используемые во многих технических приложениях, связанных с излучением и регистрацией различных нестационарных и волновых процессов, в которых жидкая среда не принимает сколь-нибудь активного участия и практически не изменяет ни своих динамических, ни даже кинематических параметров (*при попытке включить в моделирование собственно течение жидкости или его конвективные составляющие, математическая модель немедленно становится полной, а ее представление в рамках гиперболических численных схем - неразрешимым*).

Благодаря математической простоте и сопутствующей наглядности, свойства волновых процессов наиболее изучены, они легко аппроксимируются как в прямых вычислительных экспериментах, так и в замысловатых аналитических обобщениях.

В отличие от сугубо непериодических явлений чистой гидромеханики, существование волновых процессов легко обнаруживается в самых различных природных и идеальных условиях. Множество технических достижений основывается на слабоэнергетических волновых явлениях, в которых интенсивность динамических процессов не оказывает воздействия на сплошную среду и в то же время их свое-

образное постоянство, позволяет применять квазистационарный аналитический инструментарий.

Это всевозможные световые, электромагнитные и акустические волны, трансформирующиеся на механических и электромагнитных резонаторах и преобразователях. Именно для таких слабоэнергетических процессов найдено множество эмпирических решений и строгих математических соотношений, которые во многих естественных науках превратились почти что в аксиомы. К примеру, принцип Гюйгенса или волновые законы рефракции, интерференции, дифракции и т.п., которые широко анализируются с помощью множества наглядных аналогий, в основном опирающихся на одномерные математические аналитики.

В то же время, зарождение и трансформация волновых процессов выходит за рамки «стационарных» волновых моделей. В этом случае к стандартным моделям добавляются эвристики о групповой структуре волновых пакетов или дисперсионные эмпирики для учета взаимодействия с окружающей средой. Если энергетика локальных волновых воздействий превышает некоторые критические условия существования окружающей среды, то высокочастотные волновые процессы обретают признаки дуальности с корпускулами аналитической механики, а в волнах длинных – снова с чистой гидромеханикой.

Для гиперболических систем уравнений имеется множество теоретических решений и эмпирических зависимостей, - это уравнения, которые легко выводятся из простых предпосылок о динамике взаимодействия между расчетными частицами жидкости, заданными на обычных ячейках сеточной области. Такой способ построения вычислительных решений в гидромеханике наиболее близок к классическому определению «Метода конечного объема».

Методы анализа волновых сигналов хорошо отработаны и давно используются в морской технике, эти же методы легко адаптируются для прямого моделирования длинноволновых процессов в океане и в его прибрежной зоне. В последнем случае, с использованием параметризации уравнений движения и неразрывности, гиперболические

уравнения в потенциалах преобразуются в традиционную явную систему дифференциальных уравнений в частных производных, определяемую через векторное поле скорости и скалярную функцию изменений уровня моря. На этих уравнениях сама природа призывает обрабатывать разнообразие методов вычислительной гидромеханики (*наглядно иллюстрируя пределы применимости гиперболических аппроксимаций, проявляющих нелинейные и дисперсионные особенности распространения волн над круто меняющимся рельефом морского дна*).

В частности, возможность предвычисления скорости движения волновых пакетов, зависящих от реологических свойств жидкой среды, позволяет выполнять геометрический анализ условий распространения волновой энергии с помощью быстро рассчитываемых картин волновых лучей и фронтов. Технические решения для волновой томографии, в акустических приближениях строятся с использованием разделения сигналов во времени, позволяя фиксировать параметры фронтальных и протяженных сигналов, с выделением амплитудно-частотных характеристик реверберации в сплошной среде и отраженных от препятствий опорных импульсов эха.

И все же, *всякое разделение и упрощение физических зависимостей* приводит к частичному сокрытию физической сущности рассматриваемых явлений, и значительно усложняет логику практического применения законов движения при решении прикладных задач механики. На основе уравнений Эйлера получены самые разнообразные решения в области прикладной гидродинамики, однако все они носят частный характер с очень ограниченной областью применимости. С помощью этих же уравнений поставлено множество других неразрешимых теоретических задач механики сплошных сред, что любому исследователю предоставляет широчайший горизонт для поиска новых физических законов и математических решений в гидромеханике реальных жидкостей.

Прямое решение уравнений Эйлера с использованием разностных разложений дифференциальных уравнений движения в частных производных (*по Анаксагору это приводит к выхолащиванию исход-*

ной физической сути), обычно делается при допущениях об особых свойствах пространственных систем отсчета. В подходе Эйлера пространственная система координат считается неподвижной, что приводит к поступательным и конвективным полям скоростей и ускорений в жидкости, движущейся через инородную и жесткую расчетную сетку. В подходе Лагранжа рассматриваются поступательные движения отдельно взятых частиц жидкости, определяемых в рамках аналитической динамики свободных корпускул, что на практике сводится к неявным схемам анализа виртуальных движений для множества пространственных точек, и – к потребности в неоправданно огромных вычислительных ресурсах для работы с гигантскими и плохо обусловленными матрицами.

Идея комплексного решения поставленной задачи состоит в связывании с каждой из частиц собственного локального базиса, внутри которого крупные частицы жидкости могут деформироваться и даже образовывать внутренние замкнутые течения жидкости. Соответствующие методы решения прикладных задач гидромеханики опираются на интерпретацию свойств течения по Эйлеру и по Лагранжу совместно и в качестве единого процесса, лишь условно разделяемого по этапам проведения вычислительного эксперимента на алгоритмическом уровне. К таким методам относятся методы «Маркеров и ячеек», «Крупных частиц жидкости» и другие прямые построения численных моделей в разностях, которые в последнее время стали объединять единым термином, как «Метод конечного объема». Идеология и техническая реализация такого обобщенного подхода наталкивается как на серьезные математические трудности, так и на трудности при реализации конкретного программного обеспечения ЭВМ для проведения реальных прикладных вычислительных экспериментов.

Мир компьютерных моделей механики сплошных сред

Мир компьютерных моделей не совсем однозначно отображается на современную аналитическую математику, представляющую законы движения жидкости в форме систем дифференциальных урав-

нений в частных производных. Нельзя ли конечноразностные объекты и операции, присущие цифровым ЭВМ, использовать как независимый и вполне самостоятельный математический инструмент прикладной гидромеханики?

Наиболее яркой публикацией о методах вычислительной гидромеханики явилась изданная в 1982 году книга О.М. Белоцерковского и Ю.М. Давыдова «Метод крупных частиц в газовой динамике», содержащей наиболее выразительное и точное описание вычислительных экспериментов в гидромеханике с использованием Лагранже-Эйлеровых подходов. В этой же книге выполнен анализ и обоснование физической сути дифференциальных приближений, которые используются в вычислительных моделях гидромеханики при замене классических дифференциальных уравнений в частных производных их конечно-разностными аппроксимациями.

В 1990 году вышел двухтомник Д. Андерсона, Дж. Таннехилла и Р. Плетчера «Вычислительная гидромеханика и теплообмен», в которой были обобщены и систематизированы многие вычислительные модели прикладной гидромеханики. В этой книге закрепился применяющийся термин: «Метод конечного объема», который также определяет технологии, достаточно близкие по смыслу к тензорным построениям вычислительных экспериментов, но, к сожалению, это справедливо только в отношении к постановочной части приводимых в двухтомнике гидромеханических задач, так как в целом в «методе конечного объема» главное внимание уделяется разностным аппроксимациям традиционных систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Поэтому, в основе настоящей работы справедливее признать основные идеи и вычислительные технологии метода «Крупных частиц жидкости», тем более, что тензорные формализации уравнений аэрогидромеханики впервые обрабатывались и проверялись с помощью свертывания к тензорной форме больших систем разностных уравнений именно этого метода [1982].

Пионерскими исследованиями в изучаемом направлении считаются вычислительные эксперименты в аэрогидромеханике Лос-

Аламосской лаборатории (США), открывшими новое научное направление по использованию свободных лагранжевых частиц для моделирования сложных течений и опубликованными Харлоу в 1955 году под определением: PIC (Particle in Cell) – метода частиц в ячейках. Метод PIC изначально был ориентирован на использование огромных вычислительных ресурсов, так как уравнения гидромеханики в форме Лагранже сводятся к неявным расчетным схемам, решаемым с использованием матричной алгебры для согласования неопределенных параметров движения и внутреннего состояния для каждой из условно свободных корпускул в потоке жидкости. Таких точечных частиц должно быть достаточно много в каждой из анализируемых расчетных ячеек, в том числе и в зонах течения с сильными разрежениями, что и обуславливало потребность в огромных суперкомпьютерных ресурсах.

Другой подход к пристальному изучению вычислительных экспериментов обусловлен признанием того факта, что аппроксимационные свойства конечных разностей представляют из себя нечто сильно отличающееся от исходной математической модели в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных. Проработка обратных дифференциальных приближений также аккуратно выполнена Ю.М. Давыдовым [1981] с целью обоснования корректности постановки гидродинамической задачи, точности ее пространственных аппроксимаций, выявления схемной вязкости и устойчивости метода «Крупных частиц жидкости». Им было показано присутствие схемной вязкости в линейных разностных аппроксимациях, в точности соответствующей физическим свойствам ньютоновой вязкости у реальных жидкостей, величина которой связана с шагом пространственной сетки, и отчасти с расчетным шагом во времени.

Важным следствием анализа дифференциальных приближений для разностных схем вычислительной гидромеханики, стало признание факта невозможности качественного улучшения точности расчетов с помощью повышения порядка разностных схем. А именно, в схемах второго порядка формально блокируются эффекты схемной вязкости, и одновременно усиливаются искусственные добавки более

высокого - третьего порядка, от которых аппроксимирующие функции становятся осциллирующими, и сильно возбуждаются в зонах течения жидкости с большими градиентами.

Устойчивость в задачах гидромеханики оценивается как возможность существования интеграла для дифференциального уравнения второго порядка по скалярному аргументу - времени, получающегося в Лагранже-Эйлеровом подходе в результате двух последовательных этапов интегрирования уравнений движения первого порядка. Обычно, для достижения устойчивости численного моделирования, достаточно выбора такого расчетного шага по времени, чтобы элементарные частицы жидкости и смежные с ними ячейки не изменяли характера деформации и режима движения жидкости в течение одного расчетного этапа.

В результате были получены обоснования области применимости численных методов для традиционных математических моделей гидромеханики на неподвижных (*и равномерных*) Эйлеровых сетках, и что более важно, изучены критерии существования и устойчивости вычислительных процессов, выявлены математические модели, непригодные для их реализации с использованием цифровых ЭВМ.

Как и ожидалось, вычислительная математика и гидромеханика явили новое воплощение гармонии в природе, совместный Лагранжев и Эйлеров подход для непосредственного и прямого моделирования большого класса законов гидромеханики и явлений природы, «не терпящей пустоты». Это воссоздало целостное представление о физике моделируемых гидродинамических процессов, на этот раз с помощью прямых численных методов на дискретных сеточных аппроксимациях современных цифровых ЭВМ.

А именно, численные схемы метода крупных частиц (*конечного объема*), возродили средневековые представления Исаака Ньютона о дуальности свойств жидкости, использованные им и Робертом Гуком при определении вязких и упругих свойств реальной жидкости более трехсот лет назад.



Тензорная формализация объектов и операций вычислительной гидромеханики

Используемое для представления вычислительной модели тензорное исчисление традиционно применяется в гидромеханике с целью анализа состояния малых континуумов жидкости. В «Механике деформируемых сред» *Арнольда Зоммерфельда* [1954] довольно полно определены свойства тензоров деформации, конвективных скоростей и вязких напряжений в жидкости. В книге итальянских ученых *Дж. Астариты и Дж. Маруччи* [1978] «Основы гидромеханики не-ньютоновских жидкостей» сводятся воедино существенно различные тензорные представления, накопившиеся в гидромеханике, теории упругости и других разделах механики сплошных сред.

Тензорное исчисление [Мак-Коннел, 1963, Сокольников, 1971], являясь пространственным расширением конечно-разностной формы ньютоновских дифференциалов стало своеобразным упрощением формы записи традиционных численных схем для решения прикладных задач механики сплошных сред.

В «Прикладной механике сплошных сред» под редакцией *В.В. Селиванова* [1998], тензорное исчисление активно используется для анализа численных моделей Лагранже-Эйлера подхода в аэрогидродинамических вычислительных экспериментах.

В настоящей работе не ставилось целей существенно более глубокого изучения тензорного анализа в задачах гидромеханики в целом. Активно используется только та часть тензорной математики, которая необходима для представления численных схем, числовых объектов и ключевых операций в прямых вычислительных экспериментах классической гидромеханики.

Конкретизация задачи в сторону изучения чисто кинематических процессов в динамике реальной жидкости необходима для достижения сквозной физической интерпретации всех вычислительных объектов и операций, достаточной для повсеместного контроля и своевременного применения гибридных подмен или эмпирических

уточнений в подобластях с явно вырождающимися критериями моделирования.

Одномерные скаляры

Скалярные величины – числа, могут быть расширительно интерпретированы в качестве направленных в строго определенную сторону отрезков (рис. 1.5) на одномерной геометрической оси X , начальный отсчет на которой может быть назван условно абсолютным нулем – 0 . Такое представление скаляров всегда присутствует при описании проекций на базисные оси координат для векторных и тензорных величин.

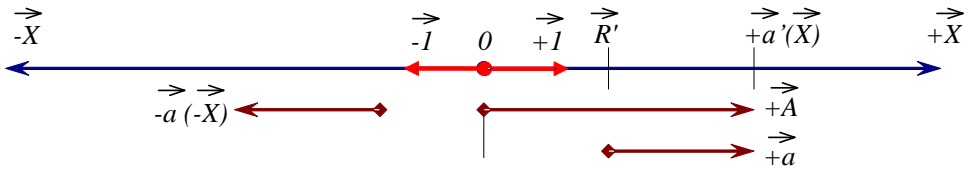


Рис. 1.6. Условная отметка скалярных величин на одномерной оси координат.

Масштаб одномерных величин определяется особыми единичными векторами – ортами, отмечаемыми на координатной оси значениями $\vec{\pm 1}$. Это приводит к Ньютонскому определению числа, как «отношения длины любого отрезка к отрезку, принятому за единицу» [Математика, 2003, с.732] (*во сколько раз проекция векторного отрезка отлична от единичного орта*). На такой скалярной оси может быть поставлена особая метка $-\vec{R}'$, которая будет служить смещенным основанием для новой (локальной) системы отсчета.

Абсолютные (условно длинные) отсчеты от общего нуля на скалярной оси будем обозначать прописными буквами $-\vec{A}$, а локальные (короткие), отмеренные от смещенной метки $-\vec{R}'$, строчными буквами $-\vec{a}$.

Для перевода скалярной величины из локальной системы отсчета $-\vec{R}'$ в абсолютную $-\vec{X}$, необходимо сложить локальную длину отрезка $-\vec{a}$, с величиной начального отсчета смещенной (относительной) метки $-\vec{R}'$:

$$\vec{A} = \vec{R}' + \vec{a}.$$



Все слагаемые величины должны иметь одинаковые физические размерности. Операция умножения (*кратности*) с величиной \vec{a} возможна только в случае использования безразмерного параметра, который влияет на изменение длины (*деформацию*) этого локального вектора – \vec{a} . Далее, в векторном исчислении будет показано, что в операциях умножения могут участвовать размерные физические величины, но только если их компоненты измерены в связанном (*дуальном*) координатном базисе.

Для одномерных, «условно векторных» величин нет необходимости вводить особые правила для координатных преобразований, достаточно использования простых масштабных множителей, связанных с пропорциональными (*линейными*) пересчетами в окрестности точки \vec{R} . Это означает, что величины локальных и абсолютных координатных отсчетов с точностью до произвольного безразмерного множителя могут считаться приведенными к единой координатной системе.

Векторы

В отличие от одномерного случая, локальный базис в пространстве, также как и все векторные величины, характеризуется не только масштабными множителями относительно единичных ортов (*модулями*), но и ориентацией (*направлением*) в пространстве его координатных осей.

Формальные описания и математические действия с векторными объектами в трехмерном пространстве уже не требуют искусственных условностей.

В качестве абсолютной системы координат выбирается симплекс координатных осей, соответствующий размерности используемого пространства, при этом все базисные оси должны быть взаимно перпендикулярны (*ортогональны*), иметь одинаковые физические размерности и равные единичные меры (*ортонормированы*). Удовлетворяющие таким требованиям системы координат называют ортогональными и ортонормированными или – декартовыми. В декартовой системе координат векторные величины единственным образом пред-

ставляются в виде совокупности числовых величин, образованных проекциями на координатные направления (рис. 1.6).

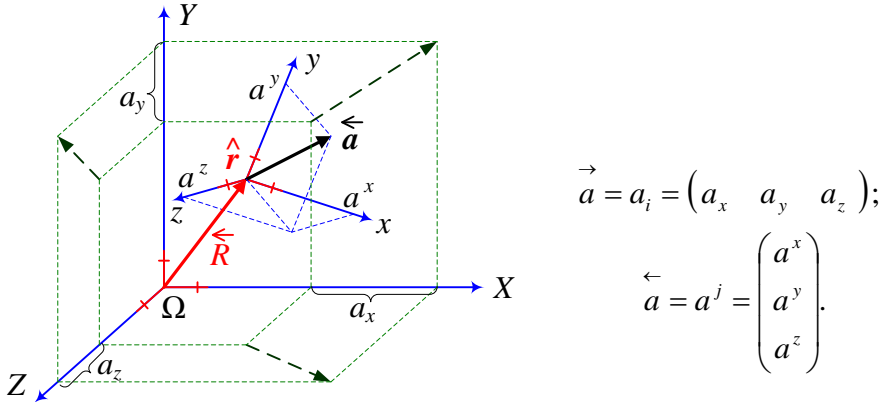


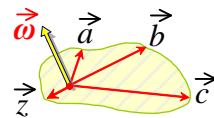
Рис. 1.7. Ковариантные a_i и контравариантные a^j компоненты вектора.

Геометрическое и матричное представление числового объекта в проекциях глобальной и связанной систем координат.

На рисунке 1.6 показан трехмерный базис декартовой системы координат, представленный в виде простейшего (*необходимого и достаточного*) симплекса координатных осей, в котором любой вектор $\{ \vec{R} \}$ единственным образом представляется в виде координатных проекций на ортогональные оси $\{ X_i, Y_j, Z_k \}$, масштаб величин которых определяется мерой единичных векторов – *ортов*.

Местная система координат математически формализуется в виде локального базиса, образуемого некопланарными³³ векторами с условно единичной длиной: $\hat{r} = \vec{r}_i = r_{ij}$, который основан на смежных узлах расчетной сетки, образующих базисные векторы элементарного пространственного симплекса, в данном случае - в абсолютной системе координат. Новый пространственный объект удобно

³³ Компланарные векторы взаимно перпендикулярны одному общему вектору нормали $\vec{\omega}$, задающему ориентацию плоскости, в которой лежат все компланарные векторы. Тензорный базис на таких векторах называется вырожденным, так как его объем равен нулю, что и делает невозможным взаимно обратные преобразования векторов.





называть геометрическим или базисным тензором 2-го ранга, или просто – тензором.

В локальном координатном пространстве векторные объекты определяют не только геометрические свойства связанного базиса, но и задают характеристики сплошной среды, локализованной внутри и в ближайшей окрестности координатного трехгранника.

При определении векторных объектов, следует различать векторы, связанные с некоторой точкой пространства (точкой приложения), векторы, приложенные вдоль некоторой прямой, но не обладающие определенной точкой приложения, и, наконец, векторы, не связанные с определенной точкой приложения. Векторы, принадлежащие к первой группе, называются приложенными, или – *определенными*, ко второй – *скользящими* и к третьей³⁴ – *свободными*.

Операция сложения векторов может применяться только к числовым объектам, имеющим строго одинаковые физические размерности и при условии их определения строго в одном и том же координатном базисе. При соблюдении этих условий операция сложения применяется поэлементно к каждому векторному компоненту.

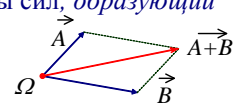
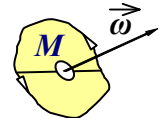
$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z).$$

К примеру, сложение определенных векторов сил приводит к вычислению равнодействующей силы³⁵, приложенной к этой же точке; сложение скоростей точки позволяет найти результирующий вектор скорости движения этой точки.

Более сложны те случаи, когда определенные векторы имеют различные точки приложения, а скользящие векторы приложены вдоль непересекающихся прямых. Для разрешения неопределенно-

³⁴ Примерами определенных векторов являются скорости и ускорения материальной точки, а так же вектор силы приложенной к точке. Примерами скользящих векторов являются вектор силы, действующей на абсолютно твердое тело, и вектор его угловой скорости. Примером свободного вектора можно считать вектор момента пары сил, образующий свободную ось вращений $\vec{\omega}$.

³⁵ Операция сложения определенных векторов.



стей здесь могут быть дополнительно использованы модельные свойства сплошной среды, заполняющей пространство между разнесенными векторами.

Умножение векторов на скалярное число выполняется путем поэлементного перемножения векторных компонент с этим числом.

$$\alpha \cdot \vec{A} = (\alpha \cdot A_x, \alpha \cdot A_y, \alpha \cdot A_z);$$

$$\beta \cdot \hat{p} = \beta \cdot p_{ij}.$$

По физическому смыслу такое умножение можно определить как изменение масштаба объектов с векторными свойствами, при котором никак не изменяются пропорциональность векторных проекций, не изменяется ориентация векторов и базисных осей геометрических тензоров в пространстве.

Произведение векторов происходит в соответствии с правилами преобразования компонент базисных тензоров³⁶, определяющих особенности использования пространственных координатных систем.

Особенности координатных преобразований в дуальных базисах

Для двухстороннего преобразования векторных координат между локальным и абсолютным базисами, вводится понятие взаимного или контравариантного тензора [Кильчевский, 1954, с.35], обладающего свойствами дуального или сопряженного базиса [Астарита, 1978]. Поясним, что в матричном представлении такие тензоры являются взаимно обратными: $\check{r} = \hat{r}^{-1}$.

1. Объем координатного трехгранника вычисляется с помощью смешанного (векторно-скалярного) произведения базисных векторов:

$$\Omega = \vec{r}_x \cdot (\vec{r}_y \times \vec{r}_z),$$

³⁶ В тензорном исчислении используется понятие метрического тензора g_{ij} , оперирующего единичными ортами e_{ij} локального базиса. В операции умножения такой тензор g_{ij} , позволяет формально поднимать или опускать индексы (*жонглировать ими*) без изменения физической и геометрической меры числовых объектов. В настоящей работе все числовые объекты не отрываются от их физических размерностей, и потому жонглирование индексами, так же как и использование безразмерных числовых величин крайне ограничено.

что в точности соответствует правилу Саррюса³⁷ для вычисления определителя матрицы косоугольного тензора $\hat{\mathbf{r}}$:

$$\Omega = |\hat{\mathbf{r}}| = \begin{aligned} & r_{xx} \cdot (r_{yy} \cdot r_{zz} - r_{yz} \cdot r_{zy}) + \\ & + r_{xy} \cdot (r_{yz} \cdot r_{zx} - r_{yx} \cdot r_{zz}) + \\ & + r_{xz} \cdot (r_{yx} \cdot r_{zy} - r_{yy} \cdot r_{zx}) , \end{aligned}$$

все компоненты которого определены в проекциях на координатные оси абсолютной системы координат.

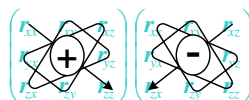
2. Преобразование для получения контравариантных компонент можно применить к базисным векторам ковариантного тензора:

$$\overleftarrow{r}^x = \frac{\overrightarrow{r}_y \times \overrightarrow{r}_z}{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \cdot \begin{pmatrix} r_{yy} \cdot r_{zz} - r_{yz} \cdot r_{zy} \\ r_{yz} \cdot r_{zx} - r_{yx} \cdot r_{zz} \\ r_{yx} \cdot r_{zy} - r_{yy} \cdot r_{zx} \end{pmatrix}; \quad \overleftarrow{r}^y = \frac{\overrightarrow{r}_z \times \overrightarrow{r}_x}{\Omega}; \quad \overleftarrow{r}^z = \frac{\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y}{\Omega}.$$

Контравариантные базисные векторы последовательно выстраиваются в качестве столбцов³⁸ соответствующей матрицы-тензора с проекциями компонент этих векторов в глобальной системе отсчета, как бы собираемой из элементов с транспонированными индексами, подтверждая тем самым правило для обращения простых матриц с размерностью (3×3), например, с использованием алгоритма алгебраических дополнений.

Это означает, что принятое правило тензорного построения локальных базисов, несмотря на произвольность их деформаций, позволяет точное и однозначное взаимное преобразование координатных отсчетов. Пары дуальных тензоров для взаимных преобразований между абсолютной и локальной системами координат, сами являются

³⁷ Правило треугольников для вычисления определителя матрицы:



³⁸ Матричное правило о векторе-строке в абсолютной системе отсчета и векторе-столбце – в локальной, используется только в приложении к векторам. В дальнейшем трансформируемые векторы и тензоры в операциях произведения будут ставиться слева, а базисные или трансформирующие тензоры – справа.

взаимно обратными, а их смешанные представления³⁹ – приводят к единичным тензорам:

$$\hat{r} \cdot \overset{\vee}{r} = \overset{\times}{I}.$$

Отметим также, что аналогичное обращение ортогональных и ортонормированных (*метрических*) тензоров должно соответствовать простому транспонированию их матриц.

Геометрический смысл контравариантного тензора представляется как вычисление проекций единичных ортов абсолютной системы отсчета в координатной системе косоугольного локального базиса. В полной записи такое преобразование выражается как:

$$\overset{\vee}{r} = \begin{pmatrix} \overset{\leftarrow}{r}^x \\ \overset{\leftarrow}{r}^y \\ \overset{\leftarrow}{r}^z \end{pmatrix} = \hat{r} \cdot \overset{\times}{I} = \frac{1}{\Omega} \cdot \begin{pmatrix} r_{yy} \cdot r_{zz} - r_{yz} \cdot r_{zy} & r_{zy} \cdot r_{xz} - r_{zz} \cdot r_{xy} & r_{xy} \cdot r_{yz} - r_{xz} \cdot r_{yy} \\ r_{yz} \cdot r_{zx} - r_{yx} \cdot r_{zz} & r_{zz} \cdot r_{xx} - r_{zx} \cdot r_{xz} & r_{xz} \cdot r_{yx} - r_{xx} \cdot r_{yz} \\ r_{yx} \cdot r_{zy} - r_{yy} \cdot r_{zx} & r_{zx} \cdot r_{xy} - r_{zy} \cdot r_{xx} & r_{xx} \cdot r_{yy} - r_{xy} \cdot r_{yx} \end{pmatrix}.$$

При геометрической интерпретации локального (*контравариантного*) определения векторных проекций необходимо учитывать, что в локальной системе координат действует своя единичная мера, относительно которой должны вычисляться координатные отсчеты в таком внутреннем локальном базисе.

Пересчет векторных проекций между связанными системами координат выполняется с помощью операции произведения⁴⁰ с дуальными тензорами. В индексной форме операция полного тензорного умножения $\vec{a} = \overset{\leftarrow}{a} \cdot \hat{r}$ записывается в следующей форме $a_i = a^j \cdot r_{ji}$, где индексы, стоящие при сомножителях на разных уровнях, называ-

³⁹ Индексы смешанных тензоров стоят на разных уровнях. Обычно это означает, что тензорные объекты из локального базиса частично проектируются на абсолютную систему координат, или – наоборот. При описании внутренних свойств сплошной среды смешанные тензоры, как правило, задают плотность распределенных физических величин, не зависящих от метрики локального пространства.

⁴⁰ Для перестройки определенного (*не свободного*) вектора из локальной системы отсчета в абсолютную, необходимо добавлять координаты опорной точки для пространственного местоположения самого локального базиса: $\vec{A} = \vec{R} + \overset{\leftarrow}{a} \cdot \hat{r}$.

ют **немыми**, а их появление в операциях произведения подразумевает суммирование векторных компонент по этому индексу:

$$\vec{a} = a_j = \overleftarrow{a} \cdot \vec{r} = a^i \cdot r_{ij} = \sum_i (a^i \cdot r_{ij}),$$

что в матричном (*покомпонентном*) представлении записывается следующим образом:

$$a_j = a^i \cdot r_{ij} = (a^x \ a^y \ a^z) \cdot \begin{pmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^x \cdot r_{xx} + a^y \cdot r_{yx} + a^z \cdot r_{zx} \\ a^x \cdot r_{xy} + a^y \cdot r_{yy} + a^z \cdot r_{zy} \\ a^x \cdot r_{xz} + a^y \cdot r_{yz} + a^z \cdot r_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Как видно, при таком умножении уже не действует правило о выборе размерности результирующей матрицы, так как в результате преобразования вектора-строки из локального базиса, в абсолютной системе отсчетов получается вектор-столбец, и наоборот, вектор-столбец переходит в вектор-строку при преобразовании из абсолютной системы отсчета к локальному базису:

$$\overleftarrow{a} = a^i = \overrightarrow{r} \cdot \vec{a} = r^{ij} \cdot a_j = \begin{pmatrix} r^{xx} & r^{yx} & r^{zx} \\ r^{xy} & r^{yy} & r^{zy} \\ r^{xz} & r^{yz} & r^{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \rightarrow (a^x \ a^y \ a^z).$$

В матричных преобразованиях с тензорами можно использовать условные правила о представлении свободных и базисных векторов в абсолютной системе отсчета в виде матриц-строк с размерностью (1×3), а контравариантных векторов - в виде матриц-столбцов (3×1).

Аналогичные правила можно относить и к построению матриц для традиционных классов тензоров, в которых собственные векторы локального базиса, при их отображении на абсолютную систему координат, располагаются по строкам, а по столбцам – в обратной (дуальной) системе отсчета. В задачах механики сплошных сред столь же наглядная матричная компоновка трехмерных тензоров по правилам тензорной алгебры становится принципиально невозможной, так как в случае смешанных тензоров отсутствует соответствующее формальное представление для строк и столбцов матрицы.

Сами по себе операции векторно-матричных умножений не коммутативны. В индексной форме операция полного тензорного умножения: $\vec{a} = \vec{a} \cdot \hat{r}$ записывается в следующей форме:

$$a_i = \sum_j (a_j \cdot r_{ji}) = a^x \cdot r_{xi} + a^y \cdot r_{yi} + a^z \cdot r_{zi}. \quad (9')$$

Умножение может выполняться с повышением или понижением ранга результирующего произведения.

Так, например, в результате умножения вектора на тензор: $r_{ij} \cdot a_k$ формируется вырожденный тензор третьего ранга q_{ijk} - с тремя индексами. Такие операции очень трудно истолковывать с позиций законов механики еще и потому, что в результате произведения получается существенно более сложный физический объект, для полного определения которого в простой операции умножения заведомо недостаточно информации, содержащейся в сомножителях более низкого ранга. Соответственно, такие операции не имеют особого физического смысла⁴¹, и никаких формальных обозначений для тензоров третьего ранга в этой книге не предусматривается.

Умножение с понижением ранга тензора, типа скалярного произведения векторов: $q = a_j \cdot b^i$ (проекция одного вектора на другой) обычно используется при анализе свойств вычислительных объектов⁴². Здесь и далее, все произведения пространственных числовых объектов построены так, чтобы ранг результата не изменялся.

Это означает, что в операциях произведения участвуют только числовые объекты с компонентами из разных (дуальных) базисов.

⁴¹ Целесообразно запрещение неконтролируемого повышения ранга тензора при формировании операций с элементарными вычислительными объектами, а также строгое ограничение использования подобных операций умножения даже в качестве промежуточного результата алгебраических преобразований.

