ЧАСТЬ 1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ВВЕДЕНИЕ

Математическая физика представляет собой часть общей теории дифференциальных уравнений в частных производных. Эта часть возникла в результате решения практических задач, условия которых сводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных при заданных граничных и начальных условиях. Существуют разные методы решения таких задач, из которых в данном пособии рассмотрены широко используемые в инженерной практике методы Фурье и Грина.

В пособии рассмотрены три основные задачи математической физики, приводящие к волновому уравнению, уравнению теплопроводности и уравнению неразрывности. Показаны примеры решения гиперболических, параболических и эллиптических дифференциальных уравнений.

Как будет видно из приведенных ниже примеров, знания дифференциальных уравнений недостаточно, чтобы найти решение интересующей нас задачи. После того, как составлено дифференциальное уравнение, для его решения необходимо найти функцию, которая удовлетворяет этому уравнению. Но следует учесть, что, если дифференциальное уравнение второго порядка содержит только вторые производные и имеет решение, то это решение не единственно (например, вместе с функцией $u(x,t)$ этому же уравнению удовлетворяет функция $c \cdot u(x,t)$ при любом постоянном c или функция $u(x,t)+bx+ct+d$ при любых b,c,d и ряд других функций). Задача состоит не в том, чтобы найти множество различных решений, а в том, чтобы найти одно определённое решение. Для выделения одного определённого решения из множества всевозможных надо наложить ряд дополнительных условий, которые вытекают из физических соображений и характеризуют данный конкретный физический объект. Эти дополнительные условия должны удовлетворять следующим требованиям:

1) они должны быть *непротиворечивы*; то есть, существует хотя бы одна функция, удовлетворяющая данному уравнению и всем данным дополнительным условиям;
2) они должны гарантировать *единственность* решения; это есть, не может быть двух различных функций, одновременно удовлетворяющих данному уравнению и всем данным дополнительным условиям;
3) они должны гарантировать *устойчивость* решения; то есть, незначительное изменение дополнительных условий или коэффициентов дифференциального уравнения приведёт лишь к незначительному изменению решения уравнения. В этом случае говорят, что решение уравнения *непрерывно* зависит от дополнительных условий и от коэффициентов уравнения.

Обычно, исходя только из физического смысла дополнительных условий, можно установить, что существует единственное решение уравнения, удовлетворяющее всем этим условиям и что решение устойчиво. Однако, иногда кажущаяся физическая очевидность может подвести, поэтому, строго говоря, задавая дополнительные условия, необходимо всегда математически доказать *существование, единственность и устойчивость решения*, удовлетворяющего этим условиям.

Дополнительные условия и уравнения в математической физике разбиваются на два типа:
а) *начальные* условия, характеризующие искомую величину в начальный момент времени;
б) *граничные* или *краевые* условия, характеризующие поведение искомой величины на границе рассматриваемой области (в любой момент времени t).

Отсюда вытекают следующие определения.

Определение 1. Если задано дифференциальное уравнение и *начальные* условия, то говорят, что поставлена *задача Коши*.

Определение 2. Если задано дифференциальное уравнение и *граничные* условия, то говорят, что поставлена *краевая задача*.

Определение 3. Если задано дифференциальное уравнение и *граничные и начальные* условия, то говорят, что поставлена *смешанная задача*.

Математическое моделирование при решении физических задач

Часто две различные физические проблемы приводят к одной и той же математической задаче, то есть к одним и тем же дифференциальным уравнениям. Эта аналогия дифференциальных уравнений привела математиков к важному методу решения физических задач – методу математического моделирования. Суть этого метода заключается в следующем.

Пусть решение интересующей нас физической задачи сводится к решению некоторого дифференциального уравнения при определённых граничных и начальных условиях. Пусть к такому же дифференциальному уравнению с теми же граничными условиями сводится другая физическая задача. Пусть решение второй физической задачи может быть найдено непосредственно с помощью *эксперимента.* Тогда найденное решение будет служить решением и для первой физической задачи, если граничные и начальные условия гарантируют единственность решения. В этом случае говорят, что вторая физическая задача служит *моделью* для первой.

Пример. Пусть необходимо найти распределение температуры внутри однородного и изотропного[1] бесконечного цилиндра, ось которого направлена вдоль оси Oz, а сечение плоскостью Oxy ограничено кривой λ. Будем считать, что распределение температуры является установившимся и плоскопараллельным, и что на поверхности цилиндра поддерживается постоянная температура $u = f(x,y)$.