⁴² Такие операции также ограничены к использованию еще и потому, что понижение ранга результата означает потерю информации об исходных векторных объектах.

Часть 2

Логика создания вычислительных моделей и компьютерных алгоритмов

«Так как древние, по словам Паппуса⁴³, придавали большое значение механике при изучении природы, то новейшие авторы, отбросив субстанции и скрытые свойства, стараются подчинить явления природы законам математики.

В этом сочинении имеется в виду тщательное развитие приложений математики к физике.

Древние рассматривали механику двояко: как рациональную (умозрительную), развиваемую точными доказательствами, и как практическую. К практической механике относятся все ремесла и производства, именуемые механическими, от которых и получила свое название и сама механика.

... и если кто-нибудь смог исполнить свое изделие с совершеннейшей точностью, то был бы наилучшим из всех механиков».

Исаак Ньютон⁴⁴

Следуя обязательному правилу о сквозной механико-геометрической интерпретации всех числовых объектов и операций, выполняемых на ЭВМ при проведении вычислительного эксперимента, можно сформулировать основные требования, которые должны соблюдаться на этапе проектирования новых алгоритмов и программных комплексов для проведения прямого моделирования прикладных задач механики сплошных сред:

⁴³ Папп Александрийский (*Pappus*, 2-я пол. III в.) – математик и механик эпохи позднего эллинизма, автор сочинения "Synagoge" ([Математическое] собрание).

⁴⁴ Вступительные фразы из предисловия Исаака Ньютона к первому изданию «Математических начал натуральной философии» [1936], с. 1.

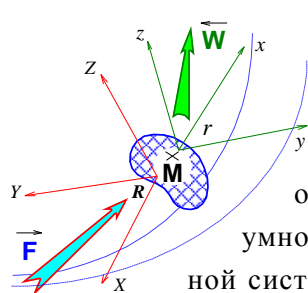
1) Элементарные объекты гидромеханики должны определяться только в размерной форме;

2) Вычислительные операции должны быть определены в строгой взаимосвязи физических свойств жидкости и законов механики, которые могут применяться в условиях автоматического пересчета физических размерностей и преобразования координатных величин;

3) Свойства вычислительных операций и элементарных числовых объектов определяются как в единой – абсолютной системе координат, так и в локальных - дуальных базисах, связанных с конкретными частицами жидкости.

Формально, на разделенных во времени этапах вычислительного эксперимента в механике сплошных сред, может быть введен своеобразный *векторный аналог Закона Ньютона*, определенного с помощью тензорной операции умножения, где внешняя сила \mathbf{F} задается в абсолютной системе координат, а реакция \mathbf{W} – уже в локальном базисе, вмороженном в элементарную деформируемую частицу жидкости. В этом случае масса жидкой частицы \mathbf{M} будет не только аккумулировать энергию поступательного движения, но также определит инерционные свойства деформационного и вращательного движения жидкости в пределах этой элементарной частицы жидкости.

С позиций классической механики такая формализация означает лишь тот факт, что на разных этапах вычислений используются не суммарные внешние воздействия на малые подвижные и деформируемые частицы жидкости, а лишь те, которые доступны в численных схемах разделения движения по физическим процессам, определяемым при постановке вычислительной задачи в рамках строго линейных аппроксимационных законов. В данном случае подразумевается, что на первом этапе дифференцирование первого порядка для векторов смещений жидких частиц переопределяет их собственную кинематику, тогда аналогичное дифференцирование скоростей их перемещения позволит учесть инерционные (силовые) свойства взаимодействия между исходными частицами жидкости. Если в таком двой-



ном дифференцировании поле скорости вычисляется по фиксированным узлам эйлеровой координатной сетки и соотносится к центрам масс крупных частиц жидкости, то инерционные характеристики движения этих частиц будут снова сведены к тем же узлам, но сильно сместившимся за расчетный интервал времени.

Вычислительные модели гидромеханики в каноническом представлении удобно формализовать с помощью линейных аппроксимирующих функций, точные физические величины которых определяются на разреженных узлах конечно-разностной сетки, охватывающей ограниченную область течения жидкости. Аналитические методы времен Исаака Ньютона позволяли в разностной форме выполнить постановку и прямое численное решение многих интерполяционно-динамических задач. Однако, несмотря на эффективность и универсальность ньютоновских численных решений, это направление математических исследований сдерживалось необходимостью применения сложных численно-логических схем (*алгоритмов*) и трудоемкостью прикладных вычислительных задач.

Современная компьютерная логика позволяет обобщить разностные методы решения задач гидромеханики с помощью методов функционального программирования, традиционно используемого в системах искусственного интеллекта.

Для явного контроля физических процессов законы движения жидкости будут изначально представляться в жестких логических операциях трехмерной тензорной арифметики, оперирующих конкретными параметрами течения в размерном виде. Трехмерный тензорный вычислительный аппарат формализует описание явлений гидромеханики именно для того случая, когда непрерывные функции определяются с помощью ограниченного количества не очень близко расположенных аппроксимирующих пространственно-временных точек.

Важным преимуществом такой постановки вычислительного эксперимента в гидромеханике явилась возможность более глубокого понимания многих законов и явлений, сопровождающих течение реальных жидкостей. Разработка же формализованных правил для ком-

пьютерной реализации вычислительных экспериментов в тензорной постановке сама по себе составила интереснейшую задачу, которая позволила вновь коснуться как математических основ гидромеханики, так и фундаментальных понятий физики в целом. Оказалось, что тензорная арифметика и логика вычислительных операций позволяют проследить физические аналогии всех вычислительных операций и построить комплекс алгоритмических объектов наиболее полно определяющих суть и форму вычислительных процессов при моделировании физических явлений и механики жидкости.

Построение программной среды для проведения вычислительного эксперимента

При построении новых математических операций и вычислительных объектов не будет использовано никаких новых гипотез об относительности систем отсчета и неопределенности внутренних свойств жидкости. Главная или общая система координат является всегда ортогональной и ортонормированной. Отсчеты времени всегда задаются скалярными величинами и используются только для фиксации во времени всего вычислительного процесса, и лишь при особых оговорках, уточненного состояния его отдельных подобластей или жидких частиц.

Исходное пространство и время всегда наделяются свойствами идеальности, то есть, эти системы отсчета всегда глобальны и абсолютны по проявлениям, непрерывны, линейны и недеформируемы по своим внутренним свойствам. Пространство не терпит пустоты и при необходимости заполняется условным эфиром, в качестве носителя законов математической теории поля, со свойствами вязкой, упругой и сжимаемой жидкости.

Физические размерности для полей и частиц гидромеханики являются естественным и наилучшим предикатом в формализациях элементарных вычислительных объектов. Такие же определители - предикаты необходимы для фиксации типа и связности координатных базисов, для автоматизированного определения текущей системы



координат и пространственной привязки к конкретной крупной частице жидкости.

В комплексе вся система признаков-предикатов необходима для автоматизированного распознавания и применения базовых функций для трансформации элементарных числовых объектов к требуемому или условно каноническому виду. В последующем, формализованные числовые объекты смогут быть задействованы в реализации или согласовании законов гидромеханики, или подвергнуты простому преобразованию к заданной системе отсчета и физической размерности.

С каждой частицей жидкости связывается собственная локальная система координат с теми же внутренними свойствами, что и единая абсолютная система отсчета. Локальная и абсолютная системы координат строго связаны между собой едиными динамическими свойствами и физическими размерностями наполняющих их жидкостей, а также с помощью строгих правил выполнения тензорных математических операций и преобразований.

Традиционная физическая интерпретация, так же как и численное решение задач гидромеханики, опирается на два взаимосвязанных и существенно отличающихся по форме геометрических представления о течении жидкости, - это известные дифференциальные формализации течений по Эйлеру – на фиксированной сетке и изменяющихся значениях гидродинамических полей, и по Лагранжу – с фиксацией законов сохранения внутри каждой из движущихся частиц жидкости.

Опыт реализации вычислительных экспериментов показывает, что для сложных расчетных областей невозможно применение дифференцирующих разностей более чем первого порядка. Задачи же механики опираются на уравнения движения второго порядка, которые в случае задач аэрогидромеханики довольно уверенно моделируются с использованием разделения решения на подэтапы, где последовательное использование интерполирующих функций первого порядка сначала опирается на неподвижные узлы сетки, затем ведется расчет в локальных координатах подвижных частиц жидкости. Та-

кой подход к решению соответствует классическому разложению дифференциальных уравнений гидромеханики по физическим параметрам, который выполняется в лагранже-эйлеровых схемах, в методе «Крупных частиц» или «Конечного объема». Суть разложения по физическим параметрам, при таком подходе, выражается в двойном последовательном интегрировании уравнений движения первого порядка, что, в свою очередь, разделяет каждый временной цикл вычислительного эксперимента на три этапа:

1 этап – вычисляются кинематические параметры для динамических центров крупных частиц жидкости, для чего используются текущие исходные данные в неподвижных узлах конечноразностной расчетной сетки, которая обычно обладает свойствами неподвижных эйлеровых координат;

2 этап – лагранжевы или крупные деформируемые частицы жидкости участвуют в свободном движении, перераспределяя внутренние свойства исходных эйлеровых ячеек по смежному с ними пространству;

3 этап – согласуются законы сохранения массы и энергии, что достигается поляризацией или деформацией сдвинутых частиц жидкости, с последующей переинтерполяцией характеристик течения в исходные узлы неподвижной эйлеровой расчетной сетки.

Для построения вычислительного эксперимента по указанной схеме каждая из частиц жидкости должна вести себя как своеобразный энергоемкий объект, подчиняющийся законам сохранения энергии в пределах геометрического объема этой частицы, часть которой тратится на простую передачу движения смежным частицам, а часть на консервацию энергии движения внутри самой элементарной частицы жидкости. Последнее может проявляться как безвозвратная потеря энергии движения на трение при деформации жидкой частицы, а также как аккумулируемая энергия, в том числе обусловленная изменением интенсивности замкнутых течений внутри такой элементарной частицы жидкости (*образование/затухание внутренних диполей*).



Элементарные объекты гидромеханики и связанные с ними вычислительные операции определяются в одной из трех числовых форм:

1) **Скаляр** – числовая величина, не зависящая от системы отсчета, являющаяся либо инвариантом пространственно-временных преобразований, либо эмпирической величиной, формализующей реологические свойства жидкости (в обобщенном случае это одно и то же). Может использоваться только в операциях произведения, с любыми объектами;

2) **Вектор** – числовой объект, задает пространственно ориентированное внешнее воздействие или реакцию на него со стороны элементарной жидкой частицы. Векторные величины всегда связаны с конкретным пространственным базисом. Допускаются операции сложения для величин, измеренных в одной и той же системе отсчета и с одинаковыми физическими размерностями, а также операции умножения векторов на тензоры, в результате которых происходит замена или уточнение опорного базиса;

3) **Тензор II ранга** – является сложной производной величиной, характеризующей локальные свойства геометрических преобразований, или фиксирующей динамическое состояние элементарной жидкой частицы. Тензорные объекты можно интерпретировать в качестве пространственных базисов, которые хранят геометрию деформирующейся жидкой частицы, и задают их локальную (внутреннюю) кинематику и конвективные свойства течений жидкости в целом.

Тензоры всегда участвуют в анализе динамических свойств и режимов течения реальной жидкости. Любые преобразования тензорных величин выполняются только в соответствии с логикой представления физических процессов и законов гидромеханики. Тензорные операции могут определяться чисто лингвистическими правилами языков программирования (*их внутренней семантикой*), что позволяет в процессе вычислительных экспериментов задействовать гибридные математические модели или параллельно использовать существенно различающиеся гидродинамические модели течения.

Главным объектом исследования является конечный объем подвижной и деформируемой сплошной среды (*крупная частица или конечный объем жидкости*), заключенной в геометрическое пространство, ограниченное симплексом из смежных узловых точек (рис. 2.1).

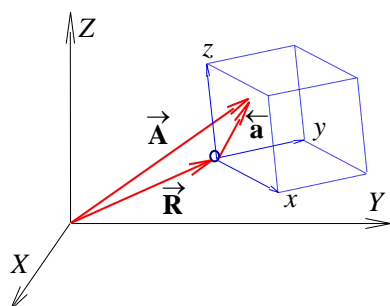


Рис. 2.8. Геометрическое положение в пространстве элементарного вычислительного объекта (*малого континуума*), образованного триадой координатных векторов локального базисного тензора.

Такие частицы жидкости образуют элементарные или базисные объекты вычислительной гидромеханики, с которыми связываются реологические, инерционные и энергетические свойства локальных течений. Внутри элементарной частицы, в строгой форме определяются законы независимого существования и взаимодействия между смежными объектами сплошной среды.

Симплекс из трех ортогонально ориентированных пространственных разностей математически определяется в форме тензора II ранга, который задает локальный базис для фиксации внутренних свойств жидкой частицы. Физические свойства жидкости внутри элементарной расчетной частицы с помощью тензорных произведений могут однозначно переопределяться в единую для всех других частиц глобальную систему отсчета.

Для поиска механизмов взаимодействия смежных и дальних частиц жидкости или твердых тел, уже необходимы точные правила перестроения систем отсчета с помощью линейных и обратных математических операций, что возможно только с привлечением логически сложных функциональных зависимостей (*тензоров*), задающих усло-

*Определение цели, содержания и методологии проектирования
вычислительного эксперимента*



вия взаимодействия частиц, участвующих в неразрывном течении жидкости.

Геометрически частица жидкости $\{ \vec{R}^{-1} \}$ может быть представлена в виде условного *параллелепипеда* (в *обратной задаче* - *эллипсоида*), внутреннее состояние которого формализуется *линейными* или *обратными* распределениями скалярных и векторных полей, жестко связанных геометрическими свойствами *собственных* локальных базисов в форме трехмерных тензоров II ранга, задающих линейное (или *обратное*) распределение внутренних свойств течения между жидкими частицами, однозначно определяемых интерполяционными (*без экстраполяции*) зависимостями между исходными узлами расчетной области.

**Определение цели, содержания и методологии проектирования
вычислительного эксперимента**

Воспользуемся обобщенным базисом троичной логики для формального представления объекта исследований, целью которого является изучение возможности комплексного решения задачи о проведении вычислительного эксперимента в гидромеханике, где математический аппарат должен быть строго согласован с алгоритмическим описанием физических процессов, и обеспечивать эффективное (или автоматизированное) проектирование численных схем и алгоритмов для решения как прямых, так и обратных задач гидромеханики.

Сложные вычислительные эксперименты в гидромеханике не могут быть реализованы с помощью простых линейных повторений математических формул. Без следования теоретическим правилам при построении алгоритмов взаимодействия функций и процедур компьютерной программы, без строгого согласования форматов данных, определяющих элементарные вычислительные объекты, разработка сложного комплекса компьютерных программ может остановиться на невыносимо трудной отладке или неустранимых несоответствиях между вычислительными объектами и операциями. В отличие от изложения методов решения задач с использованием естественных

языков, при разработке сложных систем в языках программирования недопустимо даже малейшего отклонения от логических законов или упущений при формализации моделируемых физических процессов.



Рис. 2.9. Логическое пространство проектной задачи о построении вычислительного эксперимента в гидромеханике.

На рисунке 2.2 представлено трехмерное логическое пространство, базисные плоскости которого образуют главные направления проектных исследований, которые должны быть в полной мере определены и представлены в виде единого комплекса логических связей, объектов и алгоритмов. Секторы, образованные градациями по направлениям, определяют внутреннее строение и условные названия конкретных этапов разработки, служебных программ, процедур и функций, определяемых на конкретных языках программирования.

Такой троичный базис позволяет согласовать противоречия при использовании встречных подходов к проектированию сложных логических систем. С этой целью противоречивые требования соотносятся между собой с позиций третьего - ортогонального и независимого от двух первых методологических подходов. С позиций такого



третьего направления, названного к примеру: «**Проект**», могут быть согласованы (ортогонализованы) противоречия при представлении законов механики с использованием конкретных языков программирования. На самых верхних (дальних) уровнях в направлении «*Проекта*» должны решаться вопросы принципиальной возможности точного определения законов механики с использованием языков программирования, чем должно обеспечиваться не только их взаимное согласование, но также и должное развитие, устраняющее исходные противоречия. В этом случае, на среднем уровне будут согласованы противоречия в плоскости «Естественные законы», что обеспечит постановку прикладной физической задачи в терминах формализованной «*Физической материи*».

В результате полной проработки решаемой прикладной задачи, различные логические подходы должны привести к оптимальному проектированию программно-технического комплекса в целом, в котором исходные физические парадоксы и формальные противоречия должны образовать всесторонне согласованную среду для проведения прямых вычислительных экспериментов.

Пусть, к примеру, одним из ключевых понятий решаемой задачи будет выступать описание гидродинамических процессов вдоль оси «**Явление**», используемого по правилам «*существительного*» в предложении естественного языка, и ось-определение «**Развитие**», соотносимое с понятием «*процесса*» или «*действия*», – подобно глаголу. Тогда плоскость оси «**Проект**» будет выступать в роли логического поля для согласования свойств вычислительных объектов и алгоритмических операций в целом, определяя общую основу обоих подходов к численному решению конкретной прикладной задачи гидромеханики.

К логическому базису можно применять метафизические преобразования, аналогичные стандартным операциям тензорного анализа с учетом физических размерностей и соглашений об абсолютной и локальной системе отсчета. Полученные таким образом метафизические правила преобразования логических тензоров (матриц) могут

быть использованы для разделения алгоритмов компьютерных вычислений на функциональные и декларативные методы программирования, в соответствии с требованиями по интерпретации исходных данных (*существительных*) и математических операций (*глаголов*).

По условиям проектирования «*снизу-вверх*» - направление от плоскости «Проект-Развитие», может быть изучена систематизация законов гидромеханики и тензорного анализа с позиций логики вычислительных операций. Это необходимо для формального определения гидродинамических величин и объектов, базисов и пространства их существования и областей для определения числовых величин, которые должны быть связаны жесткими правилами тензорных арифметических операций и вычислительных алгоритмов для автоматических преобразований при изменении систем отсчета или физических размерностей. Реальные вычислительные модели и их свойства могут быть рассмотрены в соответствии с другим ортогональным (независимым) направлением вдоль оси к плоскости «Развитие-Явление», и на котором строится обоснование достаточности аргументов (исходных условий) при теоретическом обосновании нового математического аппарата вычислительной гидромеханики. Ось «Явление-Проект» может быть ассоциирована с изучением специализированного языка программирования для решения задач вычислительной гидромеханики, который должен быть спроектирован и реализован для наиболее эффективного использования законов и математических принципов формализованных в двух других ортогональных плоскостях (независимых направлениях исследований), в рамках единого троичного логического базиса (настоящего исследования).

Плоскость «*Язык компьютерных вычислений*» находится в стадии перспективного проектирования, являясь источником и целью излагаемой здесь «*Трехмерной тензорной математики вычислительных экспериментов*», поэтому данный вопрос должен включать три подраздела, образующих диагональную или каноническую матрицу исходного проекта. Каноническая - в данном случае означает, что логическая матрица построена в идеализированном или собственном базисе для исследования проекта тензорного языка программирова-



ния. На практике поиск таких упрощенных условий может быть начат с эвристических начальных предположений для реализации процедур «прямого хода» проекта, который должен методично корректироваться за счет «обратного решения», означающего дальнейшую детализацию и формализацию условий, необходимых для построения новых методов практической реализации вычислительных экспериментов в гидромеханике.

В плоскости «Проект - Развитие» → «*Законы и правила механики*» выполняется определение вычислительного эксперимента как полноценной модели физического «Явления», моделируемого с помощью логических объектов и операций *цифровой дискретной ЭВМ*.

Формально, методология построения «*тензорной математики*» представляется по правилу проектирования «*сверху-вниз*», которое возможно при условии, что основные математические инструменты и вычислительные алгоритмы уже известны и опробованы на практике. Соответственно при проектировании «*снизу-вверх*», недостающие инструментальные средства могут быть должным образом доработаны, что не снимет ограниченности результата, обусловленного недостатком исходных знаний.

Учитывая, что в этом случае каждый элемент троичной матрицы становится элементом самостоятельного исследования и законченного повествования, изложение материала может быть максимально кратким для верхних строк матрицы, и расширяться по мере приближения к практическим вопросам, разрешаемым в нижних строках троичной матрицы.

Проектные решения для новых алгоритмов вычислительной гидромеханики

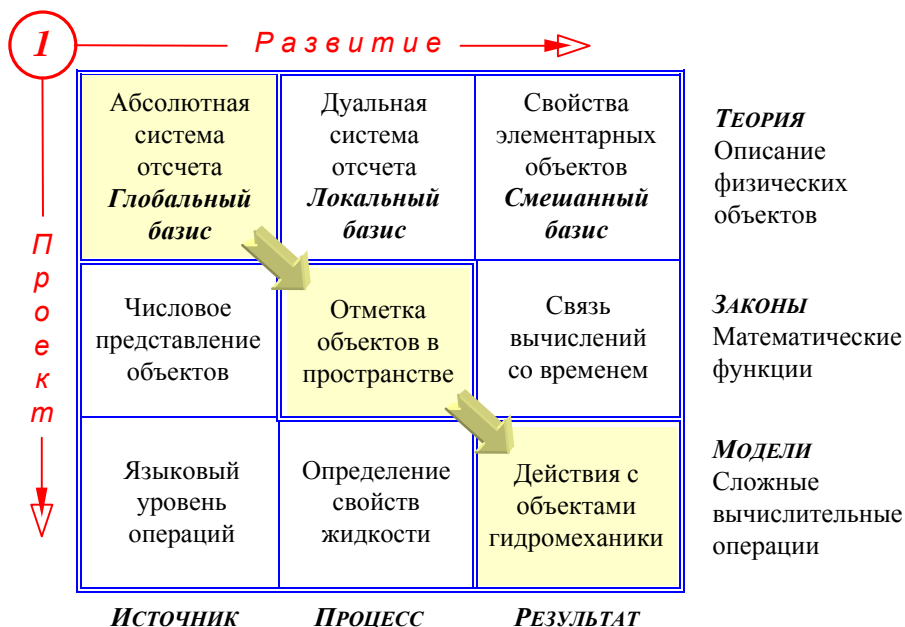


Рис. 2.10. Структура троичной матрицы, определяющей взаимосвязь проектных элементов для построения сложных программ вычислительной гидромеханики, с указанием условно применяемых к ним математических операций и логики пространственно-временных преобразований.

Приведенная на рисунке 2.3 схема построения вычислительно-го эксперимента может быть представлена в виде трех уровней аппаратной и языковой поддержки различных методов программирования, создаваемых по принципу от «множества расчетных алгоритмов» к «унифицированной функциональной среде», ориентированной на внутренний контроль и согласование реологических свойств жидкости, и автоматизированную численную реализацию законов механики сплошной среды.

Особенности языковой среды программирования

Для определения языковой среды программирования можно воспользоваться обобщенными смысловыми понятиями [Уинстон, 1980], что позволит проводить аналогии с естественным мышлением при анализе новых проектных решений. Формально и упрощенно разделим программные процедуры на «алгоритмические» - имеющие неизменный программный код, бесконтрольно применяемый к любым числовым данным, и на «функциональные» - в которых исполняемый код автоматически адаптируется и перенастраивается под особенности текущего состояния элементарных числовых объектов механики сплошной среды.

Алгоритмический язык. Может быть представлен как запись командных или определяющих предложений, которые имеют однозначный смысл, существенный порядок слов и неизменяемую форму в процессе выполнения компьютерной программы. К алгоритмическим языкам относятся все общедоступные языки программирования, такие как Fortran, Pascal, C и C++. Базовыми операциями этих языков являются определения и преобразования числовых данных, управляемые линейными алгоритмами. Если фрагмент текста программы оформляется в виде отдельной процедуры, то внутренние числовые данные временно располагаются в стековой памяти или образуют статические поля собственных переменных, прямо влияющих на ход вычислений. Таким образом, несмотря на жесткое сохранение формы языковых конструкций, в процессе выполнения программы присутствует сильнейшая контекстная зависимость для всех слов языка программирования, а нередко и для всех процедур и функций внутри конкретного программного комплекса.

Если при построении программы на алгоритмических языках используется аппарат глобальных ссылок и обращение к общедоступной памяти типа «куча», то обобщенный анализ вычислительных алгоритмов затрудняется их чрезмерной взаимозависимостью. Современные объектно-ориентированные методы программирования, вместо логической оптимизации и обеспечения функциональной независимости отдельных процедур, используют метод автоматизиро-



ванного загромождения тела программы многократным повторением формально одинаковых фрагментов машинного кода. Такой подход неприемлем для построения прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике по причине взрывного роста машинного кода, грозящего к тому же полной потерей эффективности и цифровой разрешимости прикладных расчетов.

Главное достоинство алгоритмических языков программирования – это прямое отображение командных предложений на аппаратные средства конкретной ЭВМ, что позволяет целенаправленно оптимизировать наиболее критичные фрагменты программного кода для достижения наибольшей эффективности вычислений.

Функциональный язык. На функциональном языке программирования записываются предложения со строго определенным или уникальным физическим смыслом, исполнение которых всегда оперируют исходными данными с контекстно-зависимым содержанием. Построение такой языковой среды необходимо для прямой записи законов гидромеханики, в форме максимально приближенной к аналитическому представлению прикладной задачи в терминах естественного физико-математического мышления. В простейшем случае представление программной среды может быть выполнено в виде «языковой оболочки» над алгоритмическими исполняющими процедурами.

Вычислительный эксперимент в гидромеханике всегда означает манипулирование большими объемами строго систематизированных числовых данных. Поэтому организация числовых структур должна служить связующим звеном между алгоритмическими «глаголами» и функциональными «определителями». Следовательно, все числовые объекты должны содержать не только текущие расчетные величины, но и информацию об описываемом физическом явлении; ссылки на отсчеты времени и пространственные координаты; а также дополнительные «признаки», задающие допустимые методы трансформации и физической интерпретации числовых данных в любой момент времени проведения вычислительных экспериментов.

По аналогии с термином: «признак» для числовых данных, можно ввести термин: «образец», применяемый к исполняемым процедурам и функциям, связывающим исполняемую процедуру с допустимыми методами ее автоматического использования. Этого достаточно для формирования управляющего языка, где слова служат определителями смысловых или физических терминов, к которым всегда связаны описательные «признаки» и исполнительные «образцы». Формально можно ввести понятие «базы знаний», где использование слов определяется их внутренним смыслом и связями с текущим состоянием языковой или исполнительской среды. Если в качестве аналога пользоваться Русским языком, то суть операций будет связываться не только с местоположением слов внутри предложения, но также доопределяться строгими контекстными расширителями (*образцами и признаками*) в виде приставок, суффиксов и окончаний.

Двухуровневое расслоение языковой среды позволяет ограничить алгоритмический подход использованием только локальных данных, что необходимо также для обеспечения множественной рентерабельности всех исполняемых модулей в многозадачном режиме, поддерживая управление ходом вычислительного эксперимента и контроль всех числовых массивов на функциональном уровне.

О логическом проектировании программных комплексов

С появлением нового математического инструментария в виде высокоэффективной вычислительной техники, стало снова актуальным проведение естественно-философских и теоретико-лингвистических исследований в приложении к формальным и аппаратным реализациям языков программирования [Уинстон, 1980], как новым средствам экспериментальной физики, математического мышления и искусственного интеллекта. Целью же новых метафизических поисков должно являться не столько открытие новых законов человеческого миропонимания, сколько поиск формализованных вычислительных объектов, правил их трансформации и эффективного использования при решении прикладных задач механики сплошной среды.



Второстепенным направлением поисков при проектировании программных комплексов является отработка методов выделения канонических зависимостей и выверенных законов природы из огромных потоков информации, которыми позволяют оперировать современные информационно-вычислительные и опытно-экспериментальные комплексы, а также телеметрические системы для непосредственных наблюдений за природными явлениями.

Проектирование также представляет собой процесс мышления, оперирующий с особыми квазиязыковыми объектами.

Здесь уместно ввести в рассмотрение характеристику сложности логического объекта, под которой будем понимать степень взаимозависимости компонент. Если физическое явление существует само по себе и не зависит от авторских предпочтений, то назовем это свойство СКАЛЯРНОСТЬЮ логического объекта.

Проект связывает явление с описательной идеей, что нужно понимать как познание явления с помощью обобщающих законов. Проект, основанный на законах, определяет конкретное явление в как бы пространственных координатах, назовем это свойство ВЕКТОРНОСТЬЮ логического построения, а сам объект просто сложным или сложенным из различных компонент.

Использование такого логического построения может быть оторванным от реального физического явления (что справедливо для вычислительных задач), но при этом с помощью начальных и граничных условий явление может быть поставлено в различные логические координаты, в том числе за пределы области определения математической модели. Соответствующее взаимодействие явления с окружающей средой или закритические режимы существования явления будем определять с помощью МАТРИЧНОГО логического объекта, или объекта, составленного из сложения независимых и произведения взаимосвязанных компонент.

Авторская языковая практика никогда не чуждается непротиворечивой троичной логики (*трилектики*). Если высказывается какая-либо идея, то она оформляется в виде предложения с существитель-

ным, глаголом и связывающими их определениями. Для увязки предложения с контекстом записываются поясняющие тезисы, состоящие из ключевой идеи, ее конкретных приложений и сложных правил взаимосвязи обсуждаемых явлений и происходящих с ними процессов. Затем краткий текст расширяется изложением исходных понятий и последствий до уровня приемлемых в практике реализаций, оптимально ориентированных на материализацию исходной идеи.

Применим последние высказывания к внутренним свойствам моделируемых физических явлений. Пусть основа их совместного существования характеризуется понятием: "процесс", который составляется из трех компонент (рис. 2.4):

- а) "ИСХОД" - процесс, определяющий зарождение явления;
- б) "СУТЬ" - текущее состояние рассматриваемого явления;
- в) "РАЗВИТИЕ" - правила взаимодействия с окружающей средой, в том числе определение условий, приводящих к вырождению явления.

Обратим внимание, что характеристика сложности инвертируется, если происходит изменение основания для определения логической значимости определений.

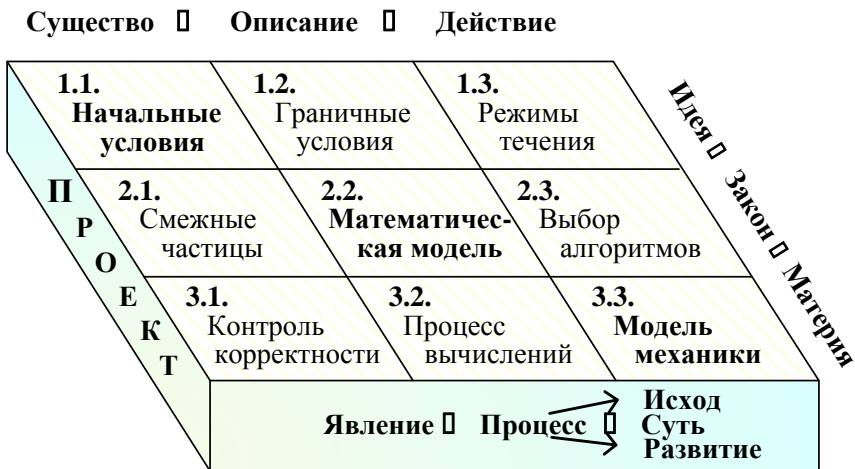


Рис. 2.11. Представление трюичной логической матрицы для решения задачи по методу "крупных частиц".



Для иллюстрации рассмотрим проход от идеи к материи на примере процесса построения проекта:

- "Исход" - обладает скалярным смыслом и по сути просто формулирует постановку задачи;

- "Суть" - является пространственной величиной и определяет текущее состояние и направление в сторону развития реализуемого проекта;

- "Развитие" – комплексное или матричное понятие, связывающее новый проект с независимыми компонентами, противоречивыми идеями и реально существующими физическими явлениями

Теперь, когда введены основные предпосылки и законы, описывающие троичную логическую матрицу (рис. 2.4), можно рассмотреть содержание матрицы проекта программы для проведения вычислительного эксперимента.

Каждый столбец матрицы можно представить как пакет процедур, оперирующий с определенным типом машинной информации (X.. - означает перечисление 1+2+3..):

X.1 Процедуры, обеспечивающие доступ к структурам числовых данных, которые пользуются одними и теми же методами доступа к информации. Каждый элемент столбца преобразует числовые данные к виду, удобному для использования на данном этапе вычислений;

X.2 Система функций, исполняющая ведущие алгоритмы математической модели течения жидкости. Если проект программы ориентирован на оперативное (или интерактивное) использование, то эти функции занимают подчиненное положение между процедурами интерпретации данных (X.1) и управляющими предложениями функциональной (языковой) среды программирования (X.3);

X.3 Языковая среда управляет процессом проведения вычислительного эксперимента. Сюда входят все информационно - логические операции, обеспечивающие назначение расчетных режимов, обработку особых ситуаций, и выполнение активного диалога с пользователем программы.

Формально, каждая строка матрицы определяет один из расчетных этапов:

- 1.X - построение расчетной области и начальных условий;
- 2.X - применение математической модели;
- 3.X - преобразование результатов вычислений.

В таком случае вдоль строки могут быть установлены только рекурсивные (*функциональные*) связи между процедурами, реальные действия которых определяются состоянием данных о ходе вычислительного эксперимента. Предложение, активизированное в столбце "*действие*", приведет к обращению к процедурам смежного столбца "*описание*", где проанализируются физические параметры течения жидкости и замкнется цепочка исполняющих функций вплоть до самого низкого уровня (столбец "*существо*"), что приведет к подготовке "*описания*" для применения конкретных законов гидромеханики и завершению требуемого "*действия*". Если числовые объекты попадают в зону граничных условий или в критические режимы течения жидкости, то производится непосредственное рекурсивное вхождение в функции столбца "*описание*" для предварительной инициации экстраполированных или специальных эмпирических данных, использование которых не повлияет на формализованные операции столбца процедур "*описание*".

Процедуры, составляющие столбцы матрицы, трактуются как неизменные алгоритмы, преобразующие числовую информацию. В практическом программировании элементы столбца могут быть включены в проблемно ориентированный пакет программ, где каждая процедура разработана и отлажена как отдельный подпроект, который затем включен в систематизированную библиотеку или "базу знаний" вычислительного эксперимента в целом. Эта часть программного комплекса может эффективно строиться с помощью современных объектно-ориентированных языков программирования типа C++.

Линии логической матрицы образуют описание существа физического явления, а столбцы составляют исполняемые пакеты вычислительных операций в строгом соответствии с принятыми для моде-



лирования физическими законами. Эти логические направления не имеют прямой алгоритмической связи, подобно существительным и глаголам в предложениях естественного языка, чем и достигается независимость и непротиворечивость разработки проектных решений при создании сложных программных комплексов.

Если в определениях законом будут использованы пакеты программ, созданные с использованием декларативных методов программирования, то вдоль строк должны выстраиваться динамические процедуры контекстно управляемого функционального метода программирования, нацеленные на интерпретацию и глубокий анализ текущих режимов гидродинамического моделирования, и автоматически управляющие ходов вычислительного эксперимента в определениях искусственного интеллекта.

При последовательном переборе элементов матрицы получается словесное описание программы: на основании начальных и граничных условий назначается режим течения жидкости. Затем анализируются локальные свойства крупной частицы жидкости, и на основании этого анализа выбирается математическая модель преобразования расчетной области. На завершающем этапе контролируется корректность выполненных расчетов и расчетная область подготавливается к повторению вычислений. Многократное исполнение матрицы - программы образует процесс, моделирующий течение жидкости во времени.

Особенности использования логической матрицы проекта

Пока логическая матрица введена чисто формально. При описании ее элементов можно воспользоваться расширенной терминологией: "идея проекта"; "описание явления", что означает выбор соответствующего элемента матрицы. В отношении программных проектов удобнее пользоваться термином "реализация" вместо "материя", тогда получится расширение: "существо реализации" или "результатирующее действие" и т.п.

Рассмотрим основные операции, которые применимы к элементам матрицы. Эти операции могут быть разделены по степени сложности или взаимозависимости оперируемых объектов:

1. Скалярные или логические операции, суть которых состоит в выборе или отсеивании компонент включаемых в троичную матрицу.

Например: на первом проходе, от "идеи" к "материи", используется операция логического сложения для выявления новых результатов в реализации проекта; второй проход, от "материи" к "идее", позволяет с помощью операции логического произведения (*сопоставления*) отсеять лишние идейные предпосылки;

2. Пространственные, или операции типа сложения (*усложнения*), применяются для комплексного описания выполняемых работ. Сложение допустимо для элементов, находящихся в одном логическом базисе, в нашем случае это столбец или строка троичной матрицы.

Складываемые элементы должны иметь связанную терминологию и опираться на сопоставимые смысловые правила. При этом сами элементы не могут быть объединены в одно понятие, так как по определению компоненты одного базиса должны быть независимы (=направления базиса ортогональны). Примерами операции сложения служат отмеченные абзацы данной статьи, в которых строятся логически связанные определения из трех различных понятий;

3. Матричная операция произведение (*умножение*) применяется (как и положено для векторов в тензорной алгебре) к элементам, измеренным относительно разных базисов, но одинаковых по смысловому содержанию. Наиболее важной характеристикой тензора является определитель, который задает геометрический объем базиса. В случае нашей троичной матрицы, необходимо обеспечить возможность построения определителя на логическом уровне, то есть элементы матрицы, включаемые в операцию умножения при вычислении определителя, должны быть совместимыми по смыслу. Личный опыт автора показывает, что соблюдение последнего условия обязательно для сохранения непротиворечивости самой матрицы.



Если задача достаточно проста, или проект не предусматривает комплексного решения, то матрица может быть существенно упрощена.

Пусть, к примеру, останется только главная часть проекта, выраженная диагональными элементами троичной матрицы (рис. 2.4): "Начальные условия"; "Математическая модель"; "Модель механики - в виде представления результатов расчета". По аналогии с тензорной алгеброй, можно сказать, что проект определен в ортогональном глобальном базисе и составлен из независимых (в дифференциальном смысле) компонент. В этом случае легко поменять местами элементы 1.1 и 3.3, что приведет к формулированию обратной задачи. В случае полной матрицы, обращение уже не будет столь тривиальным, но, тем не менее, не теряет смысла переформирование матрицы, оглядываясь на связи между компонентами в соответствии с алгебраическими законами (правилом Саррюса).

Затем, если необходимо использовать числовые данные, сформированные в виде функциональных структур, например, с помощью базы данных, то можно рассмотреть троичную матрицу в транспонированном виде. В этом случае, при проектировании и логическом построении вычислительного эксперимента, в описание физического явления должны включаться специальные линейные алгоритмы и процедуры, обслуживаемые транзакциями для доступа к базам исходных данных. Аналогичная задача встает при создании программ для обработки и анализа больших объемов числовых данных, получаемых в результате проведения физического эксперимента.

Завершая раздел исходных логических предпосылок, покажем троичную связь между всеми объектами и процессами при проведении вычислительного эксперимента в гидромеханике:

1. База знаний - скалярное (линейное) представление всех исполнительных процедур, которые реализуют математические операции наиболее эффективным способом;

2. Алгоритмический объектно-ориентированный пакет процедур – как векторная систематизация исходных данных и результатов

расчета, дающая полное описание физического явления и вводящая однозначные правила трансформации и смысловой интерпретации этих данных;

3. Искусственный интеллект – как матричная или функциональная организация всех управляющих предложений, которые на языковом уровне управляют процессами подготовки, проведения и представления результатов прикладных вычислительных экспериментов в гидромеханике.

Среда программирования на основе языка C++

Для иллюстрации особенностей среды программирования воспользуемся базовыми конструкциями языка C++, обладающего наилучшими способностями к прямому отображению аппаратных особенностей цифровых ЭВМ, и в то же время имеющего мощные препроцессорные средства для обобщения вычислительных операций и расширения функциональных возможностей как самого языка, так и его объектно-ориентированной среды, что обеспечивает проведение разработок программных комплексов любой сложности.

Так, к примеру, для придания числовым величинам необходимых функциональных признаков, элементарные переменные могут быть заменены структурированными объектами, типа:

```
typedef struct { char s; int d } integer; //для индексов,  
typedef struct { char s; double d } real; //для чисел,
```

где символ *s* служит управляющим определителем при соответствующей числовой величине, и используется в качестве предиката при выборе допустимых операций на этапе выполнения программы.

Язык программирования C++ представляется с помощью полноценного классического компилятора, а потому динамическое (т.е. в ходе выполнения программы) управление внутренним содержанием исполняемых процедур и функций принципиально невозможно. Однако на этапах компиляции в качестве упоминаемых выше образцов могут выступать невидимые для разработчика расширители имен процедур, формируемые из списков используемых параметров. Пока-

занные языковые механизмы означают, что C++ обладает богатыми функциональными возможностями на этапе компиляции новых программ, обеспечивая генерацию статического и довольно громоздкого машинного кода.

Для описания физико-механических свойств течения жидкости, на уровне компилятора должны быть построены три типа элементарных вычислительных объекта.

1. Скалярные числовые данные, которые служат для задания инвариантных характеристик течения, как например:

```
real T; // отсчет времени от начала вычислительного эксперимента,  
real t; // шаг во времени для моделирования нестационарных процессов.
```

2. Векторные величины определяют точку в пространстве (рис. 2.5):

```
typedef struct { char s; double X,Y,Z } Point;  
// координатная точка в общей системе отсчета  
typedef struct { char s; double x,y,z } point;  
// координатный отсчет внутри элементарной частицы жидкости
```

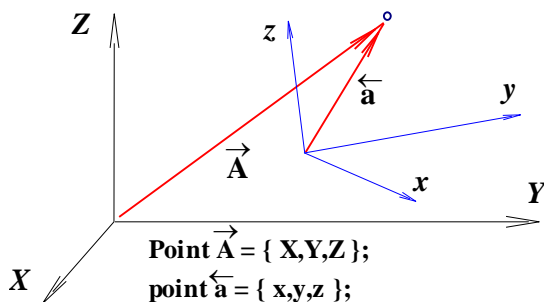


Рис. 2.12. Программное и пространственное представление вектора точки.

3. Элементарная (крупная) частица жидкости имеет малые, но конечные пространственные размеры (рис. 2.6), и может быть определена с помощью компьютерного объекта – тензора:

```
typedef struct { char s; point X,Y,Z } cell;  
// координатная ячейка элементарной частицы жидкости.
```

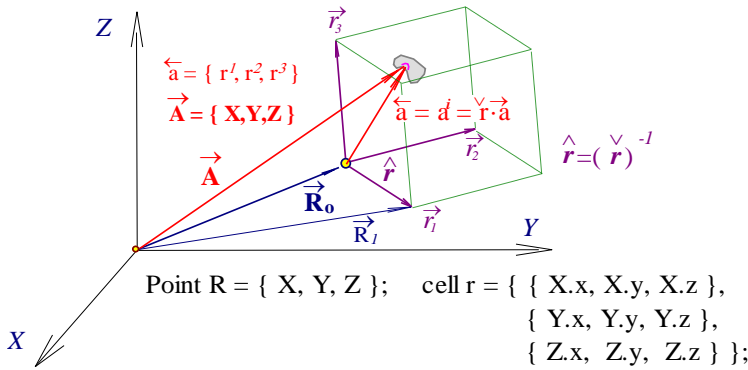


Рис. 2.13. Программное и пространственное представление элементарной частицы жидкости.

Предметом тензорных вычислительных операций является тетраэдр базисных векторов (рис. 2.6), связывающих пространственный параллелепипед элементарного числового объекта, внутри которого все кинематические параметры течения и свойства жидкости изменяются строго по линейным законам. Гидродинамические расчеты в таком параллелепипеде сводятся к линейным интерполяционным процедурам, при которых исходные локальные базисы образованы простыми единичными векторами.

В случае же свободных границ, и особенно - подвижных, а также на нерегуляризованной расчетной сетке, тензорные определения элементарных частиц становятся недоопределенными или вырожденными, что требует применения экстраполяционных расчетов граничных условий, обладающих более высоким порядком разностного дифференцирования, и которые могут быть реализованы исключительно путем применения функциональных методов программирования, нередко поднимающихся до уровня языковой среды искусственного интеллекта.

В приведенном определении тензора формы элементарной частицы жидкости использованы три базисных вектора, каждый из которых имеет собственные предикаты-признаки, однозначно определяющие как собственные пространственные привязки, так и физические особенности этих векторов. Это необходимо для автоматизации проектирования и построения прикладных вычислительных экспери-



ментов, позволяя на языке высокого уровня определять только основные законы гидромеханики, а согласование координатных систем и физических размерностей будет выполняться автоматически частично при компиляции программных модулей, и в процессе контроля расчетов на этапах проведения вычислительного эксперимента.

Отметим также, что использованные в декларациях на языке C++ прописные буквы для абсолютных отсчетов (*длинных векторов*) и строчные - для локальных систем координат (*внутренних отсчетов*) приняты условно, т.к. в процессе исполнения программы система отсчета для конкретных числовых объектов, векторов или тензоров может изменяться, а потому их текущее состояние можно определить только с помощью признаков (*s - предикатов*) непосредственно на этапах исполнения программы.

С помощью «признаков» функциональные особенности среды для моделирования течений жидкости могут быть перенесены также и на этапы исполнения программы. Пусть каждый числовой объект сопровождается следующими *s* – предикатами, образованными простыми битовыми масками:

3 бита – характеристика числового объекта:

“000” – *безразмерный скаляр или инвариантная величина;*

“001” – *вектор в абсолютной системе координат;*

“010” – *короткий вектор в локальном базисе частицы жидкости;*

“011” – *размерная скалярная величина, например – время;*

“100” – *тензор формы жидкой частицы в глобальном базисе;*

“111” – *определение тензорной величины в локальном базисе;*

“101” – *смешанный базис проекций векторов на локальную СК;*

“110” – *базис локальных векторов в проекциях глобальной СК.*

Оставшиеся 5, 13 или более бит могут быть использованы для характеристики текущего состояния смежных частиц жидкости, например, для контроля готовности к интерполяционным пересчетам на этапах согласования конвективных свойств и условий сохранения, или при необходимости динамического перехода к экстраполяцион-

ным процедурам на свободных границах и в зонах вырождения численных решений.

Постоянный контроль аналогичных битовых масок-признаков особенно важен в случае глубокого распараллеливания вычислительных операций на многопроцессорных ЭВМ.

Вычислительные операции с элементарными жидкими частицами, их физическая интерпретация

Все вычислительные объекты должны создаваться либо при начальной подготовке исходных гидродинамических полей, либо конструироваться в ходе вычислительного эксперимента с помощью специальных логических процедур, способных на функциональном уровне контролировать особые режимы течения жидкости и управлять ходом проведения вычислительного эксперимента. Новые объекты не могут порождаться или уничтожаться в результате математических действий, моделирующих базовые законы гидромеханики.

К основным действиям по моделированию внутренней динамики жидких частиц относится математическая операция - произведение, которая в тензорных определениях применима к векторным величинам при условии, что все компоненты сомножителей измерены в дуально противоположных базисах. Формально это означает запрет повышения ранга тензорных величин с помощью операции умножения. Все операции умножения должны носить исключительно интерполяционный характер, суть которого состоит в линейном перераспределении характеристик течения между смежными элементарными частицами жидкости.

В тензорной форме динамика несвободной частицы жидкости будет определяться с помощью векторного аналога закона Ньютона:

$$F_i = W_j \cdot M^j_i \quad \text{или} \quad \vec{F} = \vec{W} \cdot \vec{M},$$

который означает, что внешняя сила \vec{F} , действующая на выделенную из потока крупную частицу жидкости \vec{M} , вызывает реакцию \vec{W} , величина и направление которой зависит как от внутреннего состояния



(инерции) этой частицы, так и от ее способности деформироваться, поглощать или усиливать внешние проявления энергии движения. Жидкая частица будет двигаться в соответствии с традиционным законом Ньютона для точки со скалярной массой только в том случае, если ее освободить от связей с окружающей сплошной средой.

Связывая тензор массы с формой частицы жидкости $\overset{\triangleright}{M} = \hat{r} \cdot \overset{\vee}{\rho}$, получим определение плотности или внутренней энергии, которая в общем случае придает жидкой среде анизотропные свойства:

$$\overset{\triangleright}{F} = r_{ik} \cdot \rho^{kj} \cdot \overset{\triangleright}{W} = \hat{r} \cdot \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\triangleright}{W},$$

где: \hat{r} – тензор формы крупной частицы жидкости;

$\overset{\vee}{\rho}$ – тензор плотности, характеризующий внутреннее состояние частицы жидкости, условно понимаемый как оператор, учитывающий силовое взаимодействие малого расчетного элемента с окружающей сплошной средой.

По сути введенных понятий и условных обозначений вполне достаточно для построения прикладных вычислительных экспериментов в гидромеханике. Кратко декларируем эти обозначения:

Прописными буквами обозначаются величины, измеренные относительно центра единой абсолютной системы координат;

Строчными буквами – в локальном базисе, связанном с конкретной крупной частицей жидкости.

Тогда:

$\overset{\triangleright}{A} = A_i$ – пространственная точка (вектор), измеренная и отмеченная в глобальной системе координат [м];

$\overset{\triangleleft}{a} = a^k$ – векторный отсчет внутри локального базиса элементарной частицы жидкости [м²];

$\hat{r} = \overset{\triangleright}{r}_k = r_{ik}$ – тензор формы крупной частицы жидкости [м³];

$\overset{\vee}{\rho} = \overset{\triangleleft}{\rho}^j = \rho^{kj}$ – тензор плотности [кг·м⁻³];

$M = M^i_j = \overset{\vee}{\rho} \cdot \hat{r}$ – смешанный тензор, соотносящий внутреннее состояние частицы на абсолютную систему отсчета [кг];

Вычислительный эксперимент в гидромеханике обобщенно можно представить как процесс трансформации поля скорости во времени:

$${}^+ \vec{V} = \vec{V} + \vec{W} \cdot t,$$

где: t – малый расчетный интервал времени.

Уточнение нового поля скорости ${}^+ \vec{V}$ является вторым шагом дифференцирования первого порядка, завершающего исполнение закона Ньютона для уравнивания внешних сил соответствующими приращениями скорости свободного движения частиц жидкости.

Построение вычислительного эксперимента именно таким образом, чтобы все операции сводились не более чем к разностному дифференцированию первого порядка, является главной особенностью лагранже-эйлерова подхода при численном решении задач гидромеханики. Иначе этот подход можно назвать методом расщепления решения по физическим процессам, который может быть сформирован тремя условными этапами численного решения прикладной задачи:

1 этап. По текущему полю скорости уточняется состояние крупных частиц жидкости на следующий момент времени:

$${}^< M = \check{\rho} \cdot (\hat{r} + \hat{v} \cdot t),$$

где: \hat{v} – тензор отображения текущего поля скорости на локальный базис крупной частицы; $\check{\rho}$ – тензор внутреннего состояния жидкой частицы на текущий момент времени.

2 этап. После уточнения результирующего вектора всех внешних сил, действующих на крупную частицу жидкости, производится расчет нового поля скорости:

$${}^+ \vec{V} = \vec{V} + {}^< M^I \cdot \vec{F} \cdot t.$$

В данном выражении тензор массы оказывается в знаменателе, что позволяет его идентифицировать как условную гидродинамическую особенность, оказывающую влияние на течение жидкости, при этом в случае модели идеальной жидкости такое влияние будет рас-



пространяться не только на смежные частицы, но и на весь поток жидкости в целом.

3 этап. В результате выполнения первых двух этапов произойдет пространственное смещение всех крупных частиц жидкости, а новые гидродинамические поля отчасти перестанут удовлетворять условиям неразрывности и изотропности исходной среды. В зависимости от типа задачи, на заключительном этапе необходимо вносить релаксационные поправки к внутренним свойствам и условиям взаимодействия между частицами жидкости, а также проводить сквозной контроль качества решения и, при необходимости, применять схемы для адаптации или эмпирической подмены решений в зонах, где вычислительная модель дает заведомо неверные результаты.

Так, например, для получения тензора конвективных скоростей, входящего в уравнение движения на неподвижной сетке по Эйлеру, достаточно произвести нормировку тензора локальных скоростей:

$$(\hat{r} + \hat{v} \cdot t) \cdot \hat{r}^I = \overset{>}{I} + \overset{>}{v} \cdot t,$$

после чего он станет независимым от собственного локального базиса и позволит обобщить поле скорости на ближайшие или смежные частицы жидкости и, в процессе обратной интерполяции восстановить тензор плотности $\overset{\vee}{\rho}$ к исходному виду, либо аккумулировать в нем условную внутреннюю энергию и дополнительные напряжения, возникающие за счет вязкости, сжимаемости и упругости в сплошной среде:

$${}^+ \rho = \overset{\vee}{\rho} + \overset{\vee}{f} \cdot t,$$

где: $\overset{\vee}{f}$, в пересчете на смежные частицы, будет определять действующие извне силы.

Граничные условия и критические режимы течения, независимо от методов постановки вычислительного эксперимента, всегда отмечаются недостатком информации для интерполяционного перестроения характеристик частиц и смежных полей жидкости. В этом случае используются специальные алгоритмы для асимптотических или эм-

пирических упрощений, и численных методов экстраполяции расчетных параметров на недостающие грани жидкой частицы. Выбор и исполнение таких алгоритмов может происходить только на уровне функционального языка программирования, обеспечивающего контроль численных расчетов и управление вычислительным экспериментом в целом.

Построение числовых массивов для моделирования пространственных гидродинамических полей

При использовании криволинейных систем координат, есть возможность наиболее качественного и повсеместного согласования пространственных аппроксимационных критериев, что фактически будет означать сведение всех уравнений механики к каноническому виду, обеспечивающему, к тому же, автоматическое выполнение граничных условий, и в том числе на открытых границах расчетной области. Обеспечение столь жестких условий пространственной аппроксимации для построения вычислительных моделей в механике сплошных сред будет означать фактическое решение задачи чисто аналитическими методами, и потому возможно только в случае идеальных или искусственно подобранных расчетных областях.

В прикладных же задачах, решаемых в произвольных или сложных геометрических и физических условиях, построение криволинейных и ортогональных сеточных областей становится невозможным. При частичном решении такой геометрической задачи, она сводится к использованию косоугольных ячеек на нерегуляризованных узлах, что не дает никаких - ни теоретических, ни вычислительных преимуществ по сравнению с обычными прямоугольными эйлеровыми координатными сетками, которые, при необходимости, могут иметь переменный шаг или становиться нерегуляризованными.

Для полной реализации лагранже-эйлерова подхода нет необходимости построения криволинейных координатных сеток, так как деформационные характеристики гидродинамических полей полностью учитываются внутренними энергетическими характеристиками эле-



ментарных частиц жидкости, исходная форма которых на каждом такте вычислений по времени может сводиться к обычным прямоугольным эйлеровым сеточным ячейкам.

Важным преимуществом прямоугольных расчетных сеток является то обстоятельство, что, по крайней мере, на одном из этапов гидродинамических расчетов, форма элементарных частиц жидкости будет представляться ортогональными или даже диагональными тензорами II-го ранга, что значительно упростит форму представления законов механики, и исключит недостаточную обусловленность вычислительных операций из-за сильных начальных деформаций сеточных ячеек (рис. 2.7).

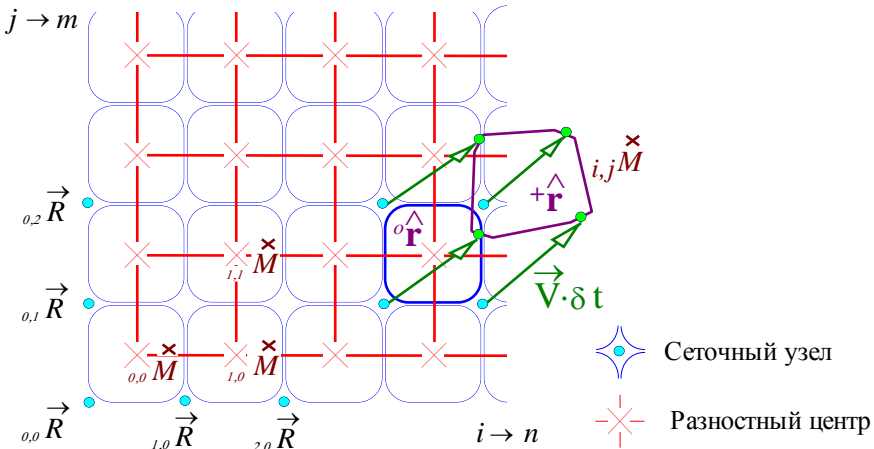


Рис. 2.14. Прямоугольная регуляризованная сеточная область.

Правые тензорные индексы используются для отметки пространственных компонент, характеризующих внутренние свойства элементарных числовых объектов в связанной с ними локальной системе координат:

$$\hat{r} = \vec{r}_k = r_{ik}.$$

Левыми нижними индексами будем отмечать местоположение этой частицы в абсолютном пространстве по номерам расчетных узлов:



$${}_{ij}\hat{r} = \hat{r}(iX, jY),$$

где локальный базис ${}_{ij}\hat{r}$ связывается с координатами $X=i \cdot x, Y=j \cdot y$.

Тогда левый верхний индекс можно использовать для отметки расчетных шагов во времени:

$$\begin{aligned} \vec{R}^k &= R(\vec{0}T+k \cdot t); \\ {}^+\hat{r} &= {}^{k+1}\hat{r}. \end{aligned}$$

Иногда, для упрощения записи, индексными отметками: *минус* "-" и *плюс* "+", будем отмечать смежные в пространстве ячейки или предыдущий и последующий расчетные шаги во времени, соответственно:

$$\begin{aligned} &> &> \\ {}^+M &= {}_{i+1, j+1}{}^{k+1}M. \end{aligned}$$

Построение прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике может быть основано на непротиворечивом проектировании интерполяционных процессов в пространстве и во времени, при которых на каждом такте вычислений будет происходить согласование моделируемых законов механики, поочередно относимых к границам элементарных расчетных ячеек (Эйлеров этап) и к образуемым этими ячейками крупным частицам жидкости, участвующим как бы в свободном движении с внутренними деформациями (Лагранжев этап).

Главными особенностями таких интерполяционных операций, формально образующих привычное разностное дифференцирование физических полей для моделирования гидродинамических процессов на сеточных расчетных областях являются:

1 – результат разностного дифференцирования первого порядка всегда смещается в пространстве с узлов расчетной области, в которых определены исходные значения параметров пространственного поля, на центры масс условных расчетных ячеек, ограниченных этими узлами. Если разностное дифференцирование второго (*четного*) порядка не тривиально, то ему также присуще аналогичное, но меньшее смещение результирующей точки (рис.2.7).



2 – при прямом моделировании нестационарных течений все приращения характеристик течения во времени необходимо относить на смещенные в пространстве ячейки жидкости. Такие смещения всегда соизмеримы с размерами расчетных ячеек и потому в инженерных приложениях не могут быть ни названы малыми, ни проигнорированы.

3 – в явной или неявной форме разностные расчетные схемы первого порядка для аппроксимации гидродинамических полей самоцентрируются. Достижение корректности и надежности вычислительных экспериментов возможно только при изначальном управлении процессами такого центрирования, направленного на приведение вычислительных операций к схемам «прогноза и коррекции», что особенно важно при построении граничных условий и в случае динамического внесения внешних возмущений в исполняемую вычислительную модель.

Вычисления значительно усложняются вблизи открытых и жестких границ, а также в зонах нарушения режимов течения, связанных с образованием кавитационных разрывов, свободных поверхностей и вихревых нитей.

Этапы вычислений с использованием неподвижных (Эйлеровых) пространственных сеток могут быть определены следующим образом:

- *На первом этапе* ведется построение тензора внутренних характеристик для всех расчетных ячеек в соответствии с текущим состоянием пространственных полей. Определяются новые кинематические параметры для этих ячеек, таких как приращение скорости для ячейки – частицы в целом, изменение скорости ее деформации (если жидкость идеальная, то исходная скорость деформации отсутствует).

- *На втором этапе*, после пространственного смещения всех частиц, производится перерасчет исходных гидродинамических и физических полей, и повторным интегрированием разностных уравнений завершается моделирование движения сплошной среды.



- На третьем этапе осуществляются все необходимые расчеты для обеспечения режима «коррекции» и центрирования расчетных шаблонов, образующих обобщенный подход численного метода «прогноза и коррекции». В реальности же здесь решается задача согласования заданных физических свойств течения жидкости, и выполнения других особых условий проведения вычислительного эксперимента.

В частности, при решении задач гиперболического типа, к которым относится моделирование длинноволновых процессов в океане, третий этап практически полностью исключается за счет предварительного аналитического подбора весовых коэффициентов систем дифференциальных уравнений, а именно – заданием фазовой скорости⁴⁵ распространения волн: $C = \sqrt{gh}$. Но даже для столь простого вычислительного эксперимента на согласующем этапе расчетов остается сложнейшая проблема качественного согласования граничных условий. Это объясняется еще и тем, что на втором этапе вычислений из интерполяционных процедур выпадают все граничные точки: $o, j \vec{R}$ и $i, o \vec{R}$ и на противоположных границах. В общем случае восстановление расчетных величин на границах возможно путем экстраполяции решений из внутренней области, что реализуемо только при условии отсутствия гидродинамических особенностей вблизи границ и гладкости внутренних гидродинамических полей.

Любые гидродинамические расчеты сводятся к аппроксимации монотонно изменяющихся физических параметров течения жидкости на дискретных узлах расчетной сетки. В задаче о распространении длинных волн в океане и в его прибрежной зоне возможно точное аналитическое предсказание характерных масштабов исходных гид-

⁴⁵ Из волнового соотношения величина фазы определяется как $i(kx - \omega t)$ а фазовая скорость волны: $V = \omega/k$. Если эта скорость зависит от длины волны, то групповая скорость пакета волн, как реальная скорость распространения волновой энергии может быть оценена как: $U = \delta\omega/\delta k = V - \lambda \cdot dV/d\lambda$. Так если для волн Герстнера

$$V = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}}, \text{ то } U = 0,5 \cdot V; \text{ для капиллярных волн: } V = \sqrt{\frac{T \cdot 2\pi}{\rho \cdot \lambda}} \text{ и } - U = 1,5 \cdot V.$$



родинамических процессов. В результате аналитического решения для скорости распространения длинных гравитационных волн $C=\sqrt{gh}$ и дисперсионным условием, не допускающим зарождение волн с периодом меньше исходного, сеточная область может быть адаптирована под минимальную длину моделируемых волн, с более частой сеткой вблизи берегов и многократно увеличенной на больших глубинах открытого моря.

Такая адаптация сеточной области позволит многократно уменьшить объемы используемой оперативной памяти и значительно повысить общую скорость вычислений. Но в этом случае невозможно использовать простые циклические алгоритмы для расчетов на регуляризованных сетках, так как все разорванные узлы становятся подобны свободным границам, на которых для восстановления величин в разорванных узлах необходимо активно использовать экстраполяционные методы.

Если предварительное определение параметров расчетной области невозможно, то для построения эффективных вычислительных экспериментов необходимо непрерывно оценивать интенсивность потоков в узлах расчетной сетки и внутренние напряжения в элементарных частицах жидкости, дробя или сливая расчетные ячейки в соответствии с особыми пространственными критериями.

В программной реализации динамическая адаптация расчетной сетки может выполняться рекурсивными методами, например, по критериям превышения кривизны характеристик пространственных полей, или при необходимости замедления расчетного шага в конкретной ячейке по критериям устойчивости численного решения.