Рассмотрим теперь другую задачу: найти форму упругой плёнки, натянутой на контур l, если известно, что контур l проектируется на плоскость Oxy в кривую λ и что для всех точек (x,y) кривой λ аппликаты соответствующих точек контура l находятся по формуле $u = f(x,y)$.

Обе эти задачи приводят к одному и тому же уравнению

$$u_x^2 + u_y^2 = 0$$

при одном и том же граничном условии

$$u(x,y)\big|_{\text{íà}\,\lambda} = f(x,y).$$

Только физический смысл величины u в этих задачах различен: в первой задаче это температура, а во второй – отклонение точки от плоскости Oxy.

Решение второй задачи можно найти непосредственно: для этого достаточно сделать проволочный каркас, имеющий форму кривой l и на него натянуть плёнку S. Зная форму плёнки S, можно найти температуру в любой точке (x,y,z) внутри цилиндра. Для этого надо измерить аппликату той точки плёнки, которая проектируется на плоскость Oxy в точку (x,y). Эта аппликата численно равна искомой температуре точки (x,y,z), лежащей внутри цилиндра (при любом z). Таким образом, плёнка, натянутая на каркас, является **моделью** для решения задачи о стационарном плоскопараллельном распределении температуры внутри бесконечного цилиндра.

Совпадение решений обеих задач вытекает из того, что уравнение Лапласа при одном и том же граничном условии имеет единственное решение.

В связи с тем, что аспиранты приступают к изучению математической физики через несколько лет после изучения высшей математики на первых курсах ВУЗа, для повторения во второй части данного пособия приводятся основы математического анализа.

---

[1] Изотропный – это значит обладающий одинаковыми физическими свойствами во всех направлениях. Это даёт инвариантность по отношению к выбору направления..

ГЛАВА 1. ВЫВОДЫ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Все основные уравнения математической физики получены в процессе решения различных задач физики. Так как невозможно рассматривать все многочисленные уравнения математической физики, в данном пособии выделены только те, которые необходимы для решения практических задач, связанных с проблемами кораблестроения.

§ 1. Вывод уравнений колебаний

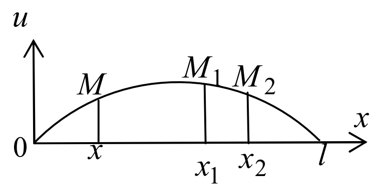


Рис. 1.

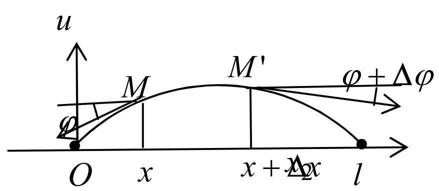


Рис. 2.

Задача 1. Уравнение колебаний струны

Под струной понимается гибкая, упругая нить. Напряжения, возникающие в струне в любой момент времени, направлены по касательной к её профилю. Пусть струна длины l в начальный момент направлена по отрезку оси Ox от 0 до l. Предположим, что концы струны закреплены в точках $x=0$ и $x=l$ (рис. 1). Если струну отклонить от первоначального положения, а потом предоставить самой себе или, не отклоняя струны, придать в начальный момент её точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать колебательные движения. Задача заключается в том, чтобы определить форму струны в любой момент времени и определить закон движения каждой точки струны в зависимости от времени.

Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. В силу этого можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси Ox и в одной плоскости. При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией $u(x,t)$, которая даёт величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент времени t.

Так как рассматриваются малые отклонения струны в плоскости (x,u), то делается предположение, что длина элемента струны $\cup M_1M_2$ равняется её проекции на ось Ox, то есть $\cup M_1M_2 = x_2 - x_1$.Также предполагается, что натяжение во всех точках струны одинаковое; его обозначают T. Рассмотрим элемент струны MM'. На концах этого элемента по касательным к струне действуют силы T. Пусть касательные образуют с осью углы φ и $\varphi+\Delta\varphi$ (рис. 2). Тогда проекции на ось Ou сил, действующих на элемент *MM'*, будет равна $T\sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\sin\varphi$. Так как угол φ мал, то, применяя теорему Лагранжа[2] к выражению, стоящему в квадратных скобках, получим

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\sin\varphi \approx T\,\mathrm{tg}(\varphi+\Delta\varphi) - T\,\mathrm{tg}\varphi =$$

$$= T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = T\,\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x, \quad 0<\theta<1.$$

Чтобы получить уравнение движения, нужно внешние силы, приложенные к элементу *MM'*, приравнять силе инерции. Пусть ρ - линейная плотность струны. Тогда масса элемента струны будет $\rho\,\Delta x$. Ускорение элемента равно $\partial^2 u/\partial t^2$. Следовательно, по принципу Д'Аламбера[3] будем иметь

---

[2] Теорема Лагранжа о среднем или о конечных приращениях: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка c в которой $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a)$.