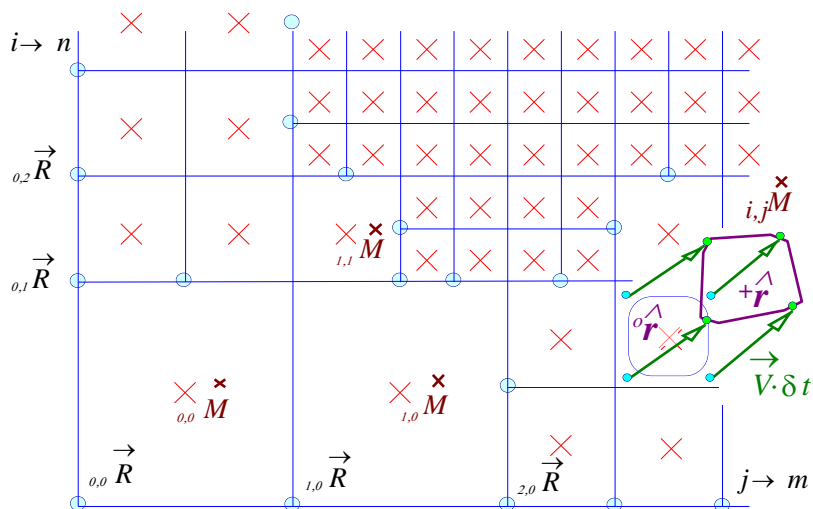


Рис. 2.15. Прямоугольная нерегуляризованная сеточная область.

На рисунке 2.8 показано, что при использовании нерегуляризованных сеток внутренние разрывы появляются непредсказуемо и почти хаотично. Тем не менее, в инженерных приложениях только неравномерные сетки позволяют повсеместно удовлетворить аппроксимационные критерии и минимизировать негативное влияние чисто сеточных эффектов, связанных с проявлением неконтролируемой вязкости, упругости и сжимаемости жидкости. В информационном же плане решение задачи превращается в непрерывное исследование ближайшего окружения всех крупных частиц жидкости, сводящееся к экстраполяционному восстановлению физических параметров жидкости как в динамически формируемых частицах жидкости, так и в разорванных узлах сеточной области.

В таком случае построение вычислительного эксперимента может опираться только на функциональные методы программирования, с глубоким использованием поисковых алгоритмов и рекурсивно подстраивающихся под свойства течения процедур, способных обеспечить уточненные гидродинамические расчеты как в областях с наибольшей интенсивностью деформации на внутренних фронтах свободных течений, так и в локальных зонах с повышенной концентрацией энергии вблизи особых гидродинамических точек.

Часть 3

Тензорное представление алгоритмов вычислительной гидромеханики

Теперь следовало бы кое-что добавить о некотором тончайшем эфире, коего силою и действиями частицы тел при весьма малых расстояниях взаимно притягиваются, а при соприкосновении сцепляются, наэлектризованные тела действуют на большие расстояния, как отталкивая, так и притягивая близкие малые тела, свет испускается, отражается, преломляется, уклоняется и нагревает тела, возбуждается всякое чувство, заставляющее члены животных двигаться по желанию, предавая именно колебаниями этого эфира от внешних органов чувств к мозгу и от мозга мускулам. Но это не может быть изложено вкратце, к тому же нет достаточного запаса опытов, коими законы действия этого эфира были бы точно определены и показаны.

Исаак Ньютон⁴⁶

Цифровые ЭВМ позволяют аппроксимировать непрерывные поля и моделировать процессы гидроаэромеханики только с помощью дискретных шагов во времени, оперирующими малыми элементарными объемами в пространстве – крупными частицами жидкости. Конечноразностные дифференциалы, активно использовавшиеся еще во времена Исаака Ньютона, в настоящей работе формализуются с помощью тензорного исчисления, как математического инструмента

⁴⁶ Завершающие фразы «Математических начал натуральной философии» Исаака Ньютона в переводе с латинского Алексея Николаевича Крылова [1936], с. 662.

для линейной интерполяции физических параметров между смежными пространственными ячейками и их расчетными узлами.

Полноценное описание кинематики крупных частиц жидкости стало возможным в результате специальной физической интерпретации дополнительной пары смешанных тензоров второго ранга, выходящей за синтаксические рамки матричной алгебры, что и послужило обоснованием для введения понятия: «тензорная математика».

В тензорной модели гидромеханики всегда учитываются конвективные составляющие течений; имеется возможность контроля физической корректности моделируемых процессов непосредственно в ходе вычислений; уточняются новые явления и парадоксы механики жидкостей, от которых зависит принципиальная возможность и качество постановки вычислительных экспериментов. Такой вычислительный инструмент не только упрощает форму представления традиционных расчетных схем, но и способен претендовать на своеобразный теоретический анализ особенностей ближнего взаимодействия смежных частиц жидкости.

В завершенном виде вычислительные эксперименты в гидромеханике нуждаются в комплексном представлении информации о больших пространственных полях, к которым строго однозначно применяются как законы механики жидкости, так и различные алгоритмы для адаптации численных решений к реальным условиям. В такой постановке проектирование вычислительных экспериментов опирается на методы «функционального программирования», в котором исходные данные управляют как применимостью математических функций, так и структурой вычислительных алгоритмов в целом.

Обобщенная тензорная форма математической модели гидромеханики, одновременно представила в виде простейших линейных зависимостей конвективные составляющие течений и реологические свойства жидкостей [Астарита, Маруччи, 1978], такие как сжимаемость жидкости, или вязкость и упругость по Ньютону и Гуку. И более того, критерии обусловленности тензорных величин одновремен-

но оказались критериями существования и устойчивости вычислительных моделей гидромеханики в целом.

Все математические записи тензорной модели гидромеханики доведены до уровня простых арифметических выражений с тензорами II-ранга, без труда реализуемых на современных быстродействующих компьютерах. Во многих случаях, *простые арифметические операции с тензорами, как с элементарными частицами жидкости, в полной мере реализуют сложные зависимости дифференциального исчисления для трехмерных полей теоретической гидромеханики.*

И все же, важнейшим элементом рассматриваемой работы является поиск универсального математического инструмента для построения вычислительных экспериментов в гидромеханике, обладающего всеобъемлющими аналитическими возможностями, и позволяющего автоматически применять различные физические законы в зависимости от критериев развития процессов в сплошных средах, в том числе в режиме сквозного распараллеливания всех вычислений, вплоть до каждой элементарной частицы жидкости.

Вводные определения

Вычислительные эксперименты в механике сплошных сред опираются на собственный математический аппарат конечных разностей, в основе которого лежат аппроксимации непрерывных функций с ограниченным количеством опорных величин, распределенных в дискретных ячейках памяти цифровой ЭВМ [Белоцерковский, 1984]. Традиционное дифференциальное исчисление, основанное на анализе бесконечно малых величин и справедливое для аналоговых моделирующих устройств, не в полной мере применимо для цифровых моделей дискретно аппроксимированных физических полей и для разорванных расчетными интервалами времени кинематических процессов.

Для построения элементарных вычислительных объектов гидромеханики необходимо условиться о свойствах единой абсолютной системы координат, в которой будут определяться все математиче-

ские модели и формальные представления скалярных, векторных и тензорных величин. С этой целью представляется полезным упростить численную задачу, ограничившись линейными интерполирующими функциями в узловых точках пространства и линейной экстраполяцией физических процессов на расчетных этапах во времени.

Тензорная математика, оперирующая всеми вычислительными объектами и операциями с ними в размерном виде, в полной мере определяет необходимые правила линейных преобразований в пределах элементарных частиц жидкости, замкнутых между смежными узлами сеточной расчетной области. Такие тензорные формализации существенно расширяют возможности вычислительной гидромеханики, так как точечные или скалярные величины разрозненных дифференциальных уравнений заменяются их объемными аналогами, содержащими в себе полное определение как внешних сил, так и описание внутренней кинематики для всех элементарных частиц жидкости.

Возможность численного решения прикладных задач гидромеханики практически всегда усложнена аппроксимационными критериями, учет которых возможен только при использовании специальных адаптивных решений или гибридных численных схем, основанных на асимптотических, эмпирических зависимостях или экспериментально поверенных эвристиках. Для сохранения принципиальной возможности использования гибридных алгоритмов, а также с целью сквозного контроля качества выполняемых расчетов, очень важно при проектировании вычислительных экспериментов поддерживать логическую непротиворечивость и явное определение физических свойств для всех числовых объектов и расчетных операций с ними, на всех этапах гидродинамического вычислительного эксперимента.

Это приводит к необходимости прямого описания моделируемых процессов в форме, обеспечивающей сквозной и повсеместный контроль режимов течения жидкости на всех этапах вычислительного эксперимента. С этой целью изначально вводились следующие правила:



1) элементарные вычислительные объекты гидромеханики задаются только в размерной форме, в строгой привязке к абсолютной и локальной системам координат, в которых определяются как реологические параметры жидкости, так и динамика потоков внутри и в ближайшей окрестности крупно частицы жидкости;

2) все вычислительные операции соответствуют конкретным законам гидроаэромеханики, а использование промежуточных аналитических преобразований для упрощения исходных математических моделей - недопустимо;

3) расчетные алгоритмы автоматически отслеживают принадлежность численных компонент к единой абсолютной и к связанным локальным системам координат, обеспечивая необходимые переходы между ними, с безусловным контролем соответствия и автоматическим согласованием всех физических размерностей.

Соблюдение столь жесткого комплекса математических условий и вычислительных правил заметно ограничивает использование новых тензорных алгоритмов для воспроизведения многих традиционных задач вычислительной гидромеханики, и особенно – основанных на дифференциальных уравнениях высокого порядка.

В то ж время, такие тензорных алгоритмы не содержат принципиальных ограничений для прямого численного моделирования задач механики сплошных сред любой сложности. А некоторые из реализованных на сегодня вычислительных экспериментов лучше сопоставляются именно с натурными и опытовыми наблюдениями, так как аналитические решения и традиционные численные методы, ввиду многих физических допущений при постановке их численной задачи, не всегда позволяют получать аналогичные качественные результаты.

Форма представления элементарных объектов вычислительной гидромеханики

Пространственное описание крупных частиц жидкости выполняется в расширенной тензорной нотации в двух взаимосвязанных системах координат. Первая – *абсолютная*, или неподвижная (*Эйле-*



рова) сетка узловых величин, которая является единой и глобальной системой отсчета для всего вычислительного эксперимента. Вторая – локальная, которая выступает естественным базисом конкретной крупной частицы жидкости, участвующей в свободном (*Лагранжевом*) движении по собственной траектории, в динамике которой участвуют внутренние свойства элементарной частицы жидкости. Отсчеты времени едины для всех пространственных систем отсчета, всегда абсолютны и скалярны.

Прописными буквами всегда будут обозначаться величины, измеренные относительно нуля глобальной системы отсчета (R_k – вектор абсолютных координат для точки в едином глобальном пространстве, T – отсчет времени от начала вычислительного эксперимента).

Строчными – измеренные относительно центров тяжести локальных (*подвижных*) базисов (r^k – вектор локальных координат точки, определенной в проекциях связанной системы отсчета внутри конкретной частицы жидкости).

В пространственных обозначениях *прописными* буквами показываются большие по величине отсчеты, соизмеримые с масштабом расчетной области, *строчными* – конечные разности, которые всегда используются в качестве линейных дифференциалов.

Левыми верхними индексами будем отмечать текущие отсчеты во времени, к которым относятся вычислительные объекты или процессы. Индекс $+$ – это следующий отсчет времени. Если время в вычислительном эксперименте связано с расчетными тактами k , то: ${}^+F = {}^{k+1}F$, что соответствует отсчету времени: ${}^+T = {}^{k+1}T = {}^0T + (k+1) \cdot t$, где: t – расчетный интервал времени;

Левыми нижними индексами отмечаются номера или индексы пространственных ячеек сеточной области, которые можно трактовать как эйлерову дискретную и неподвижную, или абсолютную систему координат. Исходное местоположение одной конкретной крупной частицы жидкости будем размечать левыми нижними индексами прописными буквами ${}_{j,k}\Omega$, а такие же пространственные метки для



подвижных частиц жидкости в целом – строчными индексами $\{_{jk}\Omega\}$. Фигурные скобки также свидетельствуют о рассмотрении множества ячеек, образующих неразрывное пространственное поле. Индексом $+\Omega$ обозначим некоторую смежную пространственную ячейку жидкости или смежный узел сеточной области.

${}_{\Omega}^T \vec{R}$ – координаты узловой точки. Нижний индекс Ω – определяет местоположение узла в расчетной области (рис. 3.1); Верхний индекс T – момент времени от начала проведения вычислительного эксперимента; стрелка вправо \rightarrow указывает на принадлежность к абсолютной системе отсчета; прописная буква R – на отсчет от общего нуля абсолютной системы координат.

${}_{+}^i \vec{R}$ – ссылка на смежную точку, относительно ${}_{\Omega}^T \vec{R}$ в сторону $+$ от исходного центра масс крупной частицы жидкости Ω за время t .

Все *правые индексы* являются тензорными идентификаторами и всегда обозначают принадлежность к какой-либо системе отсчета. Нижние индексы привязывают объект к абсолютной системе координат, верхние, соответственно, к локальному базису. Векторные стрелки могут заменять индексы, при этом стрелка вправо \rightarrow отмечает принадлежность к абсолютной системе отсчета (*нижний индекс*), стрелка влево \leftarrow к локальной (*верхний индекс*). Тензорные величины отмечаются двойными индексами или уголками: \wedge - абсолютная; \vee - локальная; \succ, \prec и \times – смешанные системы отсчета.

По аналогии, в местной системе отсчета единственным образом могут быть представлены проекции единичных ортов абсолютной системы координат внутри локального базиса, что образует дуальный базис типа: $\vee \vec{r} = \leftarrow j = \hat{r} i j = \wedge \vec{r}^{-1}$, где компоненты тензора могут быть сформированы простыми геометрическими построениями свободных единичных отрезков абсолютного базиса в отсечках по сторонам косоугольных параллелограммов внутри локального базиса.

Чаще всего тензорные объекты используются для связи векторных величин в разных базисах. Так $\vec{a} = \leftarrow \hat{a} \cdot \vee \vec{r}$ – переводит вектор из абсолютной в локальную систему координат. При переходе локаль-



ного вектора из одной системы координат в другую он не меняет своего дифференциального – конечноразностного смысла, однако физические размерности приобретают существенно другой смысл практически всегда. Для перестройки *не свободного* вектора из локальной системы отсчета в абсолютную (рис. 3.1), необходимо добавить координаты опорной точки локального базиса: $\vec{A} = \vec{R} + \vec{a} \cdot \hat{r}$.

Смешанные тензоры образуются аналогично и обычно они проявляются в операциях определения законов механики сплошной среды. К сожалению, при построении тензорных величин для гидродинамических объектов невозможно воспользоваться привычным аппаратом матричной алгебры, описательных возможностей которой не хватает для определения смешанных тензоров.

Приведенные выше правила манипулирования тензорными индексами и геометрические истолкования операций с пространственными объектами формализуются в классическом тензорном анализе [Астарита, 1978] следующими предложениями:

Правило суммирования. *Если один и тот же индекс встречается в явно одночленном выражении дважды – один раз как верхний, а другой как нижний, то предполагается суммирование соответствующих выражений при пробегании этим индексом значений 1,2,3. Такой индекс называют НЕМЫМ.*

Проверка на согласованность. *Любой индекс, не являющийся немым, должен встречаться во всех членах уравнения либо как верхний, либо как нижний индекс. Любое уравнение, содержащее индексы отличные от немых, должно быть интерпретировано как система уравнений, когда каждый индекс принимает значения 1,2,3.*

Примечание: *верхние индексы, встречающиеся в знаменателе одночленного выражения, эквивалентны нижним индексам этого выражения.*

Дополнение: *В операциях произведения базисные или трансформирующие тензоры будут ставиться справа, а изменяемые векторы и тензоры – слева.*



Все правила тензорной алгебры [Мак-Коннел, 1963; Астарита, 1978] в используемой далее трехмерной математике справедливы в полной мере. В то же время использование дифференциальных операций в функциях бесконечно малых из традиционного тензорного исчисления ограничено, и в настоящем исследовании практически повсеместно заменено аналогичными законами гидромеханики для «крупных частиц жидкости» и их смежных расчетных узлов, находящихся на конечном расстоянии друг от друга.

Определение координатных систем

Все векторные и тензорные числовые объекты в механике сплошных сред строго и однозначно соотносятся с абсолютной и неподвижной системой координат и с некоторым малым локальным базисом, условно вмороженным в подвижную и деформируемую сплошную среду.

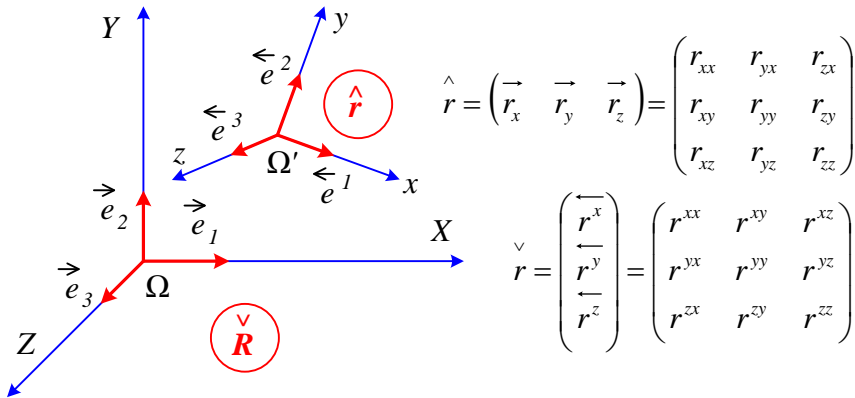


Рис. 3.16. Условная разметка локального пространственного базиса, образующего тензор формы \hat{r} для малого континуума сплошной среды - крупной частицы жидкости. Символом Ω отмечено начало абсолютной системы координат, символом Ω' - местоположение локального базиса.

На рисунке 3.1 координатные оси локального базиса отмечены строчными буквами e_j с числовыми индексами, как:

$$\vec{\Omega}' \equiv \Omega' \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}.$$

Каждый из базисных векторов измерен в абсолютной координатной системе, что отмечено стрелкой вправо.

Главную или абсолютную и неподвижную систему координат всегда будем определять только как декартовую. Локальные (*местные*) системы отсчета могут опираться на произвольные тройки некомпланарных (*не лежащих в одной плоскости*) векторов, имеющих различные (*анизотропные*⁴⁷) масштабные нормировки (*метрики*). Этого достаточно для чисто линейных преобразований векторных объектов при переходе между абсолютной и местными координатными системами. Такие преобразования координат обеспечиваются простыми произведениями между искомыми векторами и тензорами II ранга, как обычными матричными операторами.

Локальный тензор $\hat{r} = \hat{f}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ может быть определен в качестве произвольного координатного трехгранника⁴⁸, образующего прямолинейные оси $\{x, y, z\}$ косоугольного базиса, условно "замороженного" в малый континуум сплошной среды, или жестко связанного с каким-либо подвижным твердым телом и формально свободного от прямых связей с абсолютной системой отсчета.

В случае определения компонент локального тензора \hat{r} в проекциях абсолютной системы координат, он может не представляться ни ортогональным, ни ортонормированным базисом, что на рис. 3.1 иллюстрируется произвольностью ориентации единичных ортов \vec{e}_k . В то же время, для локальных векторных или тензорных компонент, измеряемых внутри этого базиса \check{r} , такой координатный тензор всегда будет считаться строго ортогональным и ортонормированным.

Наличие тензорных преобразований означает, что все векторные величины в собственном базисе могут считаться заданными в

⁴⁷ Анизотропность – означает, что базисные векторы локальной системы отсчета имеют различную длину, что формально приводит к масштабам длин, зависящим от направления.

⁴⁸ Тензоры – как операторы для преобразования координат, могут строиться на косоугольных и анизотропных локальных пространствах, однако для всех внутренних векторов они обладают свойствами декартовых (*ортогональных и ортонормированных*) систем координатных отсчетов.



пространстве трех взаимно ортогональных векторов-ортов: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ декартовой системы координат.

Так же как и в одномерном случае будем обозначать векторные компоненты, измеренные относительно «далеко» удаленного абсолютного базиса прописными буквами, а малые отсчеты в локальном - строчными.

Локальный базис \hat{r} смещен в пространстве определенным вектором \vec{R} , отмерянным относительно единого центра и приведенном в проекциях глобальной системы координат $\{ X, Y, Z \}$. В обозначении \overleftarrow{R} , стрелка влево \leftarrow здесь указывает, что «длинный» вектор R для абсолютных координат местоположения крупной частицы жидкости, был приведен к проекциям локальной системы отсчета, и стал показывать отображение единого глобального центра координат изнутри связанного с крупной частицей жидкости локального или естественного базиса.

Малые свободные векторы обычно ассоциируются с дифференциальными разностями, связанными с естественными подвижными базисами крупных частиц жидкости. Такие векторы считаются свободными лишь на этапах прямого применения законов гидромеханики. Реальные точки приложения «коротких» разностных векторов, определяющие так называемые центровки расчетных шаблонов (*узлов и центров масс крупных частиц жидкости*), строго учитываются на третьем – обобщающем этапе расчетов⁴⁹.

Те же дифференциальные или конечные разности, определенные в проекциях глобальной системы координат, обозначаются строчной буквой со стрелкой вправо:

$$\vec{a} \equiv \vec{a}(x, y, z).$$

Тогда абсолютные координаты точки на конце условно свободного вектора \vec{a} будут определяться с помощью суммы:

⁴⁹ В соответствии со схемой разделения решений по физическим процессам Лагранже-Эйлера подхода, на третьем обобщающем этапе расчетов производится согласование условий неразрывности, сохранения массы и энергии.

$$\vec{A} = \vec{R} + \vec{a},$$

в которой соблюдается условие о принадлежности суммируемых величин к одному и тому же базису, в данном случае – абсолютной системе координат.

Вектор \overleftarrow{a} , проекции которого определены в локальном базисе, отмечается стрелкой, направленной влево:

$$\overleftarrow{a} = \overleftarrow{a} (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}).$$

Соответственно, отстояние центра абсолютной системы координат (рис. 3.1) будет определено в том же локальном базисе с помощью «длинного» вектора:

$$\overleftarrow{R} = \overleftarrow{R} (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}),$$

что образует взаимно однозначные правила преобразований координат.

Учитывая, что в определении тензора формы крупной частицы жидкости заложено требование его обратимости:

$$\hat{r} \cdot \overset{\vee}{r} = \overset{\times}{I},$$

допустимо использование операции деления на тензор⁵⁰ локального базиса, соответствующей умножению на обратный (дуальный) к нему тензорный числовой объект:

$$r^{ij} \cdot a_j = \hat{a} \cdot \overset{\vee}{r} = \hat{a} / \overset{\vee}{r} = a_i / r_{ij}.$$

Для векторных объектов аналогичные замены умножения делением недопустимы, так как изменение позиции индекса для вектора означает перевод его из исходной системы координат в дуальную, а

⁵⁰ Обращение тензора, справедливое для тензора формы крупной частицы \hat{r} , не может без особых оговорок применяться к тензорам конвективных скоростей, напряжений или инерционной плотности и др., используемым в этой работе далее.



само по себе понятие обратного вектора не определено, и никак не может быть обосновано.

При выполнении умножения векторных и тензорных объектов, для исключения потери информации и недопущения переопределенных, но вырожденных геометрических объектов, в операциях произведения запрещено изменение ранга числовых объектов. Такое ограничение реализуется при условии, что *все операции умножения являются внутренними*, в которых задействуются только *связанные компоненты из взаимно дуальных координатных базисов*⁵¹. При умножении вектора на тензор может быть получен только вектор, а произведение двух тензоров второго ранга снова приводит только к тензору второго ранга.

Жесткие ограничения на применимость операций сложения и умножения для рассмотренных в этой работе векторных и тензорных объектов необходимы для построения специальных вычислительных алгоритмов, которые по формальному признаку принадлежности вычислительных объектов к конкретным системам отсчета позволят автоматизировать все координатные преобразования как при непосредственном решении задач механики, так и при представлении их результатов на экране ЭВМ.

Запреты на изменение ранга при выполнении любых операций произведения иногда позволяют избежать логических ошибок при свободной расстановке тензорных и векторных сомножителей в одночленных выражениях.

В дополнение к особенностям практической реализации математических моделей вычислительной гидромеханики можно отметить часто используемый алгоритм чисто геометрических построений, в котором при численном определении векторных объектов, будь то в ковариантных, либо в контравариантных компонентах, производятся

⁵¹ Запрет изменения ранга векторных и тензорных объектов заметно ограничивает варианты перестановки числовых объектов в одночленных произведениях. В то же время, при задействовании аппарата физического контроля корректности вычислительных моделей, создается возможность для автоматического выбора алгоритмов численной реализации операций преобразования координатных систем.

прямые измерения векторных проекций на осях соответствующих базисов. Скалярные компоненты, заполняющие искомые матрицы векторов и тензоров, в этом случае конструируются делением измеренных величин координатных проекций на соответствующие отсчеты для собственных единичных ортов на тех же базисных осях.

В реализации вычислительных моделей очень важно отслеживать и предотвращать недопустимые результаты численных операций, в которых базисные векторы локальной системы координат не должны оказаться в одной плоскости, а их длины не обращались бы в ноль. К таким результатам может привести нарушение устойчивости расчетов или аппроксимационных критериев, отчего определитель тензора $\hat{\mathbf{r}}$ становится вырожденным, и в нем невозможно однозначного преобразования числовых объектов в дуально связанных системах координат.

В процессе вычислений такой гарантии не существует, и поэтому обработка вырождающихся тензоров должна выполняться непосредственно в ходе вычислительного эксперимента, с привлечением особых физических условий и дополнительных ограничений. В компьютерных алгоритмах такие действия могут быть вынесены на уровень обработки исключительных ситуаций, фактически же – возвращая операции вычислительной гидромеханики на исходный логический уровень для уточненного конструирования или эмпирической адаптации базовых числовых объектов.

Во многих случаях вырождение тензоров связано с качественным изменением режимов течения жидкости, как образование свободных или кавитирующих границ разрыва, или зарождение свободных вихрей, пограничных слоев или ударных фронтов. В этом случае в вычислительном эксперименте должны отрабатывать автоматические схемы для применения адаптивных схем или гибридных численных решений, позволяющих продолжить моделирование с учетом произошедших изменений свободных границ или режимов вихревых течений.



Пространственно-временные привязки вычислительных объектов

Левые индексы, как упоминалось ранее, используются для привязки элементарных вычислительных объектов (*крупных частиц жидкости*) в пространстве – *левый нижний индекс*, и во времени – *левый верхний индекс*. Отсутствие левых индексов подразумевает, что определение относится к текущему моменту времени и ко всем элементарным ячейкам расчетной области, соответственно.

Несложно ввести определение для полного или абсолютного вектора скорости в качестве величины смещения координат крупной частицы жидкости относительно абсолютной системы координат:

$$\vec{V} \cdot t = {}^{\Delta}\vec{R} = {}^t\vec{R} - {}^0\vec{R} = {}^{T+t}\vec{R} - {}^T\vec{R}.$$

В векторе полной скорости содержится предыстория нестационарного движения элементарной частицы жидкости, а также условное или виртуальное перемещение центра глобальной системы отсчета.

Пространственные дифференциальные разности получаются при аналогичном вектором сопоставлении смежных ячеек жидкости или их узловых точек:

$$\vec{r} = {}_{\Delta}\vec{R} = {}_{+}\vec{R} - {}_{\Omega}\vec{R}.$$

Тензор формы крупной частицы жидкости получается простой фиксацией сразу трех смежных разностей, разнесенных по ортогональным направлениям:

$$\hat{r} = \hat{r}_i = {}_{\Delta}\vec{R}_i = {}_{+}\vec{R}_i - {}_{\Omega}\vec{R}_i.$$

В инерциальной системе отсчета центр глобальной системы отсчета условно неподвижен или движется со строго постоянной скоростью. Тогда в виде конечных разностей формально вводится кинематическое понятие приращения скорости, которое будет характеризовать динамические свойства крупной частицы жидкости, и потому обозначается строчной буквой:

$$\vec{w} \cdot t = {}^{\Delta}\vec{V} = {}^{+}\vec{V} - {}^{\Omega}\vec{V}. \quad [м/с]$$



Можно полагать, что вектор \vec{w} задает привычное ускорение, которое можно отнести к крупной частице жидкости в целом.

По аналогии с определением тензора формы крупной частицы, можно прямыми построениями получить тензор внутренних скоростей течения жидкости, условно связанный со скоростью взаимной деформации базисных ортов для смежных точек в потоке жидкости:

$$\hat{\omega} = \vec{\omega} = \Delta \vec{V}_i = + \vec{V}_i - \Omega \vec{V}_i. \quad [m^3/c]$$

Полученный тензор $\hat{\omega}$ характеризует наличие внутренней кинетической энергии, замкнутой внутри движущихся элементарных частиц жидкости. Даже в случае стационарных в целом течений, каждая из подвижных частиц непрерывно изменяет интенсивность своих внутренних течений, обеспечивая условно независимое движение по криволинейным линиям тока (*совпадающим с траекториями этих же элементарных частиц*). Это означает, что в соответствии с теоремой о «живых силах», для изменения внутренней кинетической энергии элементарной частицы жидкости, она должна постоянно потреблять (*излучать*) работу внешних сил. Формально это может интерпретироваться в качестве кинематического закона инерции, связывающего действие внешних сил с изменением интенсивности течений, замкнутых внутри крупной частицы жидкости.

Чтобы определить динамику элементарной частицы жидкости необходимо построить разностный тензор скорости для смещаемых во времени базисных векторов тензора ее формы:

$$\hat{v} \cdot \vec{t} = v_i \cdot \vec{t} = \Delta \vec{r}_i = + \vec{r}_i - \Omega \vec{r}_i.$$

Допуская, что в начальный момент времени тензор внутренних течений $\hat{\omega}$ равен нулю, что обычно и предполагается на эйлеровом этапе вычислительного эксперимента, тензор \hat{v} определит текущие скорости для ортов локального базиса. Переходя в локальную систему отсчета:

$$\vec{v} = \hat{v} \cdot \vec{r}, \quad [l/c]$$



получается хорошо известный тензор конвективных скоростей, задающий вращение и деформацию крупной частицы жидкости.

Реологические свойства жидкости в вычислительном эксперименте всегда проявляются в виде тензорных описателей внутренних свойств элементарных расчетных объектов, для которых в процессе расчетов должно обеспечиваться сохранение реологических параметров течения жидкости, параллельно с проведением контроля критериев существования самого численного решения.

Основные действия и операции с пространственными объектами

Формальные операции, связанные с построением и анализом векторов и базисных тензоров, назовем математическими действиями логического или аналитического уровня. В вычислительной математике такие операции выбираются в рамках законов гидромеханики, транслируемых на алгоритмические правила (*операции с данными – «существительными»*)⁵² и функциональные зависимости (*взаимодействие процедур – «глаголов»*), в полной мере учитывающие особенности используемых языков программирования.

На проектном уровне, при построении конкретных вычислительных экспериментов, в том числе по моделированию реальных физических процессов в механике жидкости, искусственно конструируются все операции математического и тензорного анализа, используемые прямо, либо косвенно.

На этот же уровень относятся векторные и тензорные операции аналитической геометрии, задающие скалярное и векторное умножение свободных векторов при построении векторных полей, ориентации пространственных площадок, вычислении проекций тензорных компонент, собственных векторов, физических инвариант и других описателей свойств жидкости.

В любом случае, применяя операции векторного исчисления к упомянутым здесь векторным и тензорным величинам, надо исходить

⁵² По аналогии с ключевыми конструкциями естественных языков.