[3] Принцип Д'Аламбера: если к заданным активным силам, действующим на точки механической системы, и реакциям наложенных связей присоединить силы инерции, то получится уравновешенная система сил.

$$\rho\,\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\,.$$

Сокращая на Δx и обозначая $\dfrac{T}{\rho}=a^2$, получаем уравнение движения *волновое уравнение* - *уравнение колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \tag{1.1}$$

Для определения движения данной струны одного уравнения (1.1) недостаточно. Искомая функция $u(x,t)$ должна удовлетворять ещё *граничным условиям,* указывающим, что делается на концах струны $(x=0$ и $x=l)$, и *начальным условиям*, описывающим состояние струны в начальный момент ($t=0$).

Пусть, например, концы струны при $x=0$ и $x=l$ неподвижны. Тогда при любом t должны выполняться равенства:

$$u(0,t)=0, \tag{1.2}$$

$$u(l,t)=0, \tag{1.3}$$

Эти равенства являются *граничными условиями* для этой задачи.

В начальный момент $t=0$ струна имеет определённую форму, которую ей придали. Пусть эта форма определяется функцией $f(x)$. Таким образом, должно быть

$$u(x,0)=u\big|_{t=0}=f(x). \tag{1.4}$$

Далее, в начальный момент должна быть задана скорость в каждой точке струны, которая определяется функцией $\varphi(x)$. Таким образом, должно быть

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x). \tag{1.5}$$

Условия (1.4) и (1.5) называются *начальными условиями*.

Замечание 1. В частности, может быть $f(x)\equiv 0$ или $\varphi(x)\equiv 0$. Если же $f(x)\equiv 0$ и $\varphi(x)\equiv 0$, то струна будет находится в покое, следовательно, $u(x,t)=0$.

К уравнению (1.1) приводит также задача об электрических колебаниях в проводах.

Задача 2. Вывод уравнений электрических колебаний в проводах

Электрический ток в проводах характеризуется силой тока $i(x,t)$ и напряжением $\upsilon(x,t)$, которые зависят от координаты x и от времени t. Рассматривая элемент провода Δx, записывают, что падение напряжения на элементе Δx равно

$$\upsilon(x,t)-\upsilon(x+\Delta x,t)=-\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\Delta x\,.$$

Это падение напряжения складывается из омического, равного $iR\Delta x$, и индуктивного, равного $\dfrac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$. Тогда

$$-\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\Delta x=iR\Delta x+\frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x\,, \tag{1.6}$$

где R и L - сопротивление и коэффициент самоиндукции, рассчитанные на единицу длины провода. Знак минус взят потому, что ток течёт в направлении, обратном направлению υ. Сокращая на Δx, получают уравнение

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+iR+L\frac{\partial i}{\partial t}=0\,. \tag{1.7}$$

Разность токов, выходящего из элемента Δx и входящего в него за время Δt, равна

$$i(x,t)-i(x+\Delta x,t)=-\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x\Delta t .$$

Она расходуется на зарядку элемента, равную $C\Delta x\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\Delta t$, и на утечку через боковую поверхность провода вследствие несовершенства изоляции, равную $A\Delta\upsilon\Delta x\Delta t$,(здесь A - коэффициент утечки). Приравнивая эти выражения и сокращая на $\Delta x\Delta t$, получают уравнение

$$\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+A\upsilon=0 . \tag{1.8}$$

Уравнения (1.7) и (1.8) принято называть *телеграфными уравнениями*.