из конкретных условий решаемой задачи гидромеханики и четко представлять физический смысл результата, полученного посредством этих операций.

Таким образом, для конструирования числовых объектов и операций, на исходном уровне не задается сколь-нибудь строгих или формализованных правил. Однако это же означает, что все искусственные объекты и операции должны всегда особо обосновываться с логических позиций, с позиций соблюдения здравого смысла при проектировании новых физических моделей и прямых числительных экспериментов.

Действиями арифметического или первого уровня можно назвать операции сложения, которые могут применяться только к числовым объектам, имеющим строго одинаковые физические размерности, при условии их определения строго в одном и том же координатном базисе и *наличии общей точки схождения складываемых векторов*. Аналогичные условия выполнения операции сложения должны применяться при суммировании тензорных величин, а по сути, эти же требования предъявляются и к сложению скаляров.

Математическими действиями второго уровня будем называть операции произведения векторных и тензорных вычислительных объектов.

Операции произведения векторов и тензоров связываются геометрическим смыслом переходов векторных величин или базисных векторов тензора из одной системы координат в другую. В таких операциях прямо или косвенно участвуют координатные тензоры \hat{r} , которые обеспечивают пересчет векторных компонент между дуальными координатными базисами. Это довольно жесткие ограничения, которые на логическом уровне запрещают повышение ранга тензорных и векторных величин за счет простого применения операции умножения.

Кинематические операции и неотделимые от них законы гидромеханики можно отнести к наиболее сложному третьему или логическому уровню математических действий.

Определим полный пересчет координат произвольной точке в абсолютной и локальной системе координат. Локальные координаты точки \overleftarrow{a} переходят в абсолютную систему координат в виде суммы вектора местоположения базиса и произведения локального вектора с тензором его базиса в той же абсолютной системе отсчета:

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{R} + \overleftarrow{a} \cdot \hat{r}, \quad [M]$$

где вектор \overleftarrow{a} , изменяющий свою систему координат, стоит в произведении слева.

Физические размерности всех числовых объектов определены в абсолютной системе координат. Размерность базисного тензора локальной системы отсчета $\hat{r} : [m^3]$. Это означает, что все величины, заданные внутри локального базиса, должны представляться как распределенные по объему (трехмерному пространству). Геометрический вектор \overleftarrow{a} будет иметь размерность $[m/m^3]$ или $[m^{-2}]$, что предполагает такой вектор не традиционным геометрическим объектом, а скорее особой точкой некоторого поляризованного поля, определяемого интенсивностью и направлением вектора \overleftarrow{a} .

Малые перемещения во времени и пространстве исторически определялись с помощью исчисления флюксий⁵³, лежащих в основах механики Ньютона в качестве изначально разностного описания движения в пространстве и во времени. Для кинематической задачи в качестве флюксий выступает скорость, которая образует разностный дифференциал (*по Ньютону – момент*) в произведении с расчетным шагом во времени Δt или просто – t . Для точки, вмороженной в жидкость, кинематическое уравнение может быть представлено в каче-

⁵³ Флюенты (*fluens, fluentis – текущий*) – функции x, y, z по аргументу времени t ;
Флюксии (*fluxio – истечение*) – $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ производные x, y, z по времени.

стве дифференциала (*момента*) скоростей движения и времени в абсолютной и внутри локальной систем координат⁵⁴.

$${}^+ \vec{A} = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + \overset{\leftarrow}{a} \cdot (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) = {}^0 \vec{A} + (\vec{V} + \overset{\leftarrow}{a} \cdot \hat{v}) \cdot t,$$

где: t – расчетный интервал времени; $\overset{\leftarrow}{a}$ – координаты контрольной точки в локальной системе отсчета; ${}^+ \vec{A}$ и ${}^0 \vec{A}$ – новое и исходное положение контрольной точки в абсолютной системе координат; \vec{R} – местоположение локального базиса в абсолютной системе координат; \vec{V} – скорость поступательного смещения локального базиса – крупной частицы жидкости; \hat{r} – тензор формы крупной частицы жидкости; \hat{v} – тензор скоростей локальных движений базисных осей тензора, определяющий деформацию крупной частицы жидкости.

Если аналогичное приращение координат будет свойственно внутреннему вектору $\overset{\leftarrow}{a}$ как дифференциал скорости перемещения среды внутри крупной частицы жидкости $\overset{\leftarrow}{\omega} \cdot t$ в точке $\overset{\leftarrow}{a}$, то кинематическое выражение приобретет второй порядок по времени, свойственный динамическим уравнениям с дополнительным слагаемым для приращения скоростей внутренних движений и деформаций базиса:

$${}^+ \vec{A} = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + \overset{\leftarrow}{a} \cdot (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) + \overset{\leftarrow}{\omega} \cdot (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) \cdot t.$$

Формальное приведение уравнений движения к Эйлеровым

Придерживаясь метода флюксий Ньютона, из полученного кинематического выражения необходимо убрать постоянную часть ${}^0 \vec{A}$. Последний член, помноженный на малую величину t , в рамках исчисления флюксий также опускается. Можно пояснить, что вместе с малым членом исключается из рассмотрения движение жидкости внутри крупной частицы, тем самым формально обеспечивается

⁵⁴

В скалярной форме:

$$\begin{aligned} {}^+ A_x &= {}^0 A_x + (V_x + a^x v_{xx} + a^y v_{yx} + a^z v_{zx}); \\ {}^+ A_y &= {}^0 A_y + (V_y + a^x v_{xy} + a^y v_{yy} + a^z v_{zy}); \\ {}^+ A_z &= {}^0 A_z + (V_z + a^x v_{xz} + a^y v_{yz} + a^z v_{zz}). \end{aligned}$$



условие сохранения ее массы (при этом исключается возможность перетока энергии внешнего движения во внутреннее).

$$\vec{a} \vec{V} = {}_o\vec{V} + \vec{a} \cdot \vec{v} = {}_o\vec{V} + \vec{a} \cdot \vec{r} \cdot \vec{v},$$

где: $\vec{a} \vec{V}$ - скорость, измеренная в координатах точки \vec{a} ; ${}_o\vec{V}$ - скорость движения базиса.

Можно отказаться от представления вектора $\vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{v}$ в локальной системе координат, и привести тензор локальных скоростей к смешанному тензору конвективных скоростей, нормированному относительно ортов абсолютного базиса⁵⁵:

$${}_a\vec{V} = {}_o\vec{V} + (\vec{v} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{a} = {}_o\vec{V} + \vec{v} \cdot \vec{a},$$

компоненты которого образуют композиции пространственных производных для скорости деформации крупной частицы жидкости:

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = \vec{v} / \vec{r} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x^x & v_x^y & v_x^z \\ v_y^x & v_y^y & v_y^z \\ v_z^x & v_z^y & v_z^z \end{pmatrix}. \quad [1/c]$$

В принятых здесь математических обозначениях производная по времени соответствует простому делению на расчетный интервал времени t так, что \vec{a} / t в точности соответствует производной $\delta \vec{a} / \delta t$. Можно показать, что в таком случае тензорное выражение формально соответствует традиционной записи системы дифференциальных уравнений движения в частных производных в форме Эйлера, однако тензорная запись имеет значительно более сложное содержание.

Обратим внимание, что полнота уравнений Эйлера заключается лишь в том, что в них учитывается скорость поступательного движения общего потока ${}_o\vec{V}$ в бесконечно малой окрестности пространственной точки \vec{a} . Такое движение определяет перемещение жидко-

⁵⁵ $v_{ij} \cdot r^{jk} = \begin{pmatrix} v_{xx} r^{xx} + v_{xy} r^{yx} + v_{xz} r^{zx} & v_{xx} r^{xy} + v_{xy} r^{yy} + v_{xz} r^{zy} & v_{xx} r^{xz} + v_{xy} r^{yz} + v_{xz} r^{zz} \\ v_{yx} r^{xx} + v_{yy} r^{yx} + v_{yz} r^{zx} & v_{yx} r^{xy} + v_{yy} r^{yy} + v_{yz} r^{zy} & v_{yx} r^{xz} + v_{yy} r^{yz} + v_{yz} r^{zz} \\ v_{zx} r^{xx} + v_{zy} r^{yx} + v_{zz} r^{zx} & v_{zx} r^{xy} + v_{zy} r^{yy} + v_{zz} r^{zy} & v_{zx} r^{xz} + v_{zy} r^{yz} + v_{zz} r^{zz} \end{pmatrix}.$

сти внутри как бы условно неподвижного базиса \hat{r} , образованного стационарной эйлеровой сеткой. Довольно неопределенная трактовка кинематической сути уравнений движения в форме Эйлера на самом деле служит цели упрощения физического смысла выражения, необходимого для сохранения возможности формального представления закона движения в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка, достигаемого после дополнительных допущений в дифференциальной записи для условно бестелесной пространственной точки⁵⁶.

Оставаясь в определениях исчисления флюксий, можно опустить независящие от скорости слагаемые полных координатных преобразований: $\vec{A} = \vec{R} + \vec{a}$, и затем привести уравнения только к производным по времени (к чистым флюксиям):

$$\dot{\vec{V}} + \hat{v} \cdot \hat{r} \cdot \vec{a} \cong \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\delta v}{\delta \hat{r}} \frac{\delta \vec{a}}{\delta t} = \vec{F},$$

где в правой части указан вектор распределенной внешней силы: \vec{F} , принятой в предположении условно единичной плотности жидкости. Знак " \cong " здесь означает, что выражение записано не в полной тензорной нотации, а с допущениями, необходимыми для сведения системы уравнений движения к дифференциальному представлению для бестелесной пространственной точки.

Важно отметить, что при полном раскрытии тензорной записи кинематических уравнений движения $\hat{v} = \hat{v} \cdot \hat{r}$, получаются много более сложные комплексы из скалярных компонент тензорно-векторных преобразований, нежели в искусственно выхолощенной системе дифференциальных уравнений Эйлера. Исходные тензорные операции $\hat{v} \cdot \hat{r}$ вполне определяют кинематику жидкости, а в компьютерном представлении точно описывают элементарные числовые

⁵⁶ Линейные градиенты (производные) в кинематике течений оцениваются парами пространственных точек; одномоментное искривление линий тока в динамике ускоренного движения – смежными интерполирующими тройками, в которых односторонность прямых и обратных геометрических преобразований не обусловлена.



объекты с линейными аппроксимирующими свойствами. В то же время, система уравнений для пространственной точки в форме Эйлера является безмерно сложным для численного представления математическим объектом, так как в ней теряются строгие пространственные связи между смежными частицами жидкости.

Традиционная система дифференциальных уравнений движения в частных производных в форме Эйлера имеет вид:

$$\frac{\delta V_i}{\delta t} + \frac{\delta v_{ij}}{\delta r_{jk}} \frac{\delta a_k}{\delta t} \cong \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta V_x}{\delta t} + \frac{\delta v_x}{\delta x} V_x + \frac{\delta v_x}{\delta y} V_y + \frac{\delta v_x}{\delta z} V_z = F_x \\ \frac{\delta V_y}{\delta t} + \frac{\delta v_y}{\delta x} V_x + \frac{\delta v_y}{\delta y} V_y + \frac{\delta v_y}{\delta z} V_z = F_y \\ \frac{\delta V_z}{\delta t} + \frac{\delta v_z}{\delta x} V_x + \frac{\delta v_z}{\delta y} V_y + \frac{\delta v_z}{\delta z} V_z = F_z \end{array} \right\} = F_i,$$

и уже не обладает той же физической полнотой и однозначностью используемых операций, характерных для прямых определений вычислительных объектов в разностно-тензорных описаниях.

При попытке доопределения или идеализации физических свойств сплошной среды, многие тензорные компоненты полного кинематического выражения $\hat{\nabla} \cdot \hat{r}$ могут быть обнулены или признаны несущественными, однако это не приведет к упрощению математических операций или к более полному раскрытию сути описываемых процессов механики, и вряд ли даст большую наглядность компьютерным алгоритмам или ускорит численные расчеты больших полей в механике жидкости.

Можно полагать, что в тензорной постановке прямого вычислительного эксперимента в гидромеханике, нет смысла в искусственном упрощении физических свойств моделируемых течений жидкости еще и потому, что в этом случае в математическом описании появляются неформальные операции, обоснованность которых на всех этапах моделирования нуждается в особом эвристическом домысливании. Такие неформализованные, так же как и выхолощенные модели механики жидкости практически невозможно обеспечить универ-



сальными подходами при проектировании и построении вычислительных экспериментов в целом, и еще сложнее найти методы обоснованного учета особых режимов течения, которые должны непрерывно выявляться прямо в процессе вычислений, и разрешаться автоматическим выбором специальных компьютерных процедур, или применением иных адаптивных алгоритмов, уточняющих численные решения в сложных областях течения жидкости.

Связь между уравнениями кинематики и законами гидромеханики

Вернемся к исходной тензорной записи уравнения движения, допускающей локальные течения внутри крупной частицы жидкости.

Согласно исчислению флюксий, опустим не изменяющуюся часть кинематического уравнения и разделим результат на малый параметр t для приведения уравнения к величине скорости движения:

$${}^+ \vec{V} = {}^0 \vec{V} + \hat{v} \cdot \hat{a} + \hat{r} \cdot \hat{\omega} + \hat{v} \cdot \hat{\omega} \cdot t.$$

После приведения локальных векторов к абсолютной системе отсчета выпал сомножитель с базисным тензором, так как: $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$:

$${}^+ \vec{V} = {}^0 \vec{V} + \vec{\omega} + \hat{v} \cdot \hat{a} + \hat{v} \cdot \vec{\omega} \cdot t. \quad [м/с]$$

Получается разложение вектора движения в абсолютной системе координат на составляющие: скорости полного потока \vec{V} ; скорости внутреннего смещения $\vec{\omega}$; конвективной скорости $\hat{v} \cdot \hat{a}$; и некоторого приращения локальной скорости $\hat{v} \cdot \vec{\omega} \cdot t$, зависящего от скорости течений внутри крупной частицы жидкости. Заметим, что в исчислении флюксий Ньютона последнее слагаемое, содержащее малый множитель t можно опускать, но не будем спешить с потерей локальных течений внутри крупной частицы жидкости.

Приведенных кинематических выражений вполне достаточно для фиксации смещений частиц жидкости и для согласования их новых скоростей движения. Однако, если особым образом не ограничить течения внутри крупной частицы жидкости, то задача окажется переопределенной, а в каждом локальном базисе образуют-

ся столь же полные модели гидромеханики, энергия течений в которых может проявиться сколь угодно большой, а полное решение гидромеханической задачи, соответственно, - чрезмерно усложненным.

Естественным и обобщающим решением проблемы учета внутренних течений, проявляющихся в виде реакции (*инерции*) внутренней кинетической энергии, является использование своеобразного логического тензора плотности $\overset{\vee}{\rho}$, определенного внутри локального базиса \hat{r} с физическими размерностями распределенной массы [кг/м³]. Первое проектирование (*пространственное интегрирование*) для приведения компонент тензора плотности к абсолютной системе координат, превращает его в тензор: $\overset{<}{M}$ ассоциируемый с инерционной массой [кг] элементарной частицы жидкости, безусловно определяющей особую внутреннюю энергию движения в обобщенной тензорной модели крупной частицы жидкости⁵⁷:

$$\overset{<}{M} = \overset{\vee}{\rho} \cdot \hat{r} = M^i_j, \quad [кг]$$

где тензор формы \hat{r} трансформировался для нормализации (*исключения пространственного масштаба*) внутренней кинетической энергии частицы жидкости, связав ее с текущей инерционной (*активной или тензорной*) массой для конкретной элементарной частицы жидкости $\overset{<}{M}$.

Кажущаяся искусственность в определении обратного и смешанного тензоров массы, необходима для придания этому тензору ведущего значения в расчетных операциях математической модели, чтобы такой тензор внутренних свойств воздействовал на смежные

⁵⁷ Отметим здесь, что в определении тензора формы использованы базисные векторы в проекциях на абсолютную систему координат, соответственно первое дифференцирование приводит к тензору конвективных скоростей $v = v_1^j$ – первый индекс нижний, второй – верхний. Тензор плотности $\overset{<}{M} = M^j_k$ в качестве анизотропного распределения инерционной массы жидкости изначально определяется в локальном базисе, и потому его первое интегрирование приводит к смешанному тензору, формально обратному к чисто кинематическому тензору конвективных скоростей, с первым индексом вверху, и вторым – внизу.



расчетные ячейки сеточной области, привнося в них энергию своих внутренних трансформаций.

При таком определении тензора $\overset{<}{m}$ он представляется особым поляризованным механическим объектом, совмещенным с текущим тензором формы крупной частицы жидкости, и задающим своеобразный замкнутый поток внутри крупной частицы жидкости. Свойства внутреннего течения зависят от предыстории движения независимой частицы жидкости в несвободном пространстве. Тогда, в рамках теоремы о *живых силах*: изменение энергии внутреннего потока должно проявляться вне частицы в виде *работы внешних сил или сил инерции*. Анализ движения в рамках исчисления флюксий подтверждает, что в данном случае внешним силам противопоставляется инерционная реакция, обусловленная необходимостью изменения внутренней кинетической энергии элементарных частиц жидкости.

Такая кинематическая реакция имеет векторный характер, и может быть направлена как на отклонение от линии действия вектора внешних сил, так и на его торможение или даже ускорение, если в окружающей среде будут созданы условия для высвобождения замкнутой энергии движения жидкости внутри элементарной крупной частицы.

При конструировании вычислительного эксперимента, на первых этапах моделирования (*в идеальной жидкости - на каждом шаге интегрирования во времени*) тензор $\overset{\vee}{\rho}$ может определяться как диагональный, с масштабом главных компонент в соответствии со скалярной плотностью жидкости.

Полагая геометрические свойства тензора плотности аналогичными тензору формы крупной частицы жидкости, можно допустить, что и он тоже представляется в качестве дуального к абсолютной системе координат. По крайней мере, это может быть справедливо в какие-то особо оговариваемые моменты времени, например, когда на повторяющихся этапах вычислительного эксперимента искусственно совмещаются оси тензоров для вычисления скоростей деформации $\overset{\vee}{\rho}$ в проекциях абсолютной системы отсчета. В этот момент времени к



тензору плотности также можно применять операцию обращения:
 $\check{\rho} \cdot \hat{\rho} = 1$.

Обратный тензор $\hat{\rho}$, определенный теперь в проекциях абсолютной системы координат получит физическую размерность [м³/кг]. Расположим трансформируемый тензор формы частицы в произведении справа от тензора плотности:

$$\overset{>}{m} = \hat{\rho} \cdot \check{r} = m_i^j. \quad [кг^{-1}]$$

По аналогии введем тензор внешних напряжений, действующий на границах элементарной частицы жидкости: \hat{f} [Н·м²], и способный погасить (скомпенсировать) проявление внутренних живых сил инерционного тензора массы $\overset{>}{m}$.

Векторная сила \vec{F} будет определяться не иначе как в качестве массовой силы, равномерно распределенной и действующей на весь объем элементарной частицы жидкости, силой - способной скомпенсировать дипольные проявления саморазгона элементарной частицы жидкости и погасить силовые воздействия присоединенных вихревых потоков и реакций Жуковского.

Дифференциал закона движения Ньютона в виде приращения скорости течения:

$$\overset{\rightarrow}{+V} = \overset{0}{\vec{V}} + \overset{>}{m} \cdot \vec{F} \cdot t.$$

Запишем теперь уравнение движения для произвольной точки в окрестности крупной частицы жидкости в привычной форме динамики как бы «твердого тела», с учетом деформации и энергии внутренних сил: $\overset{>}{m}$ [кг⁻¹], находящихся под действием внешних распределенных: \hat{f} [Н·м², кг·м³/с²] и массовых: \vec{F} [Н, кг·м/с²] сил:

$$\overset{\rightarrow}{+A} = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + \overset{>}{m} \cdot \vec{F} \cdot t^2 / 2 + (\hat{r} + \hat{v} \cdot t + \hat{m} \cdot \hat{f} \cdot t^2 / 2) \cdot \overset{\leftarrow}{a}.$$

Полученное выражение содержит в себе традиционную систему дифференциальных уравнений Эйлера, а также дополнительный член, описывающий деформацию крупной частицы жидкости под действием напряжений на ее границах. Сопоставим это уравнение движения с ранее полученным чисто кинематическим выражением:



$${}^+A = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) \cdot \hat{a} + (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) \cdot \hat{\omega} \cdot t,$$

что, после их взаимного вычитания, позволит выделить соответствие сил и кинематических параметров уравнения движения в обобщенной форме Эйлера⁵⁸:

$$(\vec{F} + \hat{f} \cdot \hat{a}) \cdot m \cdot t / 2 = (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) \cdot \hat{\omega} \quad [m/c]$$

или, после приведения векторов к абсолютному базису:

$$(\vec{F} + \hat{a} \cdot \hat{f}) \cdot m \cdot t / 2 = \hat{\omega} + \hat{v} \cdot \hat{\omega} \cdot t. \quad [m/c]$$

Формально это означает, что внешние силы и поверхностные напряжения могут быть скомпенсированы приращением скоростей замкнутых внутри крупной частицы жидкости течений.

При построении вычислительного эксперимента в гидромеханике с использованием методов разделения решений по физическим процессам, можно исключить из второго этапа расчетов элементы уравнения движения, отвечающие за поступательное движение крупной частицы жидкости, тогда на последующих этапах будут рассматриваться только деформационные составляющие течения в ближайшей окрестности элементарной частицы. Вместо контрольного вектора можно взять всю тройку базисных векторов, представив их как бы внутри локальной системы отсчета.

По ранее сделанному определению:

$$\hat{\rho} = m \cdot \hat{r} \quad [m^3/kg]; \quad \hat{f} = \hat{f} \cdot \hat{r} \quad [kg/c^2, H/m]$$

Подставляя тензор \hat{r} вместо вектора \hat{a} , и заменив вектор скорости внутреннего течения $\hat{\omega}$ соответствующим тензором $\hat{\hat{\omega}}$:

$$\hat{\rho} \cdot \hat{f} \cdot t / 2 = (1 + \hat{v} \cdot t) \cdot \hat{\hat{\omega}}. \quad [m^3/c]$$

⁵⁸ В тензорных операциях перестановка сомножителей недопустима, однако, принятое ранее ограничение на жонглирование индексами с целью изменения ранга результата произведения, позволяет автоматизировать расстановку сомножителей непосредственно в момент выполнения операции умножения.



Использованная в выражении условная единица $\overset{\times}{I}$ задает тензор с единичной диагональной матрицей и физической размерностью как у другого слагаемого.

Полученная зависимость устанавливает линейный закон между внешними напряжениями и приращениями локальных скоростей внутри элементарной частицы жидкости, что соответствует определению теоремы о «живых силах», о работе внешних сил для изменения кинетической энергии внутри частицы жидкости.

Отметим, что для определения кинематических свойств поля течения внутри элементарного вычислительного объекта, в тензорной форме задано изменение скорости $\vec{\omega}$, замеряемой на базисных векторах \vec{r}_i в проекциях абсолютной системы координат при условии, что все внешние силы полностью скомпенсированы кинематическими реакциями в окрестности этой элементарной частицы жидкости.

Придавая тензору локальных скоростей физических смысл изменения поля скорости в окрестности крупной частицы жидкости во времени, будет получен тензор обобщенных напряжений:

$$\overset{\triangleright}{f} = \overset{\vee}{\rho} \cdot \hat{v} / t \quad [кг/с^2, Н/м,]$$

По аналогии, с соблюдением физических размерностей можно доопределить тензор напряжений, вызываемых вязкостью и упругостью сплошной среды в окрестности элементарной крупной частицы:

$$\overset{\triangleright}{f}_H = \overset{\vee}{\eta} \cdot \hat{v}_H / \Lambda ; \quad \overset{\vee}{\eta} : [кг/м/с, Н \cdot с/м^2,]$$

$$\overset{\triangleright}{f}_T = \overset{\vee}{c} \cdot \hat{v}_T \cdot t / \Lambda , \quad \overset{\vee}{c} : [кг/м/с^2, Н \cdot м^2,]$$

где: η – динамическая вязкость (коэффициент внутреннего трения);
 c – модуль сдвига; Λ - отстояние (рычаг) для момента сил.

Для сохранения традиционных физических размерностей в определении тензоров напряжений добавлен делитель на характерный линейный размер: Λ , переводящий коэффициенты к величине силы, а в законе Гука скорость приведена к смещению за интервал времени t .



сетки. Формально это два этапа интегрирования первого порядка, которые совместно воссоздают решение традиционного дифференциального уравнения механики второго порядка.

Лагранжевы свободные частицы в пределах собственных геометрических размеров должны вести себя подобно энергоемким объектам, которые во взаимодействии с окружающей средой частично растрачивают энергию собственного движения, частично аккумулируют ее внутри себя (рис. 3.2).

Обобщенный *векторный Закон Ньютона* может быть формально сконструирован с помощью тензорной операции произведения с особым тензором массы, способным восполнять недостающие внутренние или внешние силы, недоопределенные на этапах гидродинамического моделирования по схемам разделения по физическим процессам Лагранже-Эйлера подхода:

$$\vec{F} = \vec{W} \cdot \overset{<}{M}. \quad [H]$$

В такой модели тензорная масса жидкой частицы $\overset{<}{M}$ будет не только аккумулировать энергию поступательного движения, но также учтет инерционные свойства деформационного и вращательного движений в пределах элементарной крупной частицы жидкости.

Построение базовых операций вычислительной гидромеханики

Основные законы гидромеханики в тензорном виде позволяют определить не только кинематику элементарных частиц жидкости, но и их внутреннюю деформацию в строгом соответствии с напряжениями от внешних силовых воздействий. Пусть в качестве исходных данных для построения вычислительного эксперимента в гидромеханике будут определены следующие размерные поля в абсолютной (глобальной) системе координат: $\{\vec{R}\}_{[M]}$ – поле координат узловых точек; $\{\vec{V}\}_{[M/c]}$ – поле скорости; $\{\overset{<}{M}\}_{[kg]}$ – тензорное поле внутренних свойств для каждой из частиц жидкости.

В определенной таким образом сеточной области вводятся локальные вычислительные объекты, определяющие элементарные ча-

стицы жидкости, в которых физические параметры течения определяются в абсолютной системе координат: $\hat{r} [M^3]$ – тензор формы крупной частицы; $\hat{v} [M^3/c]$ – тензор локальных скоростей деформации базисных осей этой элементарной частицы; $f [H \cdot M^2]$ – тензор напряжений на ее границах.

Законы механики для деформируемой жидкой частицы в тензорном виде получаются не сложнее обычных арифметических операций, которые удивительно похожи по форме и по сути, как для внешних сил, так и для внутренних деформаций. Это позволяет на всех этапах численного решения оперировать довольно простыми аналитическими зависимостями, которые к тому же учитывают эффекты аккумуляции и последующего излучения механической энергии, полученной в результате внешних взаимодействий между смежными расчетными ячейками.

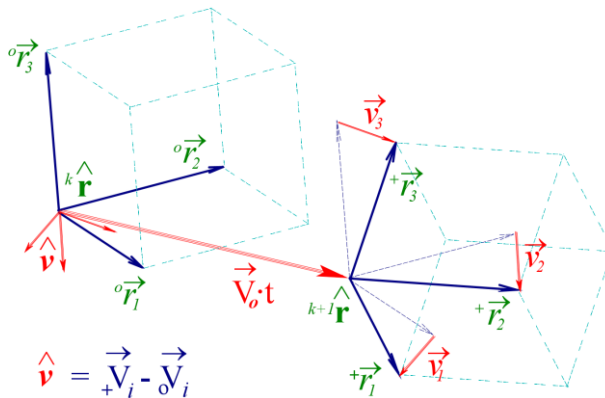


Рис. 3.18. Тензор локальных скоростей образуется деформационными смещениями базисных векторов крупной частицы жидкости за расчетный интервал времени.

Внутренняя энергия элементарных деформируемых частиц (если в тензоре конвективных скоростей будут наблюдаться вихревые или дипольные эффекты) может задавать изменение направления реакции на внешние силы, а также изменение величины инерции частицы жидкости, что расширяет применение основных законов механики (для взаимозависимых или неразрывных сред).

1. Векторный закон Ньютона для деформируемой частицы:

$$\vec{F} = \vec{W} \cdot \vec{M} = \vec{W} \cdot \rho \cdot \vec{r}; \quad [H] \quad (1)$$

2. Тензор вязких напряжений для Ньютоновой жидкости⁵⁹:

$$\vec{f}_H = v_H \cdot \eta / \Lambda = v_H \cdot \eta / \Lambda; \quad [H/M] \quad (2)$$

3. Тензор упругих напряжений для твердого тела Гука:

$$\vec{f}_A = (\vec{r} + v_A \cdot \vec{t}) \cdot c / \Lambda = (\vec{I} + v_A \cdot \vec{t}) \cdot c / \Lambda, [H/M] \quad (3)$$

где тензор локальных скоростей построен алгоритмически как: $v = \sum_i \vec{V}_i - \sum_o \vec{V}_i$ (рис. 3.3); а главные реологические константы формально сконструированы в виде тензоров, для которых справедливы выражения типа: $\vec{M} = \sum_k M^i_k = \rho \cdot \vec{r} = \rho^{ij} \cdot r_{jk}$ – тензор инерции в проекции на абсолютную систему отсчета, и определения: \vec{r} – геометрический тензор формы $[m^3]$ и ρ – плотности жидкости $[кг/м^3]$ и аккумуляции энергии внутри этой частицы; η, c – тензоры динамической вязкости $[кг/с]$ и жесткости $[кг]$ реальной жидкости, Λ – условное расстояние⁶⁰, определяющее дистанцию ближнего направленного взаимодействия смежных частиц.

В выражениях (2) и (3) тензор локальных скоростей, определенный в абсолютной системе координат, был «спроектирован» на локальный базис:

$$v \cdot \vec{r} = v \cdot \vec{r} = v,$$

⁵⁹ Здесь и далее при величинах с графической тензорно-векторной нотацией будут использоваться особо оговариваемые буквенные смысловые метки, которые означают особые физические свойства математических объектов.

⁶⁰ При определении реологических параметров жидкости в тензорной форме не удастся в точности сохранить форму представления традиционных выражений, для формального согласования физических размерностей в одномерных законах вязкости и упругости и введена здесь характерная скалярная дистанция Λ .

в результате чего получен тензор скоростей в смешанной системе координат, который по совокупности физических свойств может быть назван тензором конвективных скоростей. Фактически же, полученный тензор был обезразмерен по пространственному аргументу, и потому его величины могут сопоставляться с реологическими параметрами жидкости.

Свойства элементарных вычислительных объектов

Для анализа используем разложение тензора конвективных скоростей на девиаторный $\overset{\triangleright}{v}^*$ и шаровой $\overset{\triangleright}{v}_0$ тензоры: как: $\overset{\triangleright}{v} = \overset{\triangleright}{v}_0 + \overset{\triangleright}{v}^*$. Тензор шарового сжатия $\overset{\triangleright}{v}_0$ представляется диагональной матрицей, все элементы которой равны между собой, в тензоре конвективных скоростей он характеризует скалярную дивергенцию (сжатие) потоков жидкости и связан с первым реологическим параметром жидкости: ε – коэффициентом динамического сжатия.

Девиаторный тензор $\overset{\triangleright}{v}^*$ имеет нулевой линейный инвариант: $\text{tr}(\overset{\triangleright}{v}^*)=0$, что формально свидетельствует о свойствах несжимаемости оставшегося потока жидкости. Тензор вязких напряжений получается выделением кососимметрической части из матрицы девиаторного тензора $\overset{\triangleright}{v}^*$, что формально соответствует вращению элементарных частиц жидкости, и связанному с ним внутреннему напряжению⁶¹:

$$\overset{\triangleright}{f}_H = \eta \cdot \overset{\triangleright}{v}_H = \eta \cdot (\overset{\triangleright}{v}^* - \overset{\triangleright}{v}^{*T}) / 2. \quad [\text{кг}/\text{м}^3/\text{с}^2]$$

Оставшийся симметричный тензор будет определять чистую деформацию элементарной частицы жидкости, которая может быть связана с упругими напряжениями:

$$\overset{\triangleright}{f}_A = c \cdot \overset{\triangleright}{v}_A \cdot t = c \cdot (\overset{\triangleright}{v}^* + \overset{\triangleright}{v}^{*T}) \cdot t / 2.$$

⁶¹ Здесь и далее характерный линейный размер опущен, что переводит реологические тензоры из категории поверхностных напряжений в своеобразные аналоги объемно распределенных сил.



Соответственно, полный тензор распределенных по объему частицы внутренних напряжений:

$$\underline{f} = (\underline{\varepsilon} \cdot \underline{v}_0 + \underline{\tilde{n}} \cdot \underline{v}_A) \cdot \underline{t} + \underline{\mu} \cdot \underline{v}_I . \quad [кг/м^3/с^2]$$

Обычно тензорные определения реологических параметров применяются только при анизотропных свойствах сплошных сред, но в случае обсуждаемых здесь вычислительных моделей, традиционно скалярные физические параметры жидкости должны быть представлены в качестве ортогональных тензоров, определяемых с помощью соответствующих диагональных матриц.

С тензором плотности ρ связывается предыстория деформации элементарных расчетных объектов, что на Лагранжевом этапе вычислительного эксперимента позволяет считать крупные частицы жидкости участвующими в свободном (*корпускулярном*) движении. Кроме тензора плотности на всех расчетных этапах будут проявляться упругие и вязкостные свойства жидкости в виде связанных тензоров $\underline{\mu}$ и \underline{c} , реальные физические величины которых зависят от текущего состояния тензора формы \underline{r} . Если же в вычислительном эксперименте используются модели идеализированных жидкостей, или расчеты строятся на неподвижных узлах сетки $\{\Omega \underline{R}\}$, то суть вычислений будет сводиться к обеспечению изотропности среды, когда тензоры $\underline{\mu}$ и \underline{c} образуются только равными по величине диагональными компонентами.

Свойства вычислительных операций

Все операции вычислительной гидромеханики выполняются исключительно в размерной форме, что необходимо для обеспечения

автоматического контроля физической корректности моделируемых процессов для каждой отдельно взятой частицы жидкости и, при необходимости, применения гибридных схем в подобластях, где происходит изменение режимов течений, требующее своевременной подмены используемых законов механики и их математических моделей. С вычислительными объектами связываются три группы операций:

1. Операции логические или эмпирические. Это физические законы, такие как: *если есть тензор конвективных скоростей $\overset{\vee}{v}$, то он порождает тензор напряжений $\underset{\vee}{f}$ по закону (2)*, и т.п. Такие операции задают способ формирования и методы анализа состояния тензорных объектов, а также принятие решений об изменении математических моделей по ходу расчетов.

2. Операции сложения, применяемые только к величинам с одинаковыми физическими размерностями и при условии, что они определены и построены в одном и том же базисе. К сложным объектам сложение может также применяться в условиях, когда определены операции автоматического согласования систем отсчета и физических размерностей.

3. Операция «произведение» применима только к объектам, у которых связываемые компоненты лежат в дуальных системах отсчета. Запрещается повышение ранга тензора в операциях произведения. Для построения векторных или тензорных объектов должны определяться специальные алгоритмы, опирающиеся на физическую постановку задачи о проведении вычислительного эксперимента.

Вычислительные объекты наделяются следующими свойствами:

1) скалярные или инвариантные величины, например время t , участвуют только в операциях произведения, с любыми объектами;

2) векторные величины участвуют в операциях сложения с сопоставимыми векторами и в операциях произведения с тензорами, если это необходимо для перехода из одной системы отсчета в другую. Применение умножения векторов для построения диад недопустимо;



3) тензорные величины определяют физические свойства элементарных частиц жидкости, их геометрические деформации [Астарита, Маруччи, 1978], кинематические свойства и другие динамические процессы в сплошной среде. Тензоры участвуют как в операциях сложения с сопоставимыми тензорами, так и в операциях произведения со связанными (дуальными) векторными или скалярными объектами. С использованием тензорных объектов формулируются основные законы гидромеханики, а автоматическое конструирование и анализ этих объектов образует собственно и саму логико-математическую задачу о проведении вычислительного эксперимента в гидромеханике.

Движение контрольной точки в пространстве, сместившейся за один такт первого (эйлерового) этапа вычислительного эксперимента, может быть представлено в форме пересчета координат точки из локальной системы отсчета в абсолютную, с учетом интервала времени t :

$${}^+ \vec{A} = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + \vec{F} \cdot M \cdot t^2 / 2 + (\hat{r} + \hat{v} \cdot t + \hat{f} \cdot M \cdot t^2 / 2) \cdot \overleftarrow{a} . (4)$$

Следующим этапом вычислений может быть определение вектора приращения локальной скорости для этой точки (ускорения), по полю которого затем восстанавливается новое поле внешних сил и внутренней энергии для исходных крупных частиц жидкости:

$${}^+ \vec{V} = \vec{V} + (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) \cdot \overleftarrow{v} . (5)$$

Таким образом выполняется первый шаг вычислительного эксперимента, за которым следует контроль корректности решения на поле $\{ r \}$; согласование условий сохранения физических параметров внутри элементарных ячеек жидкости $\{ M \}$; а в завершение – выполняется перерасчет новых для каждой крупной частицы жидкости «внешних сил»:

$$\vec{F} = M \cdot \overrightarrow{v} \cdot \vec{V} = \hat{r} \cdot \overleftarrow{\rho} \cdot \overrightarrow{v} \cdot \vec{V} .$$

Схемой расщепления решения для уравнений второго порядка по физическим процессам будем называть деление процесса вычислений на два этапа, на каждом из которых выполняется дифференцирование первого порядка. Если на одном из этапов выполняется пространственное дифференцирование поля скорости, то затем по нему вычисляется новое поле напряжений, что позволяет на втором этапе выполнить расчет смещений частиц жидкости по скорректированному ускорениями полю скорости и с использованием конвективных перераспределений потоков согласовать условия сохранения, и снова восстанавливается поле скорости, но уже на новый момент времени.

При пространственном дифференцировании происходит операция переноса с узлов расчетной области на центры образуемых ими крупных частиц жидкости, а эти центры уже смещаются в направлении скорости свободного движения частиц. Это означает, что второй этап вычислений осложняется дополнительными алгоритмами интерполяции внутри расчетной области и экстраполяции в разорванных узлах на внешних границах.

Если в задаче участвуют распределенные массовые силы, например, в виде ускорения свободного падения, то они будут постоянно отклонять траекторию движения свободных частиц, которая на втором этапе должна выправляться за счет упругости жидкости. Для отключения такого механизма трансформации частиц жидкости необходимо искать механизмы замены поля внешних сил напряженным состоянием свободной поверхности.

Построение вычислительного эксперимента

Процесс трансформации полей, в случае исходного требования сохранения координат узловых точек $\{\vec{R}\}$, может быть разделен на три этапа:

1 этап. КИНЕМАТИКА.

Новое поле узловых точек:

$$\{ {}^+ \vec{R} = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + \vec{F} \cdot \vec{M} \cdot t^2 / 2 \}. \quad (6)$$

Поле конвективных скоростей образуется алгоритмическим построением тензора:

$$\{ \hat{v} \} = \{ {}^+ \vec{V} i - {}^o \vec{V} i \}. \quad (7)$$

Расчетное состояние нового поля внутренних свойств:

$$\begin{aligned} \{ {}^+ \vec{M} \} &= \{ \hat{r} \cdot {}^v \rho \} = \{ (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) \cdot {}^v \rho \}, \\ \{ {}^+ \rho \} &= \{ {}^v \rho \cdot (1 + \hat{v} \cdot t) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

2 этап. ДИНАМИКА.

Здесь производится сопоставление реологии жидкости с текущим состоянием вычислительной модели. Пусть определен закон сохранения количества движения на разнесенном по этапам вычислений интервале времени:

$$\begin{aligned} {}^+ \vec{M} \cdot \vec{V} &= \vec{M} \cdot (\vec{V} + \Delta \vec{V}), \quad \text{исходя из (8):} \\ \Delta \vec{V} &= ({}^+ \vec{M} - \vec{M}) \cdot \vec{V} = v \cdot \vec{V} \cdot t, \end{aligned} \quad (9)$$

получается векторное уравнение Ньютона в форме Эйлера, справедливое для крупной частицы жидкости на неподвижных узлах расчетной области:

$$\vec{F} = \hat{M} \cdot \overset{\vee}{v} \cdot \vec{V} = \hat{r} \cdot \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\vee}{v} \cdot \vec{V}. \quad (1')$$

Полученное выражение содержит в себе напряженное состояние жидкости, которое можно объяснить реологическими свойствами вычислительной модели течения:

$$\{ \hat{f} \} = \{ \overset{\vee}{+} \vec{F} i - \overset{\vee}{o} \vec{F} i \} \text{ или } \hat{f} = \hat{r} \cdot \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\vee}{v} \cdot \overset{\vee}{v} = \hat{M} \cdot \overset{\vee}{v} \cdot \overset{\vee}{v}.$$

По форме новое уравнение соответствует записи напряжений в уравнениях Навье-Стокса. Реология реальной жидкости оформляется в виде законов (2),(3), связанных с тензором конвективных скоростей $\overset{\vee}{v}$. Тогда суть расчетов может быть сведена к согласованию свойств вычислительной и физической моделей жидкости.

В результате разностного дифференцирования, в выражении (9) была утеряна объемная составляющая ускорения, которая может быть получена при рассмотрении движения частицы с переменной массой без учета деформации:

$$M = \det(\overset{\vee}{M}), \quad \rho = \det(\overset{\vee}{\rho}), \quad \Delta \vec{V} = \vec{V} \cdot \left(\frac{M}{\overset{\vee}{M}} - 1 \right) = \vec{V} \cdot \left(\frac{\rho}{\overset{\vee}{\rho}} - 1 \right). \quad (10)$$

Рассматриваемая вычислительная модель всегда наделяет жидкость свойствами сжимаемости, вязкости и упругости. В полученных уравнениях пока не рассматривались деформации тензора формы крупной частицы \hat{r} , что позволяет считать жидкость изотропной. Выделением диагонального тензора $\overset{\vee}{v}_0$, такого, что след его остатка $\overset{\vee}{v}^*$ будет равен нулю:

$$\overset{\vee}{v} = \overset{\vee}{v}_0 + \overset{\vee}{v}^* \quad (tr \overset{\vee}{v}^* = 0),$$

получим тензор шарового сжатия:



$$f_0^{\vee} = \varepsilon \cdot v_0 \cdot t, \quad (11)$$

где компоненты тензора f_0^{\vee} определяют давление, ε^{\vee} – коэффициент динамического сжатия.

Выделением косимметричной части тензора $v^{>*}$, которая задает вращение одной крупной частицы относительно смежных, будет получен тензор вязких напряжений:



$$f_H^{\vee} = \mu \cdot v_H^{\vee} = \mu \cdot (v^{>*} - v^{>*T}) / 2. \quad (12)$$

Оставшийся симметричный тензор связывается с упругой деформацией (6):



$$f_{\bar{A}}^{\vee} = \tilde{n} \cdot v_{\bar{A}}^{\vee} \cdot t = c \cdot (v^{>*} + v^{>*T}) \cdot t / 2. \quad (13)$$

Полный тензор внутренних напряжений:

$$f^{\vee} = (\varepsilon \cdot v_0 + \tilde{n} \cdot v_{\bar{A}}) \cdot t / 2 + \mu \cdot v_i^{\vee}. \quad (14)$$

Рассматриваемые динамические коэффициенты $\mu, c, \varepsilon^{\vee}$ отличаются от кинематических коэффициентом скалярной плотности ρ . Под действием тензора напряжений \hat{f}^{\vee} , частица получает приращение скорости внутреннего (замкнутого) движения:

$$\Delta v^{\vee} = \hat{f}^{\vee} \frac{t}{\rho}. \quad (15)$$

Если течение установившееся, то, за расчетный интервал времени тензор приращения скоростей Δv^{\vee} должен компенсировать сам тензор конвективных скоростей:

$$v \cdot r + r \cdot \Delta v^{\vee} = 0.$$

На данном этапе вычислений это выражение является точным, поскольку не учитывается смещение крупных частиц за время t .

3 этап. СТАТИКА.

На завершающем этапе необходимо провести восстановление поля скорости по вычисленным на втором этапе приращениям, при этом рассматриваются деформационные движения вокруг статических центров тяжести частиц.

От тензора $\overset{\Delta}{v}$, определенного в локальном базисе, необходимо перейти к смешанному тензору, где локальные характеристики опираются на абсолютную систему отсчета:

$$\overset{\Delta}{v} = \overset{\Delta}{v} \cdot \hat{r}. \tag{16}$$

Этот тензор не связан с локальной геометрией базиса $\overset{\wedge}{\Gamma}$.

Для перехода к исходной сетке построим новый локальный базис, который опирается на неподвижный узел, а в качестве смежных используем смещенные во времени пространственные точки:

$$\hat{r} = \overset{+}{r} - \overset{o}{r}. \tag{17}$$

Раскрывая выражение (7), использованное при построении тензора локальных скоростей: $\hat{v} = \overset{+}{V} - \overset{o}{V}$, по скоростям, связанным с новыми базисными векторами \hat{r} , получим алгоритм вычисления нового поля скорости:

$$\overset{+}{V} = \hat{V} + \sum_i \hat{r} \cdot \overset{\Delta}{v}_i, \tag{18}$$

который суммирует приращения скорости от окружающих крупных частиц.

Выражения (15) - (18) раскрывают основные алгоритмические построения, позволяющие применять обратный закон Ньютона:

$$\vec{W} = \vec{F} \cdot \overset{\leftarrow}{M}.$$

Ускорения, полученные в векторной форме: для частицы с переменной «массой» (10) и для распределенных массовых сил, должны быть интерполированы с центров ячеек на исходные узлы расчетной области.

Словесно этапы вычислений определяются следующим образом:

1 - на неподвижной Эйлеровой сетке производятся расчеты распределенных характеристик течения;

2 - рассматриваются внутренние свойства частиц жидкости с целью построения тензоров «массы», в которых сохраняется предыстория деформации. Здесь же организуются итерационные процессы установления, в которых происходит согласование реологии вычислительной и физической моделей течения жидкости;

3 - на завершающем этапе производится интерполяция характеристик течения со смещенных, в Лагранжевом движении центров тяжести крупных частиц на исходные узлы расчетной области. На этом же этапе можно рассмотреть условия на свободных (жидких) границах, где вместо алгоритмов интерполяции в разорванных узлах нерегуляризованной сетки внутри расчетной области будет использоваться экстраполяция с помощью заграничных центров особых (граничных) частиц жидкости.

Вычислительная среда

Свойства тензора напряжений $\overset{>}{f}$ в процессе вычислений могут рассогласоваться с реологией рассматриваемой жидкости. Для получения итерационного алгоритма согласования физических и вычислительных параметров течения, тензор $\overset{>}{f}$ можно разделить на истинный тензор и девиатор. Это позволит допустимые напряжения включить в динамику течения, а девиаторные отразить от границ сопряжения смежных частиц, тем самым демпфируя дальнейшее развитие их негативной деформации. Аналогично корректируется тензор конвективных скоростей $\overset{>}{v}$, из которого вычитаются девиационные компоненты. По сути, это обычный механизм свободных и отражающих

границ, применяемых только для релаксационного согласования численных решений.

Если начальные условия при запуске процесса решения не соответствуют законам течения жидкости, то величина тензора девиации может быть настолько большой, что произойдет разрушение аппроксимационных критериев. В этом случае можно воспользоваться поправками к реологическим параметрам жидкости, которые методом итераций должны согласовать (или приблизить) физические и вычислительные характеристики течения. Последнее особенно важно для идеализированных жидкостей, численные алгоритмы для которых всегда будут сводиться либо к неявным схемам, либо к итерационным процессам.

Контроль корректности выполняемого решения всегда сводится к контролю допустимости интерполяционных формул. В качестве примера разрушения решения, можно привести случай, когда одна грань частицы, в результате свободного движения в заданном поле скоростей, обгонит свою же противоположную сторону. Этого можно избежать уменьшением расчетного интервала времени. Выражение, показывающее такой предельно допустимый интервал, обычно называют критерием устойчивости решения во времени. Известный критерий Куранта в точности соответствует вышеуказанному определению.

С контролем пространственной аппроксимации дело обстоит существенно сложнее, так как соответствующие критерии связываются не только с начальными условиями, но и с локальными геометрическими характеристиками расчетной области. На отладочных этапах реализации вычислительных экспериментов можно использовать только метод визуального контроля формы расчетных полей, прорисовываемых на графическом экране ЭВМ после каждого такта вычислений.

В соответствии с выражением (8) $\overset{+}{M} = (\hat{r} + \hat{v} \cdot \overset{\vee}{t}) \cdot \overset{\vee}{\rho}$, масса частицы фактически является сумматором тензоров локальных скоростей. На первом этапе $\overset{+}{M}$ используется для определения внутренних

свойств частицы, на третьем - с помощью сопоставления $\overset{<}{M} = \overset{>}{M}^{-1}$, но относящихся к смежным ячейкам, согласовываются условия сохранения при взаимодействии смежных частиц жидкости. Как показано выше, вычислительная модель всегда содержит в себе все три основных свойства жидкости: сжимаемость, вязкость, упругость, при этом соотношение интенсивностей указанных напряжений может привести к критическому режиму или изменить режим течения жидкости (имеется в виду образование струй, вихревых слоев и кавитационных разрывов).

$$\overset{v}{f} = \varepsilon \cdot \overset{v}{v}_0 \cdot \overset{t}{t} + \mu \cdot \overset{v}{v}_I + \tilde{n} \cdot \overset{v}{v}_{\bar{A}} \cdot \overset{t}{t} = \overset{v}{f}_0 + \overset{v}{f}_I + \overset{v}{f}_{\bar{A}}. \quad (14')$$

Тензор напряжений (14) можно представить в качестве характеристического полинома для внутреннего состояния расчетной частицы, в котором реологические параметры жидкости встанут на месте главных инвариантов тензора:

>
 $v_0: \mathbf{I} \neq 0$ – сжимаемость;

>
 $v_I: \mathbf{II} \neq 0$ – поворот;

>
 $v_{\bar{A}}: \mathbf{III} \neq 0$ – чистая деформация, другие инварианты этих тензоров равны нулю.

Если внутреннее состояние частицы рассматривается без учета смещения расчетных узлов, то можно поставить требование компенсации тензора локальных скоростей, за счет приращений скорости вызываемых тензором напряжений:

$$\hat{v} \cdot \hat{t} + \hat{f} \cdot \overset{<}{M} \cdot \overset{t^2}{t^2} / 2 = 0, \quad (19)$$

из которого, в качестве сумматора напряжений, можно вывести тензорную плотность:

$$\overset{+}{\rho} = \overset{v}{\rho} + (\overset{v}{f}_0 + \overset{v}{f}_I + \overset{v}{f}_{\bar{A}}) \cdot \frac{\overset{t^2}{t^2}}{2} \cong \overset{v}{\rho}_0 + \overset{v}{\rho}_I + \overset{v}{\rho}_{\bar{A}}. \quad (20)$$



Рассмотрим два варианта разрушения полного тензора $\overset{\vee}{\rho}$ при выполнении одного такта вычислений, когда $\rho = \det(\overset{\vee}{\rho})$ обращается в ноль.

1. Кавитационный разрыв плотности:

$\overset{\vee}{\rho}_H$ - не рассматривается;

$\overset{\vee}{\rho}_0 = \det(\overset{\vee}{\rho}_0) < 0$ - соответствует полю с разрежением;

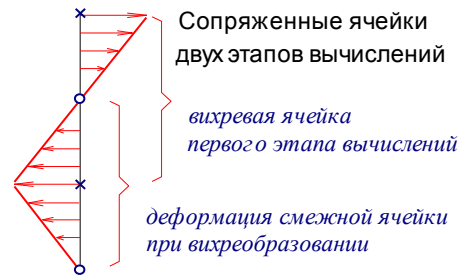
$\overset{\vee}{\rho}^* = \det(\overset{\vee}{\rho}_0 + \overset{\vee}{\rho}_\Gamma) = 0$ - тензор плотности обращается в диаду,

которая может быть определена плоскостью, перпендикулярной к главной оси растяжения тензора упругости $\overset{\vee}{\rho}_\Gamma$. Если жидкость не выдерживает отрицательного давления, то данная плоскость должна быть использована в качестве свободной границы, проходящей через крупную частицу.

2. Образование свободной струи или турбулентного вихря.

Пусть система отсчета будет связана с движущейся частицей, которая подвержена сдвиговой деформации.

На завершающем этапе вычислений исходная вихревая частица может обратиться в ноль детерминант внутреннего поля сопряженной частицы, где $\rho_0 > 0$. В этом случае можно воспользоваться эмпирическим алгоритмом переноса вихря с первого этапа вычислений в тензор «массы» третьего этапа. В этом случае будет снято напряжение со смежной ячейки, а частица в свободном движении будет проявлять особенности, свойственные турбулентному вихрю. Приведенный алгоритм является эмпирической моделью, которую можно использовать за пределами аппроксимационного разрешения расчетной области, для получения точного решения сетка в районе вихря может быть сгущена.



Часть 4

Опыт построения программных алгоритмов

Структура процедур для реализации расчетной части вычислительного эксперимента может быть представлена в форме трюичной функциональной матрицы:

	<i>Данные</i>	<i>Математические алгоритмы</i>	<i>Логика</i>
<i>Данные</i>	Начальные условия	Граничные условия	Режимы течения
<i>Расчет</i>	Исследования динамики смежных частиц	Трансформация тензора формы крупной частицы	Выбор функций и построения расчетного алгоритма
<i>Результаты</i>	Структура представления результатов расчета	Контроль и корректировка решения	Контроль или восстановление расчетной области

Рис. 4.19. Матрица взаимодействия программ при проведении вычислительного эксперимента в гидромеханике.

Каждый столбец матрицы образует перечисление функционально обособленных процедур, которые работают со специфическими для них программными объектами – списочными последовательностями и структурами данных, плюс комплексами функций с описателями их свойств.

Каждая строка матрицы определяет расчетные этапы со своей системой правил передачи данных и организации их взаимодействия.

Это означает, что в проекте программы используется рекурсивный принцип взаимодействия между элементами строки и прямое об-

ращение к элементам столбца функциональной матрицы. Таким образом обеспечивается разделение и независимость функционального и декларативного метода программирования, где осуществляется контекстное управление расчетом на линии столбца и последовательное формирование данных при взаимодействии элементов одной строки.

Процесс вычислений можно представить как цикл по линиям матрицы, где каждая линия исполняется слева направо путем рекурсивного поиска требуемой информации. Словесно же алгоритм анализируется при переборе элементов змейкой, начиная с «начальных условий»:

- На основании начальных и граничных условий выбирается режим движения жидкости;
- Ищутся функции, которые трансформируют крупную частицу, рекурсивно определяя состояние внешней среды;
- Затем формируются результаты расчета, контролируется точность и устойчивость решения, и восстанавливаются параметры расчетной области для продолжения вычислений.

Для полной реализации описанного метода проектирования вычислительного эксперимента необходима, как минимум, следующая программная поддержка:

1 - Компилятор алгоритмического языка, включающего динамически определяемые данные и операции. Поддержка процедур должна обеспечивать распознавание типов для параметров, процедуры – функции должны возвращать в качестве результата массивы и структуры данных или другие функции с их описателями (образцами). Такой язык служит оболочкой для функциональной системы программирования. Его назначение – прямое управление процессом проведения вычислительного эксперимента;

2 - Функциональная среда программирования, включающая обработку динамических структур данных и списков, и поддерживающая рекурсивные методы формирования и распознавания процедур-функций. Такая среда призвана обеспечивать расширение языка оболочки и предназначена для логического анализа и моделирования физических явлений.

Если взять для примера чисто алгоритмический язык, типа Pascal, то он должен быть расширен включением динамически определяемых размерностей массивов и аппаратом построения новых операций. В языке программирования C++ указанные операции имеются, стандартные математические и логические операции легко переопределяются, и потому C++ вполне может быть использован как для отработки прикладных вычислительных экспериментов, так и с целью моделирования новых языковых конструкций функционального метода программирования.

Транслятор должен передать на этап выполнения контроль параметров и результатов процедур-функций. В простейшем случае включение перечисленных средств может происходить на уровне исходных текстов самого транслятора, что в неявном виде и происходит в рамках объектно-ориентированного языка программирования C++.

Тогда разработка функциональной среды становится делом реализации самого вычислительного эксперимента, где с помощью списков формируются граничные условия и описатели (*образцы*) функций-операций, а сами тензорные и информационные процедуры включаются в язык программирования путем частичной трансляции исходных текстов транслятора.

Из сказанного следует вывод, что вычислительные эксперименты в механике сплошных сред опираются на собственный математический аппарат конечных разностей (*как в пространстве, так и во времени*), в основе которого лежат аппроксимации непрерывных функций ограниченным количеством опорных величин, распределенных в дискретных ячейках памяти цифровой ЭВМ.

Традиционные конечноразностные аппроксимации уравнений движения жидкости, после их алгоритмической формализации, с определенной долей условности могут рассматриваться уже в качестве некой другой гидромеханической модели, качественно отличающейся от исходной записи законов механики в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных. Оптимизация же численных моделей для повышения скорости расчетов, контроль фи-

зических критериев корректности решений и применение адаптивных методов для расширения области применимости инженерных расчетов нередко выполняются непосредственно в понятиях алгоритмических операций для сложных числовых объектов внутри ЭВМ. Особо актуален и наиболее сложен такой анализ численных моделей при согласовании физических свойств жидкости в особых условиях, нередко возникающих как внутри расчетной области, так и на свободных границах.

Практический опыт реализации вычислительных экспериментов, связанный с решением инженерных задач гидромеханики, является тем востребованным практикой обоснованием для формализации действий, необходимых как для ускорения расчетных алгоритмов (включая оптимизацию циклов вычислений), так и для унификации процедур, моделирующих законы гидромеханики на внутренних разрывах и внешних границах расчетной области (обеспечении функциональной невидимости границ).

Естественным математическим инструментом для построения элементарных вычислительных объектов стало классическое тензорное исчисление, точнее – его часть, моделирующая линейные интерполяционные операции с элементарными физическими объектами в размерном виде (не выше тензоров II ранга – для 3-мерного пространства). При этом свертывание численных схем к тензорной форме, приводит к своеобразной канонической записи исходных уравнений, которые наиболее быстрым и эффективным образом реализуются на цифровых ЭВМ. Как показал практический опыт проектирования и реализации вычислительных экспериментов, новые модели в тензорном представлении несут в себе очень глубокий физический смысл, и вполне могут быть применены для решения определенного круга задач механики сплошных сред, и в том числе в аналитической форме.

Логическая структура обобщенного программного комплекса



Рис. 4.20. Вариант получения разностно-тензорных уравнений путем интерпретации современных численных методов для решения задач теории длинных волн.

Приведенная на рис. 4.2 схема построения вычислительного эксперимента может быть представлена в виде трех уровней аппаратной и языковой поддержки различных методов программирования, создаваемых по принципу от «множества расчетных алгоритмов» к «унифицированной функциональной среде», ориентированной на внутренний контроль и согласование реологических свойств жидкости, и автоматизированную численную реализацию законов механики сплошной среды.

По диагонали матрицы (рис. 2.3) показаны ключевые объекты, которые рассматриваются при проектировании прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике:

1.1. – *Алгоритмический уровень*. Описание расчетной области в единой системе координат. Построение всех вычислительных объектов и однозначное связывание их физических и кинематических свойств в рамках общей сеточной области;

2.2. – *Функциональный уровень*. Построение строгих математических функций для удовлетворения всех запросов к элементарным вычислительным объектам и их пространственным взаимосвязям с ближайшими частицами сплошной среды;

3.3. – *Уровень моделирования*. Реализация конкретных вычислительных моделей, обеспечивающих моделирование гидродинамиче-

ских процессов при заданных начальных условиях и внешних граничных или объемных возмущениях, необходимых для моделирования реальных физических явлений.

На практике, на каждом из уровней (*слева-направо по строкам матрицы*, рис. 4.2) создаются комплексы специализированных процедур, в основу которых закладывается одинаковая программная среда:

1. Алгоритмический пакет процедур нижнего уровня

1.1. – статические форматы исходных данных и результатов вычислений, а также утилиты низкого уровня для их представления в расчетах;

1.2. – динамические формируемые расчетные объекты и системы процедур для их построения, трансформации и возврата новых данных в исходные статические поля гидродинамических параметров;

1.3. – комплекс утилит для перерасчета всех гидродинамических параметров между используемыми системами координат, в том числе используемые для интерактивного представления вычислительных процессов и текущих результатов на графическом экране ЭВМ.

2. Функциональная среда разработки моделей гидромеханики:

2.1. – представление всех вычислительных объектов и гидродинамических полей в виде комплекса специальных процедур (в терминах C++ - классов), образующих функциональную среду для разработки прямых численных экспериментов;

2.2. – логическая система и ее препроцессорное обеспечение для связывания различных числовых объектов, в том числе учитывающих необходимость преобразования систем координат, физических размерностей и автоматического применения экстраполяционных методов, при нехватке исходных данных;

2.3. – интеграция во все числовые объекты дополнительных функций, позволяющих деформировать их пространственные и физические характеристики в зависимости от скалярного параметра – времени. Главной особенностью этой логической системы для связи

пакетов исполнительных алгоритмов, являются дополнительные процедуры контроля изменения режимов течения, обеспечивающие автоматическое применение гибридных схем в зонах изменения режимов течения.

3. Построение гидродинамических экспериментов:

3.1. – разработка методов связывания вычислительных объектов для реализации конкретного вычислительного эксперимента, в том числе с помощью глобальных списков параметров для реализации вычислительного эксперимента в целом;

3.2. – разработка сценариев выборки исходных данных, преобразования их во внутренние форматы численного моделирования и с целью непрерывной визуализации всех вычислительных процессов и результатов расчета на графическом экране ЭВМ;

3.3. – создание интерактивной среды и графического окружения для постановки, проведения и анализа текущих результатов непосредственно в процессе проведения вычислительных экспериментов.

В полной мере приведенная структура программного комплекса применима, конечно же, только в случае проведения прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике, при которых все численные схемы для решения систем дифференциальных уравнений могут быть выражены в явной форме, когда каждая расчетная операция сопоставлена с моделируемыми физическими процессами и при необходимости скорректирована для получения достоверного гидродинамического решения.

Моделирование длинноволновых процессов в океане в полной мере соответствует указанным упрощающим условиям, и потому представляется наиболее интересной задачей для теоретической и программной отработки методов проектирования и создания прямых вычислительных экспериментов.

При решении этой же задачи удалось рассмотреть новые математические модели гидромеханики, наиболее полно адаптированные к аппаратным особенностям цифровой вычислительной техники.

Примеры реализации численных схем

Тензорная арифметика, использованная для проектирования полных и прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике, в общем случае всегда имеет дело с реальными жидкостями, обладающими полным комплексом реологических свойств, которые задаются линейными/обратными зависимостями в пределах конечноразностного масштаба элементарных расчетных ячеек. Основные иллюстрации выполнялись на примере решения гиперболической задачи о распространении упругих продольных волн (длинных волн в океане), которые допускают явные пространственные решения и потому очень удобны для физической интерпретации основных вычислительных процессов.