Из системы уравнений (1.7) и (1.8) можно получить уравнение, содержащее только искомую функцию $i(x,t)$, и уравнение, содержащее только искомую функцию $\upsilon(x,t)$. Для этого продифференцируем уравнение (1.8) по x, а члены уравнения (1.7) по t и умножим их на C. Выполнив вычитание, получим

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+A\frac{\partial \upsilon}{\partial x}-CR\frac{\partial i}{\partial x}-Ci\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0 .$$

Подставляя в последнее уравнение выражение $\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$ из уравнения (1.7), получим:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+A(-iR-L\frac{\partial i}{\partial t})-CR\frac{\partial i}{\partial x}-Ci\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(CR+AL)\frac{\partial i}{\partial t}+ARi. \tag{1.9}$$

Аналогичным образом получается уравнение для определения $\upsilon(x,t)$;

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}+(CR+AL)\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+AR\upsilon. \tag{1.10}$$

Если можно пренебречь утечкой через изоляцию ($A=0$), то и сопротивлением $(R=0)$, тогда уравнения (1.9) и (1.10) переходят в уравнения:

$$a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 i}{\partial t^2},\quad a^2\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}, \tag{1.11}$$

где обозначение $a^2=\frac{1}{CL}$. Исходя из физических условий, формулируются *граничные и начальные условия задачи.*

Замечание 2. Уравнение (1.11) является *одномерным* волновым уравнением, которое называется уравнение *свободных колебаний* струны.

Замечание 3. Если к струне приложена внешняя сила $F(x,t)$, получается уравнение *вынужденных колебаний* струны.

$$a^2u_{xx}+F(x,t)=u_{tt} . \tag{1.12}$$

Если $a^2=T/\rho$, то T - натяжение струны, ρ – линейная плотность. Если $a^2=k/\rho$, где k – модуль Юнга, ρ –плотность, то это уравнение продольных колебаний стержня.

Двумерное волновое уравнение

$$a^2\Delta u+F(x,t)=u_{tt} ,$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (двумерный оператор Лапласа).

$$a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+F(x,t)=u_{tt}\,. \tag{1.13}$$

Если $a^2 = T/\rho$, то T - натяжение мембраны, ρ –плотность.
Трёхмерное волновое уравнение

$$a^2\Delta\sigma=\sigma_{tt}\,, \tag{1.14}$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (пространственный оператор Лапласа) и $\sigma=\frac{\rho-\rho_o}{\rho_o}$ уплотнение газа. Для уравнения акустики $a^2=\frac{\gamma p}{\rho_o}$, $\gamma=\frac{C_p}{C_\upsilon}$ - удельная теплоёмкость при постоянном р и постоянном объёме.

Задача 3. Вывод уравнения колебаний мембраны[4]

Мембраной называют тонкую плоскую пластинку (для определённости расположенную на плоскости Oxy). Её считают однородной с постоянной плотностью, упругой, туго натянутой. Рассматриваются только малые колебания мембраны, то есть тангенс двугранного угла, образованного касательной плоскостью к мембране и плоскостью Oxy в любой точке и в любой момент времени, столь малым, что квадратом этого тангенса можно пренебречь, когда он стоит рядом с единицей в качестве слагаемого.
Пусть уравнение поверхности мембраны в некоторый момент времени равно $u=f(x,y)$, и ось Ou направлена перпендикулярна плоскости Oxy. Тогда уравнение касательной плоскости в точке (x,y,u) примет вид: $U-u=\frac{\partial u}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(Y-y)$, а следовательно, вектор нормали запишется так:

$$\mathbf{N}=-\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\mathbf{k}\,.$$

Двугранный угол γ между касательной плоскостью и плоскостью Oxy равен углу между векторами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{k}$, поэтому $\cos\gamma=1\Big/\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}$, а $\operatorname{tg}\gamma=\sqrt{1-\cos^2\gamma}\Big/\cos\gamma=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$.
Следовательно, если $tg^2\gamma$ ничтожно мал по сравнению с единицей, то в сумме $1+u_x^2+u_y^2$ можно пренебречь слагаемыми u_x^2 и u_y^2.
Обычно в данной задаче рассматривают только поперечные колебания мембраны, а это значит, что если точка мембраны имеет в положении равновесия абсциссу x и ординату y, то она имеет те же абсциссу и ординату во время процесса колебаний и меняется только аппликата u.
Задача заключается в том, чтобы найти закон колебаний мембраны в виде функции $u=u(x,y,t)$, дающей в каждый момент времени t отклонение u любой точки мембраны с координатами x и y.
Для решения этой задачи доказаны две леммы.
Лемма 1. *Если функция* $f(x,y,z)$ *непрерывна всюду на поверхности* S *и интеграл*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds=0$$

для любого куска s *плоскости* S*, то* $f(x,y,z)\equiv 0$ *во всех точках поверхности.*