1. В современной математике, опирающейся на большие информационные массивы и численные методы прямого моделирования физических процессов, важное место занимает визуализация процессов подготовки исходных данных и наглядного представления результатов вычислительных экспериментов, при котором многомерные зависимости анализируются на двумерном поле графического экрана ЭВМ.

Такой анализ всегда связан с геометрическими построениями сложных трехмерных объектов на плоскости, или – компьютерной графикой.

Представленная в книге тензорная арифметика дает возможность наиболее наглядного представления всего комплекса геометрических алгоритмов для автоматической подготовки больших гидродинамических полей, и для визуализации результатов моделирования, в том числе непосредственно в процессе проведения численных расчетов.

Во многих случаях показанные в работе тензорные преобразования активно используются для быстрого и наглядного построения двух-трехмерных интерполяционных процедур, работающих как преобразование систем координат, и в том числе – неортогональных, заведомо обладающих наивысшей вычислительной эффективностью.

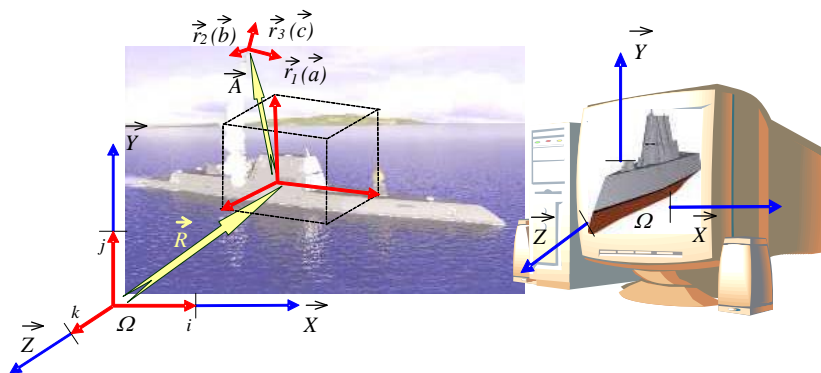


Рис. 4.21. Автоматизация координатных преобразований в компьютерной графике: в управлении подвижными объектами всегда используются многократные преобразования систем координат, связанных как с реальными объектами, так и с их представлением в счетно-решающих устройствах и терминалах ЭВМ.

2. Важным подтверждением корректности тензорных уравнений служит вычислительный эксперимент по моделированию обтекания нескольких тел произвольной формы стационарным потоком идеальной жидкости (*т. е. потоком, внутри которого отсутствуют вихреисточники*).

В этом случае все показанные здесь тензорные зависимости справедливы не только по отношению к смежным расчетным ячейкам, но и все дальнейшие расчетные ячейки имеют активные связи, осуществляемые строго по прямым линиям. Это означает, что моделирование обтекания тел идеальной жидкостью можно свести к простому интегрированию движущегося тела по его объему и смоченной поверхности. Для этого объем твердого тела заменяется эквивалентными диполями, а поверхность - вихреисточниками.

Тензоры-диполи должны обладать энергией для захвата объема жидкости и перемещения его с заданной скоростью, а каждый вихреисточник должен обладать той же интенсивностью, что и тензорный диполь, а его соотношение вихревой и излучающей части должно обеспечивать локальное искажение внешнего потока так, чтобы искажаемый внешний поток в секторе вихреисточника был сориентирован вдоль границы тела. Такая задача решается успешно, в том числе для нескольких движущихся тел одновременно.

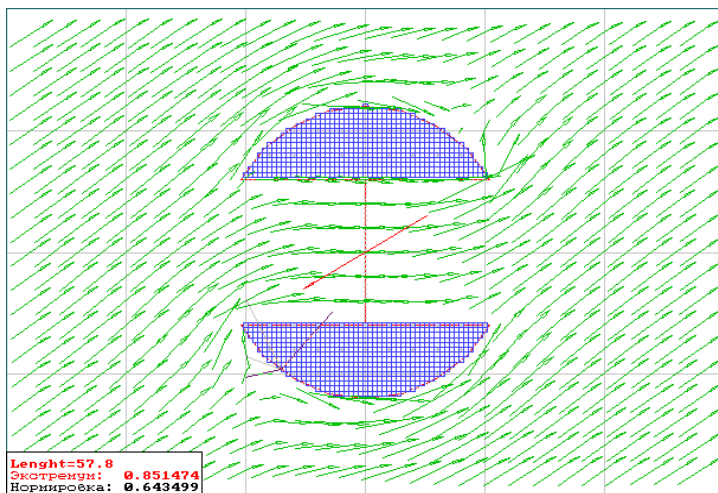


Рис. 4.22. Пример решения задачи об обтекании двух тел косым потоком, где параметры течения вычисляются простым интегрированием по объему и поверхности тел.

Показанный пример - в случае использования произвольных тензорных базисов, может служить своеобразной моделью дальнего взаимодействия между энергонапряженными корпускулами, что может быть с успехом использовано для формализации многих законов электромагнитных взаимодействий

Но все же основным результатом работы является обнаружение связи между численным описанием *крупных частиц жидкости* и ее реологическими параметрами, и, как следствие, возможность постановки вычислительных экспериментов для нестационарных процессов, допускающих сквозной контроль процессов вычислений, с возможностью адаптивного применения физических законов при изменении режимов течения.

3. Даже простая реализация вычислительных экспериментов о распространении длинных волн, построенная на основе тензорной модели, при реальном моделировании длинноволновых процессов в океане (*приливы, штормовые нагоны, цунами*) показывает хорошее соответствие модели натурным наблюдениям.

Тензорная модель обладает ярко выраженными дисперсионными свойствами (*увеличение периода при движении волны над неровным дном, или – так называемое «красное смещение»*); эта модель пока-

зывает хорошее согласование с наблюдениями за временем затухания длинноволновых процессов вблизи побережья (*декремент затухания характеризует корректность условий сохранения энергии длинноволновых процессов*); в случае успешного согласования аппроксимационных критериев в вычислительной модели получается хорошее соответствие формы и порядка следования длинноволновых импульсов моделируемого и реального цунами вблизи мелководных участков побережья (*корректное протекание интерференционных, дисперсионных и рефракционных процессов в акваториях с геометрически сложным рельефом морского дна*).

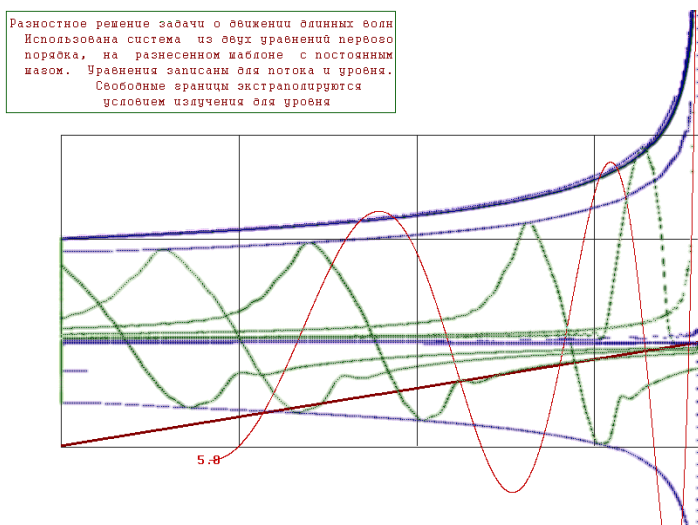


Рис. 4.23. Пример изображения на экране ЭВМ при тестировании алгоритмов по моделированию наката одиночной волны на пологий берег.

Изображены различные варианты оценочных и аналитических расчетов, а также несколько снимков численного моделирования волны с теми же начальными параметрами. Линия, начало которой отмечено параметром 5,0 – Бесселева функция, оптимизированная под точку экстремума с помощью коэффициента усиления волны по функции Грина.

При использовании полной длинноволновой модели, в которой задействуется «конвективное» перемешивание частиц жидкости, тензорная модель позволяет создавать вычислительные эксперименты с «сильно нелинейными свойствами». Тензорная модель легко позволяет задействовать гибридные схемы и внедрять в решение различ-



ные эмпирические зависимости, типа приливного геопотенциала, придонной вязкости и поверхностных напряжений при прохождении штормов и глубоких циклонов. Так как модель основана на принципах разделения решений по физическим процессам, то все инородные зависимости могут включаться или исключаться непосредственно в процессе проведения вычислительных экспериментов.

Построение длинноволнового эксперимента на векторных формализациях

Вычислительные эксперименты в гидромеханике по моделированию морских наводнений, оперирующие многомиллионными массивами данных с морской батиметрией и быстро меняющимися полями параметров состояния окружающей среды, представляются идеальным физическим процессом, имеющим строгую математическую основу для построения специального языка и его прямого алгоритмического представления, максимально приближенного к особенностям цифровой вычислительной техники, в том числе создающих проектные предпосылки для создания новых поколений компьютеров с глубоко распараллеленными процессами моделируемых физических процессов.

Гиперболическое уравнение в задаче о распространении *длинных волн на море* допускает каноническое представление математической модели и явную одношаговую постановку вычислительной задачи для построения нестационарных во времени вычислительных экспериментов и тестирования различных, и в том числе гибридных численных схем. Стандартная математическая модель в задаче о длинных волнах легко приводится к классической форме записи системы дифференциальных уравнений гидромеханики в частных производных с естественными физическими размерностями.

Формально эта модель, только после многочисленных допущений о малости влияния конвективных эффектов, тоже может быть сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка,

но в численном решении эти модели отнюдь не могут быть названы совершенно идентичными:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + C^2 \frac{\partial \eta}{\partial \vec{r}} = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} \right) = 0 \end{array} \right. \left(\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \vec{r}^2} = 0,$$

где: $H = \eta + D$ – полный уровень моря, с учетом высоты волны; $\vec{U} = \vec{V} \cdot H$ – скоростной поток жидкости учитывает влияние глубины моря; $C^2 = g \cdot H$ – скорость свободного движения волны здесь выступает в качестве весового коэффициента. В записи уравнений использовано формальное векторное представление пространственной производной для $\delta \vec{r}$, которая соответствует градиенту (grad), а в случае использования простых скобок – как дивергенцию (div), квадратных – ротор (rot). Однако такая формализация математических операций не дает возможности строгой и полной интерпретации физических процессов при построении реальных вычислительных экспериментов в гидромеханике, что обусловлено невозможностью сведения реологических свойств жидкости к одной - бесконечно малой точке.

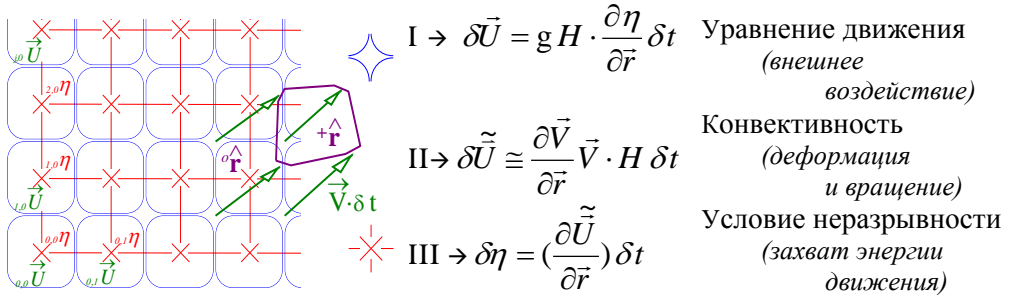


Рис. 4.24. Выделение элементарного вычислительного объекта – крупной частицы жидкости из традиционной сеточной области дискретного разбиения пространственного поля, построенного для моделирования гидродинамических процессов на цифровой дискретной ЭВМ. Важно отметить, что дифференциальные (разностные) операции на сеточном пространстве всегда соотносятся не с узлами сетки, а с центрами масс (объемов), образуемых этими узлами элементарных частиц, внутри которых действуют линейные аппроксимации.



Аналогичную по форме численную модель можно построить прямым рассмотрением сил (рис. 4.6) на границах малого деформируемого контрольного объема (*метод конечного объема*), в котором дифференциалы изначально трактуются в виде конечных разностей.

Полученная схема вычислений не связана непосредственно с волновыми (*гиперболическими*) решениями механики сплошных сред. Упрощающей особенностью длинноволновых решений является возможность пропуска этапа **II**, на котором определяются конвективные свойства течения. Для идеальной жидкости (*эллиптических уравнений матфизики*) формально отсутствует этап **III**, точнее он является контрольным по условию сохранения объема жидкости при исполнении первых двух этапов. А так как на этапах **I** и **II** невозможно в явной форме разделить искомые векторные потоки U , то явное численное решение и задача о сквозном анализе численного решения традиционными методами становятся трудноразрешимыми.

Традиционный вычислительный эксперимент по моделированию длинных волн в океане также ограничивается двумя этапами вычислений: **I** – где рассчитываются скорости течений для условно свободных частиц жидкости; и **III** – где нарушение сплошности среды в явном виде компенсируется накоплением внутренней энергии для этих же частиц. Даже столь упрощенные решения не удается в полной мере проанализировать традиционными методами дифференциального исчисления, в котором все расчеты сводятся к бесконечно малой и недеформируемой точке. Отрадно лишь то, что именно постановка исходной задачи в конечных разностях, определяемая как прямой вычислительный эксперимент, приводит к наилучшему согласованию результатов расчета с моделируемыми природными явлениями, что делает актуальным изучение математических моделей именно в такой изначальной постановке.

Включение в вычислительную модель этапа **II**, который, по сути, является интерполяционным оператором для учета малых, но конечных смещений моделируемых частиц жидкости, и переводит процесс моделирования к решению полной задачи механики сплошных

сред, с учетом реологических свойств жидкости, как вязкость, упругость и сжимаемость. Однако на этом пути стоят сложнейшие теоретические проблемы, рассмотрение которых возможно только с помощью тензорных формализаций исходных конечноразностных моделей гидромеханики.

Особенности реализации вычислительного эксперимента на примере задачи о накате волны на пологий берег

Рассмотрим примеры получения известных аналитических соотношений длинноволновой гидродинамики и критериев существования решения, изначально ориентированных на построение демонстрационного алгоритма, с использованием которого можно на практике проанализировать различные методы программирования.

1.1. *Формулы.* В предыдущих разделах рассматривались общие вопросы проектирования и постановки вычислительного эксперимента. Определены гидродинамические объекты и операции, которые однозначно описываются с помощью современных средств программирования для цифровых ЭВМ. Было введено скалярное определение плотности жидкости в виде коэффициента пропорциональности между внешней массовой силой и ускорением контрольных точек среды.

Последнее позволяет провести аналогичный геометрический анализ численных методов для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных, пусть это будут уравнения длинных волн.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + g \frac{d\eta}{d\vec{r}} = 0 ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} \right) = 0, \quad (2)$$

где: $H = \eta \cdot D$ - полный уровень моря; $\vec{U} = \vec{V} \cdot H$ - поток жидкости.

Математическая модель, составленная из уравнений (1) и (2) определена в одной, в данном случае абсолютной или эйлеровой си-

стеме координат, соответственно метод решения называют эйлеровым.

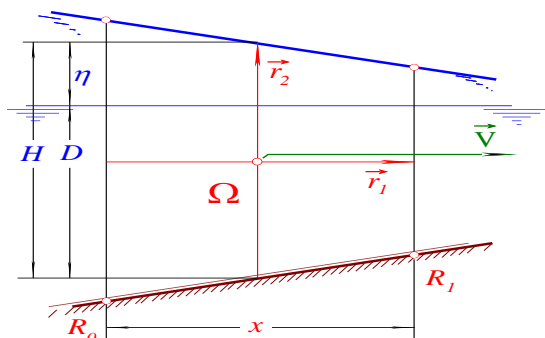


Рис. 4.25. Локальная геометрия длинноволнового движения жидкости.

В лагранжевом подходе уравнение (1) применяется к дискретным точкам, «вмороженным» в жидкость. Уравнение неразрывности в этом случае должно быть заменено соотношением, определяющим взаимные правила движения таких лагранжевых частиц жидкости. Например, для условия сохранения объема:

$$\overset{\wedge}{\det}(\vec{r}) = const, \quad (3)$$

где: $\overset{\wedge}{\vec{r}} = \vec{r}_i$ - симплекс базисных векторов, соединяющих смежные точки.

Уравнение движения для линейной теории длинных волн записывается в форме аналогичного векторного дифференциального уравнения, но только в частных производных, и отличается от записи полного уравнения движения (1) отсутствием конвективных составляющих движения даже в малых объемах моделируемого течения жидкости:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial \vec{r}} = 0, \quad (4)$$

формально это означает, что в процессе вычислений частица жидкости считается неподвижной.

1.2. *Диалектика методов.* Опираясь на известные численные методы [Белоцерковский, 1982], можно выделить три основных подхода к построению вычислительной модели:

- 1) решение в эйлеровых координатах;
- 2) решение в лагранжевых переменных;
- 3) смешанный лагранже-эйлеров подход или «метод крупных частиц».

Динамическое уравнение для всех трех подходов определяется одинаково, в обобщенном случае это закон движения в форме Ньютона. Различие же методов связано с различием в представлении деформационных свойств жидкости.

Первый подход – решение в эйлеровых координатах, характеризуется наибольшим математическим формализмом. Здесь математическая модель имеет строгую формулировку и представляется в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных. При решении практических задач исходная математическая модель существенно усложняется, особенно при постановке сложных граничных условий, характерных для моделирования гидродинамических процессов в реальных морских акваториях.

Второй подход – решение в лагранжевых переменных, принципиально отличается от первого тем, что уравнение движения применяется к некоторым свободным точкам, которые интерпретируются как «вмороженные в жидкость». Здесь, после явного применения динамического уравнения, на втором этапе расчетов производится согласование условий сохранения массы, энергии и количества движения. Основным достоинством лагранжевой расчетной схемы является принципиальная возможность моделирования сложных течений с произвольными границами, фактически превращая расчеты в классический вычислительный эксперимент с согласованием всех расчетных уравнений чисто инженерными методами. Главный недостаток – это требование огромных вычислительных ресурсов, а также отсутствие уверенности как в корректности моделирования гидродинамических процессов, так и в устойчивости численных схем.



Третий подход можно представить как обобщение двух первых. Если проводить такое обобщение с целью построения решения на минимальных машинных ресурсах, то основная идея метода сводится к следующему:

- жидкость рассматривается как совокупность крупных лагранжевых частиц, которые участвуют в свободном движении;
- эти частицы имеют конечные размеры и определяются в виде тензора формы совместно с деформациями;
- внешние силы интерпретируются как массовые и распределенные по всему объему такой крупной частицы.

В такой гидромеханической модели уравнение движения может быть обобщено таким образом, чтобы реакция на действие внешних сил определяла не только изменение вектора количества движения всей частицы, но и оказывала влияние на ее деформацию. Это будет означать, что каждая из крупных частиц имеет гидродинамические особенности в виде вихресточника и диполя, интенсивность которых будем называть некоторой внутренней энергией, оказывающей влияние на действие внешних сил. При этом под внешними силами можно понимать не полную результирующую силу, а, например, только градиент давления, или какую-либо другую объемную величину, которая доступна на конкретном этапе вычислительного эксперимента, в том числе получаемых с целью адаптации расчетной модели к оперативным наблюдениям за текущим состоянием морских акваторий.

1.3. *Объединение.* Этапы проведения вычислительного эксперимента могут быть описаны следующим образом:

- 1) Расчет нового местоположения и скорости для каждой крупной частицы, при этом тензор деформации будет влиять на величину изменения количества движения. Такое влияние будет учитывать предысторию рассогласований внешних сил с реакциями.
- 2) Пересчет тензора формы и деформации крупной частицы путем удовлетворения локальных законов движения жидкости. Факти-

чески здесь рассматривается взаимное влияние смежных частиц жидкости.

3) Удовлетворяются условия сохранения массы, энергии и количества движения для всей расчетной области. При этом расчетные величины могут быть интерполированы со смещенных лагранжевых узлов на исходную эйлерову сетку.

2.1. *Численные схемы.* Пусть алгоритмическая модель будет построена так, что на первом этапе рассчитывается новое поле скорости:

$${}^{k+1}\vec{V} = {}^k\vec{V} + \vec{F} \frac{\delta t}{\rho} = {}^kV_i - g \frac{\partial \eta}{\partial x^i}, \quad (5)$$

тогда поле уровней моря η будет выступать в качестве свободного скалярного параметра, с помощью которого согласуются условия неразрывности на втором этапе расчетов:

$${}^{k+1}\eta = {}^k\eta + \frac{\partial(V_i H)}{\partial X_i} \cdot \delta t. \quad (6)$$

Применяя лагранжев подход, учтем перемещение узлов, ограничивающих крупную частицу жидкости Ω :

$${}^{k+1}\vec{R} = {}^k\vec{R} + {}^k\vec{V} \cdot t + \vec{F} \frac{t^2}{2\rho} = {}^kR_i + {}^kV_i \cdot t - \frac{g}{2} \frac{\partial \eta}{\partial x^i} \cdot t^2. \quad (7)$$

Здесь поле скорости (5) определяется на подвижных узлах расчетной сетки { R } и таким образом снимаются допущения линейной теории.

Условие сохранения объема (3) может быть записано в явном виде

$${}^{k+1}H = \frac{{}^k x \cdot {}^k H}{{}^{k+1} x}. \quad (8)$$

Вычислительная модель, составленная из уравнений (5), (7), (10), соответствует совместному использованию эйлерова и лагранжевого подходов, где поле внешних сил рассчитывается в глобальной

системе отсчета, а поле скорости определяется на подвижных узлах сетки.

2.2. *Смещение и конвекция.* Если провести линейную интерполяцию скорости на исходную сеточную область, то будет получено дополнительное слагаемое для уравнения движения (4), которое будет определять конвективную составляющую течения:

$${}^{k+1}V = {}^kV - g \cdot \frac{d\eta}{dx} t + \frac{V(R_1) - V(R_0)}{x} t. \quad (9)$$

Выражение (9) определяет поле скорости в глобальной системе отсчета и в общем случае соответствует нелинейной теории длинных волн. Практическое же использование последнего выражения ограничено из-за повышенного порядка пространственной аппроксимации. Физические свойства жидкости по сути своей локальны и тоже не могут быть ни описаны, ни интерпретированы в единой системе отсчета.

Для получения результирующего выражения, рассмотрим совместное движение двух точек жидкости. Используя формулу (7) получим расстояние между точками R_1 и R_0 на новый момент времени:

$${}^{k+1}r = {}^{k+1}R_1 - {}^{k+1}R_0 = r + v_1 t + f_1 \frac{t^2}{2\rho}. \quad (10)$$

Если ${}^{k+1}r_i$ считать пробным вектором из тройки векторов определяющих тензор формы локального базиса, то для любой точки \vec{a} в этом базисе:

$${}^{k+1}r = {}^{k+1}R_1 - {}^{k+1}R_0 = r + v_1 t + f_1 \frac{t^2}{2\rho}. \quad (11)$$

2.3. *Анализ критериев.* Рассмотренный метод построения вычислительного эксперимента показан в обобщенном виде, поэтому пока не представляется возможным произвести оценки точности расчетов. Такие оценки существенно связаны с формой крупных частиц жидко-

сти, зависят от структуры программной реализации и методов доступа к информации в расчетной области.

Контроль же критериев существования решения, его динамическая интерпретация и модификация численной модели заложены в основу разработки предлагаемого вычислительного эксперимента. Реализация такого контроля выносится на этап построения конкретной алгоритмической модели. Он может проявляться в исследовании тензора формы \hat{r} или в установлении эмпирических зависимостей между частицами жидкости. Более высокий уровень анализа состояния частиц может быть построен с помощью тензора плотности $\hat{\rho}$ (тензора внутренней гидромеханики), что выразится в рассмотрении взаимодействия диполей, вихрей и источников, формализующих этот тензор.

Простейший критерий устойчивости может быть связан с абсолютной скоростью частиц жидкости:

$$\|\vec{r}_i\| \geq |\vec{V}| \cdot t. \quad (12)$$

Он означает, что смещение узлов за расчетный интервал времени не может превышать размеров частицы жидкости. Полученный критерий не характеризует общий ход решения, т.е. скорость - варьируемая величина. В задаче о длинных волнах общий критерий может быть получен с помощью ускорения свободного падения, которое не изменяется во всей расчетной области.

Пусть тензором формы \hat{r} будет расчетная ячейка с размерами: H – глубина моря; x – шаг сетки. Тогда распределенная массовая сила

$$\hat{f} = \hat{\rho} \cdot \hat{g}$$

обладает свойствами тензора скорости \hat{v} . Учитывая условие неразрывности, определенное с помощью смешанного тензора конвективных скоростей:

$$tr(\hat{v}^{\times}) = tr(\hat{f}^{\times}) = 0$$

перенесем ускорение w_z на вертикальную грань частицы:

$$w_x = g \cdot H/x.$$

В качестве критерия устойчивости используем интервал времени, за который вертикальная грань деформирующейся ячейки приобретает критическую скорость (12):

$$V_x \cdot t = g \cdot H \cdot t^2/x < x.$$

В результате получается традиционный критерий Куранта:

$$t \leq \frac{x}{\sqrt{g \cdot H}}, \quad (13)$$

где в знаменателе стоит скорость распространения силового возмущения, в данном случае это фазовая скорость длинных волн

$$C = \sqrt{g \cdot H}.$$

Необходимо отметить, что при получении критерия Куранта (13) было использовано условие неразрывности, выраженное через след тензора конвективных скоростей:

$$tr(\overset{\times}{v}) = 0$$

вместо условия сохранения объема

$$det(\hat{r}) = const. \quad (14)$$

В задачах аэродинамики аналогом глубины моря H является плотность жидкости ρ , которая формализует внутреннюю энергию крупной частицы. В данной работе не исследовался тензор плотности $\overset{\vee}{\rho}$, поэтому отметим только, что скалярность величины H является основным упрощающим отличием уравнений длинных волн от полных уравнений гидродинамики в тензорном представлении.

3.1. *Разностные уравнения.* Проведем построение разностных уравнений для одномерной задачи о распространении длинных волн.

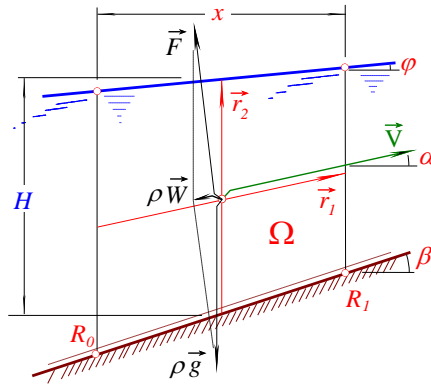


Рис. 4.26. Расчетная ячейка – как жидкая деформируемая частица.

Геометрия крупной частицы жидкости (рис. 4.8) определяется дуальными (взаимно обратными) тензорами:

$$\hat{r} = r_{ij} = \begin{vmatrix} x & 0 \\ x \cdot \tan \alpha & H \end{vmatrix}; \quad (15)$$

$$\overset{\vee}{r} = \hat{r}^{-1} = \begin{vmatrix} 1/x & 0 \\ \tan \alpha / H & 1/H \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Объем частицы r :

$$\Omega = \det(\hat{r}) = x \cdot H. \quad (17)$$

Уравнения движения получаются после одновременного применения граничных условий на свободной поверхности и условий непротекания на дне моря, подчеркивая их единую суть, как полноценных уравнений механики:

1. Внешняя массовая сила должна иметь направление по нормали к свободной поверхности;
2. Вертикальная составляющая внешней силы определяется ускорением свободного падения g , следовательно

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} -\rho \cdot g \cdot \tan \varphi \\ \rho \cdot g \end{vmatrix}. \quad (18)$$

3. Условие непротекания моделируется компенсацией нормальной составляющей внешней силы в локальной системе отсчета

$$\begin{aligned} \overleftarrow{F} &= \overset{\vee}{r} \cdot \overrightarrow{F} = \rho \cdot g \cdot \left| \begin{array}{c} \frac{\tan \varphi}{x} \\ \frac{\tan \varphi}{\Omega} (\tan \alpha + 1) \end{array} \right|; \\ \overleftarrow{F} &= \langle \text{отражение} \rangle = \rho \cdot g \cdot \left| \begin{array}{c} \tan \varphi \\ x \\ 0 \end{array} \right|; \\ \overrightarrow{F} &= \hat{r} \cdot \overleftarrow{F} = -\rho \cdot g \cdot \left| \begin{array}{c} \tan \varphi \\ \tan \varphi \tan \alpha \end{array} \right|. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь угол α определяет заданное направление движения частицы жидкости, φ - угол склона волны:

$$\tan \varphi = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (20)$$

Таким образом получено традиционное уравнение движения теории длинных волн на мелкой воде:

$${}^{k+1}V = {}^kV - g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot t \quad (21)$$

или
$$\frac{\delta V}{\delta t} + g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

При получении формулы (21) все тензорные операции были выполнены аналитически, поэтому из программы можно исключить ее функциональное наполнение. Сам же расчетный алгоритм будет соответствовать традиционным методам проведения вычислительного эксперимента.

3.2. *Алгоритмы.* В соответствии со структурой матрицы взаимодействия программ при проведении вычислительного эксперимента (рис.4.2), алгоритм решения задачи будет состоять из трех этапов,

каждый из которых, в зависимости от уровня вычислительных процедур, будет определяться соответствующей строкой этой функциональной матрицы:

1 этап:

По заданным координатам узлов расчетной сетки { R } и полю уровней моря { H }, рассчитываются внешние силы для центров объема крупных частиц жидкости (ячеек расчетной области)

$$F = -\rho \cdot g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (22)$$

Здесь можно проконтролировать величину угла склона волны, и если искусственно ограничить этот угол 60-ю градусами, что соответствует разрушению стоячей волны, то в решение будет внесено рассеяние энергии, соответствующее образованию бора.

Важно, что в расчетной схеме не предусматривается сохранение поля внешних сил, то результатами первого этапа будут:

- Новое поле скоростей:

$${}^{k+1}\vec{V} = {}^k\vec{V} + \vec{F} \cdot \frac{t}{\rho}; \quad (23)$$

- Новые координаты расчетных узлов:

$${}^{k+1}\vec{R} = {}^k\vec{R} + {}^k\vec{V} \cdot t + \vec{F} \cdot \frac{t}{2\rho}, \quad (24)$$

где \vec{V} и \vec{F} относятся к координатам узлов \vec{R} .

2 этап:

На первом этапе рассматривались свободные горизонтальные перемещения частиц жидкости. Это допустимо, если уровень моря считать независимым скалярным параметром, который характерен для решения задач о сжимаемой жидкости. Тогда условие сохранения объема можно выполнить путем расчета нового поля уровней моря (8):

$${}^{k+1}H = \frac{{}^k x^k H}{{}^{k+1}x}.$$

На этом этапе расчетов необходимо контролировать критерии существования решения: ${}^{k+1}x > 0$ и устойчивости (12), (13). В случае нарушения критериев можно прибегнуть к полуаналитическим аппроксимациям решения внутри крупных частиц жидкости или использовать соответствующие эмпирические соотношения.

3 этап:

Очевидно, что предлагаемое деление на расчетные этапы плохо сопоставляется с реальными процессами течения жидкости. Суть такого деления скорее соответствует цели сопоставления нового подхода с известными расчетными схемами. Например, второй этап не нужен: если в уравнение движения (24) были бы включены тензорные составляющие \hat{r} , \hat{v} и \hat{f} . Третий этап завершает моделирование решения на неподвижной эйлеровой сетке, здесь новое поле скоростей и уровней моря интерполируется на исходные расчетные узлы:

$$\begin{aligned} V &= V(R); \\ H &= H(R). \end{aligned}$$

Здесь же производится корректировка решения на границах расчетной области:

- Излучение волны из расчетной области:

$${}_{cp} V = \pm \eta \sqrt{gH};$$

- Генерация входящей волны:

$${}_{cp} H = f(R \pm T \sqrt{gH}).$$

3.3. *Результаты моделирования.* Описанный алгоритм решения был реализован на объектно-ориентированном языке программирования, типа C++. Ключевым элементом реализации программной среды явилось достижение принципиальной возможности для быстрой перестройки всех расчетных схем, необходимых для постановки модели-

рования прикладных задач, основанных на известных численных решениях для систем конечно-разностных уравнений, допускающих явные численные схемы для реализации нестационарных волновых задач (*с преимущественно гиперболическими свойствами*). Несмотря на принципиальное понимание физической сути и особенностей моделируемых процессов в новых вычислительных экспериментах, обобщение математических моделей для решения прикладных задач о воздействии штормовых волн на морские инженерные сооружения приостановлены на стадии разработки трехмерной графической среды, условия для создания которой возникли только в настоящее время, когда компьютеры с мощными графическими возможностями стали доступны для проведения исследовательских работ.

По приведенному выше алгоритму можно отметить, что последний интерполяционный этап обладает худшей устойчивостью и на нем трудно применять сколь-нибудь обоснованные корректировки в процессе решения. Если третий этап исключить, и строить решение на подвижных узлах, то возникает возможность упрощенного моделирования выхода волны на пологий берег, где существенно увеличиваются скорости частиц жидкости и растет угол склона волны. Интерполяция, которая выполняется на втором этапе для пересчета внешних сил с центров объема частиц на узлы неподвижной сетки, вносит в решение диссипативные эффекты и может привести к нарушению устойчивости и разрушению самого решения. Для снятия этих ограничений можно отказаться от второго этапа в том виде, как он описан в этой работе. В этом случае декларативные принципы программирования на языке C++ приводят к загромождению программы, неоправданному повторению многих расчетных операций и полной потере связи между оформлением текста программы и описываемого физического явления. Разрешение последнего противоречия возможно путем совместного и независимого использования функционального и алгоритмического методов программирования [Уинстон, 1980] на основе принципов разделения доступа ко всем объектам числовой информации и контекстно-зависимым исполнительным процедурам.

Кинематическая модель расчета волновых фронтов и лучей

Кинематические модели, так же как и графическая интерпретация данных естественных наблюдений и результатов предвычисленных вычислительных экспериментов, позволяет в кратчайшие сроки провести экспресс-анализ обстановки на море, сразу же после поступления данных о проявлении опасных морских явлений. Такой экспресс-анализ может быть выполнен многократно, по мере изменения или поступления новых исходных данных.

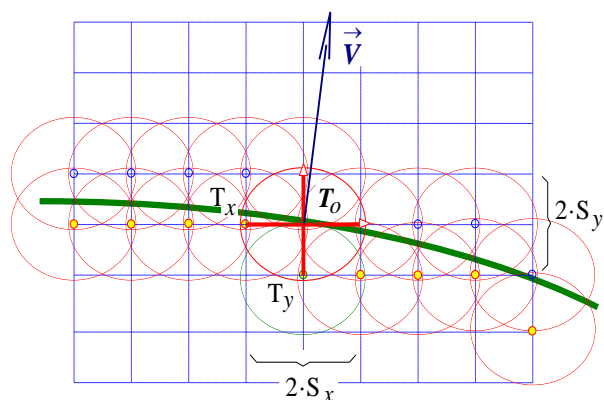


Рис. 4.27. Каждый такт вычислений, в рамках процесса движения фронта волны по принципу Гюйгенса, нацелен на поиск точек, наиболее близких к текущему времени на фронте волны T_0 . В найденной точке время уточняется с помощью расчета направления движения фронта волны, и принимается за новое текущее расчетное время, при необходимости добавляются новые предфронтальные точки или уточняется время в уже имеющихся, затем поиск повторяется для выбора новой узловой точки на сеточной области, охваченной текущим фронтом волны.

Кинематическая модель распространения волновых фронтов и лучей основывается на сортировке точек с минимальными отсчетами времен добегаания длинных волн, полученных на основе принципа Гюйгенса для точечных излучателей. В настоящее время реализована модель, использующая 4-точечный шаблон, на котором вычисляются производные по направлению (рис. 4.9).

Поле времен получается достаточно гладким, чтобы по нему восстанавливались не только линии изохрон, но и линии лучей, которые показывают маршруты движения длинных прогрессивных волн.

Указанную вычислительную модель можно отнести к гидродинамическому моделированию нулевого порядка, по которому возможно построение поля коэффициентов усиления на фронтах первого вступления длинных волн, когда коэффициент усиления вычисляется из условия сходимости лучевых линий и не зависит от периода волнения.

Основная часть алгоритма основывается на поиске фронтовой точки (среди точек включенных в специальный список, рис. 4.9), у которой текущее время (пробега) является минимальным. Найденная точка используется в качестве излучателя, вовлекая в список фронтовых точек ближайшие смежные точки, сама же излучающая точка при этом исключается из фронтового списка. На фронтовом шаблоне типа “крест”, кроме вычисления минимальных времен, производится уточнение времени в центре шаблона с помощью оценки направления излучения по всем четырем лучам шаблона.

Точный учет сферичности Земли на карте в Меркаторской проекции, обладающей конформностью в преобразовании локальных масштабов, может быть осуществлен с помощью соответствующей корректировки исходного поля скоростей распространения длинных волн:

$${}_{ij}^t C = {}_{ij} C / \cos {}_{ij} \varphi,$$

искусственно увеличивающей эту скорость, пропорционально изменению масштаба карты.

Такое высокоскоростное прямое численное моделирование позволяет динамически экспериментировать при анализе гидродинамики длинноволновых процессов в открытом море и вблизи побережья, в наглядном графическом виде показывать самые тонкие особенности численных схем и моделируемых природных явлений, создавая тем самым условия для решения экспертных задач при анализе гидромеханики морских инженерных сооружений.

Заключение

В настоящей книге сделана первая попытка обобщения и систематизации практического опыта построения и отладки сложных вычислительных моделей для решения различных задач чистой гидромеханики, с разной долей успеха примененных автором для моделирования потоков вблизи сложных тел, крыльев, струй и движителей. В последние годы разнообразие задач для тензорного моделирования ограничивалось скучной задачей о штормовых нагонах и других длинных волнах на море и на его мелководьях. Но и в кажущейся простой инженерной задаче, всегда находятся математически неразрешимые проблемы, с легкостью устраняемые чисто алгоритмическими эвристиками. Изобретательство в численных методах не редкость, что и придает им особую красоту, иногда - надежность, и всегда - проблески углубленного осмысления физической сути новых вычислительных моделей. Инженерные задачи обязательно превращаются в повседневный инструментарий инженера-практика, и в них со временем сохраняются только самые качественные и надежные технические решения, способные к формированию обновленных законов механики и уточных математических идей.

Привычные тензорные числовые объекты и математические операции с ними, основанные на фундаменте классической механики, вполне выдерживают математическую поверку на полноту и точность количественного описания явлений и процессов гидромеханики, ее действительного мира неразрывной природы. И все же, это лишь начало пути в освещении оптимальности или достаточности новой формы математического представления законов механики, в их многообразии кажущихся связей между кинематикой и энергией движущихся жидкостей, в загадочных живых силах физических полей и действительной жизни природы.

Показанные в книге теоретические исследования и решения прикладных задач относятся, в первую очередь, к созданию морских вычислительных экспериментов, активно изучавшихся в стенах Ленинградской академической школы корабельной гидромеханики, теории и мореходности корабля в середине 80-х прошлого XX века, совместно с добрыми учителями и соавторами многих ключевых идей А.Н. Холодилиным и А.Ш. Ачкинадзе, создавшими в те годы самые благоприятные условия для научных дискуссий по инженерным проблемам гидромеханики и мореходности корабля.

Алфавитный указатель

- Алгоритм 6-7, 9-15, 25, 47, 65, 72, 86, 94-107, 109, 117, 126, 128-129, 137-138, 157, 160, 163, 166-168, 171-178, 194-197
- Анализ 15, 22-24, 49, 74, 76, 100, 107, 158, 164-165, 168-170, 175, 178
- Базис, координаты 19, 20, 26, 48, 79, 81, 83, 131, 133
- абсолютный 9, 16-20, 26, 46-47, 77, 81-84, 99, 131, 148-153
 - локальный 9, 14, 16-20, 38, 47, 77-84, 80, 90-94, 107, 133, 156
 - дуальный 18, 20, 22, 63, 82, 87, 114, 131, 150, 161, 193
 - смешанный 8, 17, 26, 67, 83-84, 99, 126, 132, 149, 191
 - декартовый 8, 17, 20-21, 78-79, 115, 133-134
 - ковариантный 18, 79, 82, 137
 - контравариантный 19, 79, 81-84, 137
 - геометрический (векторный) Евклида 8, 18, 21
- симплекс 16, 79, 93, 186
- Время 9, 15, 26, 38, 89, 46, 130, 166, 198
- абсолютное 9, 24, 38, 46-47, 75, 77, 89, 130,
- Внутренняя энергия 7, 17, 34, 49, 87, 91, 93, 117, 140, 148-151, 161
- Вычислительный эксперимент 5, 13, 25, 28, 50, 65, 72, 76, 87-92, 94-98, 99, 101, 104-107, 114-117, 120-124, 126-127, 129, 141, 147, 152, 154, 171
- Гидродинамика 51-52, 57-58, 64, 68, 69, 71, 112, 116, 118, 120-122, 154
- Гидромеханика 5, 25, 34, 114, 126, 145, 155, 157, 159, 164, 200,
- Ньютона 9, 87, 148, 155,
- Кинематика 8, 18, 52, 57, 60, 67, 91, 112, 121, 142, 148, 155, 163, 175
- Инерция 17, 59, 60, 87, 93, 114, 136, 140, 148-149, 151, 155-157
- Масса 15, 48, 55, 59, 87, 91, 115, 135, 149, 151, 155, 167-168, 170, 183
- Напряжение 68, 76, 117, 123, 151, 159-160, 164-165, 169, 170
- Плотность 17, 52, 55, 115, 117, 136, 148-150, 157, 159, 165, 169-170
- Действия, вычислительные операции 61, 82-83, 132, 136, 138, 173,
- сложение 80, 103, 108, 137, 142, 160,
 - умножение, произведение 81, 83, 85, 108, 137, 142, 160,
 - логическое сопоставление и правила 87, 96, 108, 129, 132, 137, 141, 160, 167, 200,
- Живые силы 49, 91, 114, 140, 149, 151, 155-156, 179, 183, 188
- Исчисление флюксий 9, 27, 29, 48-50, 143-144, 146, 148, 150
- Конвективные скорости 8, 52, 76, 92, 117, 140, 145, 149, 156, 158, 183
- Континуальная логика 9, 13, 21, 24, 34, 48, 49, 65, 76, 93, 107, 132-134
- диалектика 21, 22-23, 28, 32, 36-37, 41, 105, 175, 187

- трилектика 6, 21, **24-25**, 28, 37, 103
- Непротиворечивое проектирование 21-22, 25, 28, 36, 86, 94-112
- Крупная частица жидкости 8, 13, 16-18, 24, 26, 48, 52, 57, 72-75, 87-105,
111-121, 123-125, 133-136, 138-139, 144, 148, 154-162, 170
- малый континуум **14**, 16, 24, 48, 76, 93, 133-134, 140, 165
- Математика 5, **8**, 15, 23, 40, 47, 65, 86, 101, 178,
 - вычислительная **9**, 12, 28, 57, 72-75, 89, 92, 97, 114, 126, 171
 - тензорная 8, 11-13, **17**, 24, 64, 73, 88-90, 93, 97-98, 126, 128
- Модель математическая 64, 96, 126-127, 146-147, 173
 - идеальной жидкости 51, 53, 57, 67-68, 116, 121, 144, 150, 179, 184
 - обтекания тел 56-57, 60-63, 179
 - трохоидаьных волн Герстнера 12, 57, 63-64, 70
 - простой и двойной слой 55, 61, 63, 121, 138, 169, 179
 - - вихреисточники и диполи 12, 55-64, 91, 151, 156, 179, 188, 191
 - непрерывность 5, 8, 17, 25, 27, 33, 38, 43, 88, 127, 173
 - скалярный потенциал 53-61, 65-71
- Программирование 6-7, 10-11, 21-22, 25, 28-29, 89, 96, 109, 126, 141, 175
 - функциональное 22, 25, 28, 88, 101-103, 105, 110, 112, 117, 173,
 - декларативное 22, 72, 95, 97, **100**, 106, 109-110, 171-172, 113,
 - объектно-ориентированное, C++ 92, 94, 99, 100, 105, 109, 111,
- Тензорное исчисление **8**, 15, 16, 18, 24, 76, 81-82, 84, 125, 152, 159, 174
 - матрица 8, 13, 17, 19-20, 72, 79, 81-85, 105-109, 126, 132, 152
- Троичная логика 6, **24-25**, 32, 37, 94-109, 171
 - идея, закон, материя 8-11, 13, 21, 28, 36, 50, 95, 103-105, 107, 188
- Уравнения гидромеханики 9, 51-54, 64-75, 91, 118, 121, 129, 132, 154
 - движения 52-53, 71, 90, 117, 144, 148, 151, 164, 173, 175, 193
 - неразрывности 52, 54, 70, 116, 135, 183, 186, 192
- Флюиды 43, 45-46
- Элементарный числовой объект 13, **14**, 19, **93-94**, 111-112, 127, 141, 153
 - скаляр **15**, 20, 47, 52, 54, 75, **77**, 81, 89, **92**, 108, 111, 137, 160
 - вектор 8, **16-20**, 41, 52, 56, **78-85**, **92**, 111, 133-152, 155-160
 - - длинный, 19, 26, 113, 135
 - - дифференциальный 49, 66, 73, 109, 113, 116, 131, 149, 164, 183
 - - градиент 54, 60, 75, 146, 183, 188
 - тензор 6, 7, 14, **16**, 19, 26, **92**, 111, 115, 137,
 - - вырожденный 20, 85, 112, 136, 138, 144, 149,
- Эфир 5, 6, 29, 33-35, 38, 46, (64), 89, 125, 206
- Язык 8-11, 21, 25, 28, 42, 92, 95-97, 99-107, 110-113, 117, 141, 172-175, 197

Указатель имен

Фалес Милетский (625-547 гг. до н.э)	10, 30, 31-32 , 35, 41
Пифагор (570-497 гг. до н.э)	32-33 , 42
Анаксагор (500-428 гг. до н.э)	10, 33-36 , 71
Левкипп (500~440 гг. до н.э)	35
Эмпедокл (484-424 гг. до н.э)	34-35 , 203, 205
Сократ (469-399 гг. до н.э)	35-36 , 205
Демокрит (460~370 гг. до н.э)	35
Платон (427-347 гг. до н.э)	22, 35-37 , 42, 49, 205
Аристотель (384-322 гг. до н.э)	37-41 , 205
Евклид (<i>Euclides</i> , 340-287 гг. до н.э)	8 , 18, 21
Архимед (<i>Archimedes</i> , 287-212 гг. до н.э.)	
Папп Александрийский (2-я пол. III в.)	86
Роджер Бэкон (1214-1292)	39 , 205
Леонардо да Винчи (1452-1519)	39-41 , 205
Уильям Гильберт (1544-1603)	41
Галилео Галилей (1564-1642)	8 , 41-43
Рене Декарт (1596-1650)	8 , 10, 17, 41, 43-46 , 51, 78
Пьер Ферма (1608-1665)	44
Блез Паскаль (1623-1662)	44
Роберт Бойль (1627-1691)	44
Христиан Гюйгенс (1629-1695)	44 , 198
Роберт Гук (1635-1703)	44 , 75, 126, 157
Исаак Ньютон (1642-1727)	8-10, 17, 27, 29, 41, 44-51 , 75, 77, 86-88, 114-116, 125-126, 143-144, 148, 151, 155-157, 164, 166, 205
Готфрид Лейбниц (1646-1716)	9 , 44-46, 49 , 205
Эдмунд Галлей (1656-1742)	44
Даниил Бернулли (1700-1782)	10, 44, 51 , 53

Леонард Эйлер (1707-1783)	9, 28, 51-54 , 56, 58-61, 64, 71-73, 75-76, 90-91, 116-118, 120-121, 135, 144-147, 151, 154, 164, 167, 185, 187, 189, 197, 207
Жан Лерон Д'Аламбер (1717-1783)	58- 59
Пьер Симон Лаплас (1749-1827)	54 , 205
Франц Иосиф Герстнер (1756-1832)	63- 64 , 122
Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц (1821-1894)	57 , 64
Кельвин, Уильям Томсон (1824-1907)	10, 12, 57 , 64, 205
Джеймс Клерк Максвелл (1831-1879)	10, 64 , 206
Осборн Рейнольдс (1842-1912).	
Николай Егорович Жуковский (1847-1921)	10, 12, 64 , 151, 206
Ипполит Степанович Громека (1851-1889).	52- 53
Алексей Николаевич Крылов (1863-1945)	29, 45, 125, 205, 209
Сергей Алексеевич Чаплыгин (1869-1942)	
Николай Петрович Кастерин (1869-1947)	64 , 206
Людвиг Прандтль (1875-1953)	12, 16, 206
Лев Герасимович Лойцянский (1900-1991)	206
Ярослав Иосифович Войткунский	12, 60, 206, 209
Вальтер Борисович Амфилохийев	12
Александр Николаевич Холодилин	200, 209
Александр Шамильевич Ачкинадзе	200
Александр Николаевич Шебалов	11-12, 210
Борис Валентинович Мукосеев	12-13, 210
Юрий Михайлович Давыдов	13, 73, 74, 207

Литература

Историческое наследие

1. *Аристотель*. Сочинения в четырех томах, М., Мысль, 1976.
2. *Богомолов А.С.* Античная философия, М., Московский университет, 1985, 368 с.
3. *Фрэнсис Бэкон*. Сочинения в двух томах, М., Мысль, 1971.
4. *Кессиди Ф.Х.* Сократ. М., Мысль, 1988, 223 с.
5. *Крылов А.Н.* Мои воспоминания. Л.: Судостроение, 1979. 480 с.
6. *Воронцов-Вельяминов Б.А.*, Лаплас, М., Наука, 1985, 286 с.
7. *Диоген Лаэртский*. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов, М., Мысль, 1986, 571 с.
8. *Готфрид Вильгельм Лейбниц*. Сочинения в четырех томах, М., Мысль, 1984.
9. *Леонардо да Винчи*. Суждения о науке и искусстве. СПб.: Азбука, 2001. 704 с.
10. *Марио Льюцци*. История Физики, М., Мир, 1970, 464 с.
В книге приводится масса интересных идей и фактов поступательного развития физических наук в Европе, с частым упоминанием В. Томсона (Кельвина), Дж.Дж. Томсона и других малоизвестных ученых.
11. *Исаак Ньютон*. Математические начала натуральной философии / Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Том VII. Перевод с латинского. М.-Л.: изд-во АН СССР, 1936. Репринтное воспроизведение: М.: Наука, 1989, 712 с.
Предисловие А.Н. Крылова начинается словами: «Начала натуральной философии» Ньютона составляют незыблемое основание Механики, Теоретической Астрономии и Физики. Лагранж назвал это сочинение «величайшим из произведений человеческого ума», поэтому само собой ясна та польза, которую всякий может извлечь из учения этого произведения. Сочинение Ньютона при жизни автора издано три раза: в 1686, 1713 и 1725 гг. Затем было еще пять или шесть изданий на латинском языке. Последние из этих латинских изданий исполнено в Глазгоу в 1871 г. попечением В. Томсона (лорд Кельвин) и Г. Блакбурна.
12. *Платон*. Диалоги, М., Мысль, 1986, 607 с.
13. *Платон*. Собрание сочинений в четырех томах, М.: Мысль, 1990.
14. *Рожанский И.Д.* Анаксагор, М., Мысль, 1983, 143 с.
15. *Семушкин А.В.* Эмпедокл. М., Мысль, 1985, 191 с.
16. *Секст Эмпирик*. Сочинения в двух томах, М.: Мысль, 1975.

Классическая гидромеханика

17. *Артюшков Л.С.* Динамика неньютоновских жидкостей. СПб: Изд. ГМТУ, 1997. 460 с.
18. *Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 182 с.
19. *Войткунский Я.И., Фадеев М.И., Федяевский К.К.* Гидромеханика. Л.: Судостроение. 1982. 456 с.
Всеобъемлющий учебник классической гидромеханики, дающий ознакомление и глубокое познание прикладных задач механики жидкости.
20. *Жуковский Н.Е.* Собрание сочинений. Т.2. Гидродинамика. М.:Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1949, 765 с.
21. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика. М.:Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950, 812 с.
22. *Кастерин Н.П.* Обобщение основных уравнений аэродинамики и электродинамики. Доклад на особом совещании при Академии наук СССР 9 декабря 1936 г. М., Изд-во АН СССР, 1937. – 16 с.
23. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.:Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950, 678 с.
24. *Лоренц Г.А.* Теории и модели эфира. М.,Л.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР. Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1936. 68 с.
25. *Максвелл Джеймс Кларк.* Трактат об электричестве и магнетизме. Т.1,2. М.: Наука, 1989, 416,437 с.
26. *Ньюмен Дж.* Морская гидродинамика. Л.: Судостроение, 1985. 368 с.
Наилучшее изложение общемировых идей классической гидромеханики, доведенных до законченных решений задач о мореходности корабля.
27. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. М.: РХД, 2000, 574 с.
28. *Прандтль Л., Титъенс О.* Гидро- и аэромеханика. Т.1. Равновесие. Движение жидкостей без трения. 1932. 222 с., Т.2. Движение жидкостей с трением и технические приложения. М. Л.: Государственное технико-теоретическое издание, 1935. 312 с.
29. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977, 440 с.
30. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.1,II. М.: «Лань», 2004. 528,560 с.
31. *Томсон Дж.Дж.* Электричество и материя. М.,Л.: Государственное издательство. 1928. 263 с.

Вычислительная гидромеханика

32. *Андерсен Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Том 1,2. 726 с.
33. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 519 с.
34. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 370 с.
35. Вычислительные методы в гидромеханике. Ред. *Б. Олдер, С. Фернбах, М. Ротенберг*. М.: Мир, 1967. 384 с.
В коллективной монографии известных американских ученых освещены современные методы численного решения задач о неустановившихся движениях сплошной среды. Рассматриваются подходы Эйлера и Лагранжа, характеристический метод, а также приведена оригинальная работа Харлоу о «Методе частиц в ячейках».
36. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
37. *Давыдов Ю.М.* Дифференциальные приближения и представления разностных схем: Учебное пособие. М.: Изд. МФТИ, 1981. 131 с.
38. *Давыдов Ю.М.* Пакет прикладных программ КРУЧА. М.: Госфонд алгоритмов и программ, Инв.№ П004355, 1980. 150 с.
39. *Давыдов Ю.М., Скотников В.П.* Метод «Крупных частиц»: вопросы аппроксимации, схемной вязкости и устойчивости. М.: ВЦ АН СССР, 1978. 72 с.
40. *Давыдов Ю.М., Скотников В.П.* Анализ метода «Крупных частиц» с помощью дифференциальных приближений. М.: ВЦ АН СССР, 1979. 72 с.
41. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
42. *Харлоу Ф.* Численный метод частиц в ячейках для гидродинамики. // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, стр. 316-342.
43. *Хокни Р., Иствуд Дж.* Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987, 638 с.
44. Численное решение многомерных задач газовой динамики. *С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов*. М.: Наука, 1976. 400 с.
45. *Шевелев Ю.Д.* Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики. М.: Наука, 1986. 368 с.

Тензорный анализ

46. *Аквис М.А., Гольдберг В.В.* Тензорное исчисление. М.: Физматлит, 2003. 304 с.
47. *Астарита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
Видимо, это одна из лучших книг о решении самых разнообразных прикладных задач с использованием тензорных математических моделей.
48. *Бабкин А.В., Селиванов В.В.* Прикладная механика сплошных сред. Т.1. Основы механики сплошных сред. М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 1998. 368 с.
49. *Димитриенко Ю.И.* Тензорное исчисление. М.: Высшая школа, 2001. 575 с.
50. *Кильчевский Н.А.* Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 168 с.
51. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 424 с.
52. *Корнев Г.В.* Тензорное исчисление. М.: МФТИ, 2000. 240 с.
В первой части излагаются ортогональные тензоры с нижними индексами, затем абстрактное тензорно-матричное исчисление усложняется квадратичными формами и четырехмерным пространством.
53. *Курбатова Г.И., Филиппов В.Б.* Элементы тензорного исчисления. Основы моделирования движущихся сплошных сред. Учебное пособие. СПб: Изд-во СПб университета. 2002. 232 с.
54. *Мак-Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ, М.: Наука, 1963, 411 с.
55. *Мукосеев Б.В.* Аналитическая механика: Учебное пособие. Л.: Изд.ЛКИ, 1980. 69 с.
56. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука. 1971. 376 с.
57. *Файн А.В., Храмушин В.Н.* Тензорное представление алгоритмов вычислительной гидромеханики. / Вестник ДВО РАН. 2004, № 1(113). С. 52-68.
58. *Храмушин В.Н.* О постановке вычислительного эксперимента в гидромеханике. Реализация задачи о распространении длинных волн. Препринт. Южно-Сахалинск: ИМГиГ, 1988. 41 с.
59. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М.: Физматгиз, 1963, 540 с.

Теоретическая и корабельная гидромеханика

60. Биогидродинамика плавания и полета / Механика. Новое в зарубежной науке. № 23. Перевод с английского под редакцией *В.М. Ентова*. М.: Мир. 1980. 177 с.
61. *Благовецкий С.Н.* Качка корабля. Л.: Судпромгиз, 1954. 520 с.
62. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 760 с.
63. *Войткунский Я.И.* Сопротивление воды движению судов. Л.: Судостроение. 1988. 288 с.
64. *Годунов С.К.* Элементы механики сплошной среды, М: Наука, 1963. 303 с.
65. *Джилмер Томас С.* Проектирование современного корабля. Л.: Судостроение, 1984. 280 с.
66. *Дуванин А.И.* Волновые движения в море. Л.: Гидрометеиздат, 1969. 223 с.
67. *Егоров Н.И.* Физическая океанография, Л.: Гидрометеиздат, 1974. 456 с.
68. История штормовой мореходности (от древности до наших дней) : по материалам поисковых и научно-исследовательских работ, Калининград, 1975 – Владивосток–Санкт-Петербург–Сахалин, 2003 / *В.Н. Храмушин, С.В. Антоненко, А.А. Комарицын и др.* – Южно-Сахалинск : Сах. кн. изд-во, 2004. – 288 с., ил. + 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
69. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Части 1, 2. М.: Физматгиз, 1963. 584,728 с.
70. *Крылов А.Н.* Избранные труды. Л.: АН СССР, 1958. 804 с.
71. *Крылов А.Н.* Лекции о приближенных вычислениях. Л.: АН СССР, 1933. 541 с.
72. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.,Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1947, 928 с.
73. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 570 .
74. *Павленко Г.Е.* Сопротивление воды движению судов. М.: Вод-трансиздат, 1953. 507 с.
75. *Павленко В.Г.* Основы механики жидкости. Л.: Судостроение, 1988. 240 с.
76. *Попов Д.Н., Паниотти С.С., Рябинин М.В.* Гидромеханика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 384 с.

77. *Рождественский К.В.* Асимптотические методы в гидродинамике судна : Учебное пособие. Л.: Изд.ЛКИ, 1984. 82 с.
78. *Романенко Е.В.* Гидродинамика рыб и дельфинов. М.: Изд-во КМК, 2001. 411 с.
79. *Филин А.Н.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т.1, М.: Наука, 1975, 832 с.
80. *Холодильин А.Н.* Стабилизация судна на волнении. Л.: Судостроение, 1972. 232 с.
81. *Храмушин В.Н.* Поисковые исследования штормовой мореходности корабля. Владивосток: Дальнаука, 2003. 172 с.
82. *Шебалов А.Н.* Теория волн и волнового сопротивления тел при неустановившихся режимах движения. Л.: Изд.ЛКИ, 1981. 120 с.
83. *Шебалов А.Н.* Плоские задачи теории волнового сопротивления: Учебное пособие. Л.: Изд.ЛКИ, 1983. 109 с.
84. *Шебалов А.Н.* Нелинейная теория волн и волнового сопротивления: Учебное пособие. Л.: Изд.ЛКИ, 1984. 107 с.
85. *Якоби К.* Лекции по динамике. Л.:М.: Главная редакция общетехнической литературы, 1936, 271 с.
86. *Khramushin Vasily N.* Stormy seakeeping and navigation safety researches for hull form design / Proc. of the 2nd Asia-Pacific Workshop on Marine Hydrodynamics. Sangman International House, Busan, Korea, June 21-22, 2004. P.398-402.
87. *Michell J.H.* The wave resistance of a ship // Philosophical Magazine, ser. 5. London: 1898, Vol. 45. P.106-123.

Компьютерные алгоритмы и функциональное программирование

88. *Баррон Д.* Введение в языки программирования. М.: Мир, 1980. 190 с.
89. *Вирт Н.* Алгоритмы + структуры данных = программы. М.: Мир, 1985. 404 с.
90. *Давыдова И.М., Давыдов Ю.М.* Элементы организации больших программ: Учебное пособие. М.: Изд. МФТИ, 1977. 130 с.
91. *Майкл Ласло.* Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++, М.: «Издательство Бином», 1997. 301с.
92. *Мейерс С.* Эффективное использование STL. Библиотека программиста. СПб.: Питер, 2002. 224 с.
93. *Уинстон П.* Искусственный интеллект. М.: Мир, 1980. 519 с.
94. *Эйнджел Эдвард.* Интерактивная компьютерная графика. Вводный курс на основе OpenGL. М.: Изд.дом "Вильямс", 2001. 592 с.

95. *Lau H.T.* A Numerical Library in C for Scientists and Engineers. London, Tokyo: CRC Press, 1985. 800 p.
96. Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 1988. - 740 p.

Дополнительная и справочная литература

97. *Астахов А.В., Широков Ю.М.* Курс Физики. т.П. Электромагнитное поле. М.: Наука, 1980. 384 с.
98. *Зоммерфельд А.* Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: Издательство иностранной литературы. 1950. 457 с.
99. *Зоммерфельд А.* Механика деформируемых сред. М.: Издательство иностранной литературы. 1954. 491 с.
100. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т.1, Ч.1. Кинематика. Принципы механики. М.:Л.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР. Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935. 385 с.
101. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т.1, Ч.2. Кинематика. Принципы механики. Статика. М.: Издательство иностранной литературы, 1952. 326 с.
102. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т.2, Ч.1 и 2. Динамика систем с конечным числом степеней свободы. М.: Издательство иностранной литературы, 1951. 435 и 555 с.
103. *Лоренц Г.А.* Теория электронов и ее применения к явлениям света и теплового излучения. М.:Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1953. 471 с.
104. Математика: Энциклопедия / Под ред. *Ю.В. Прохорова.* М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. 845 с.
105. *Планк Макс.* Введение в механику деформируемых тел. М.: Л.: Государственное издательство, 1929. 207 с.
106. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
107. *Триккер Р.* Бор, прибор, волнение и корабельные волны. Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1969. 288 с.

Научное издание

**Трехмерная тензорная математика
вычислительных экспериментов в гидромеханике**

Утверждено к печати Ученым советом
СКБ средств автоматизации морских исследований ДВО РАН

Корректор Ткаченко Т.М.
Технический редактор Сеначина Ж.Г.
Оператор верстки Уденс Л.А.

Подписано к печати 1.12.2005 г.
Формат 70x108/16. Гарнитура «Таймс».
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 18,2. Уч.-изд.л. 13,4.
Тираж 500 экз. Заказ № 7380.

Верстка, оформление и печать
Офсетного цеха Института морской геологии и геофизики
Дальневосточного отделения РАН
693002, г. Южно-Сахалинск, ул. Науки.