[4] Очан Ю.С. Методы математической физики.- Изд. Высшая школа.- 1965 г.- 384 с.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что на поверхности нашлась точка M_o, в которой эта функция отлична от нуля, например, $f(M_o) = a > 0$. В силу непрерывности функции можно описать такую окрестность точки M_o, что всюду в этой окрестности

$$f(x,y,z) > \frac{a}{2}.$$

Пусть s_o та часть поверхности S, которая попала внутрь данной окрестности. Оценим интеграл по поверхности s_o:

$$\iint_S f(x,y,z)ds \geq \frac{a}{2} \cdot s_o > 0.$$

Таким образом, на поверхности нашлась такая её часть s_o, что интеграл по s_o отличен от нуля, что противоречит условию леммы. Следовательно, допущение о существовании точки на S, где функция отлична от нуля, неверно. Значит $f(x,y,z) \equiv 0$ всюду на S, что и требовалось доказать.

Замечание 4. Доказанная лемма справедлива не только для поверхностных, но и для тройных, двойных и определённых интегралов.

Лемма 2. *Если функция $f(x,y,z)$ и её частные производны первого порядка непрерывны на гладкой поверхности S. Если для любой замкнутой кривой L, лежащей на S, имеют место равенства:*

$$\int_L f(x,y,z)dx = 0 \text{ и } \int_L f(x,y,z)dy = 0,$$

то $f(x,y,z) = Const$ всюду на S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть s - произвольный кусок поверхности S, а L - её граница. По условию

$$\int_L f(x,y,z)dx = 0 \text{ и } \int_L f(x,y,z)dy = 0.$$

Применим к каждому из этих интегралов теорему Стокса. Тогда

$$\iint_s \left(\frac{\partial f}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma \right) dS = 0,$$

$$\iint_s \left(-\frac{\partial f}{\partial z}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma \right) dS = 0.$$

Так как эти равенства имеют место для любого куска поверхности S, то по лемме 1 имеют место тождества

$$\frac{\partial f}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma = 0,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial z}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\cos\beta} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\cos\gamma},$$

то есть, составляющие градиента функции $f(x,y,z)$ пропорциональны координатам единичного вектора нормали к поверхности S. Но в таком случае градиент во всех точках поверхности сам направлен по нормали к этой поверхности, а это возможно только тогда, когда S является поверхностью уровня для функции $f(x,y,z)$. Следовательно $f(x,y,z)$ постоянна на S.

Выведем дифференциального уравнения колебаний мембраны. Для этого рассмотрим участок мембраны и пусть в состоянии равновесия этот участок занимает область σ на плоскости Oxy, а в некоторый момент t он принимает форму S (рис. 3).

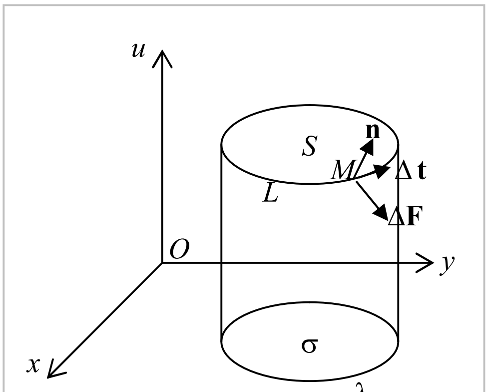


Рис. 3.

Так как по условию колебания являются поперечными, то S проектируется на плоскость Oxy в область σ. Рассчитаем все силы, действующие на поверхность S. Это прежде всего силы натяжения, действующие на поверхность S и приложенные к её границе.. Обозначим через $T(x,y,u)$ численную величину силы натяжения на единицу длины контура вблизи точки (x,y,u). Точнее говоря, $T(x,y,u)$ определяется как предел, к которому стремится отношение $\dfrac{|\Delta\mathbf{F}|}{|MM_1|}$ при $M_1 \to M$, где точки $M(x,y,u)$ и M_1 берутся на некоторой линии L, а $\Delta\mathbf{F}$ - вся сила натяжения, приложенная к участку MM_1 линии L. Величина $T(x,y,u)$ называется *плотностью сил натяжения* в точке (x,y,u). Здесь рассматривается только тот случай, когда натяжение в каждой точке не зависит от направления линии L, проходящей через эту точку (то есть, натяжение одинаково во всех направлениях). Может оказаться, что конкретная мембрана в одном направлении сильнее натянута, чем в другом, но этот случай здесь не рассматривается.

Для того чтобы подсчитать всю силу натяжения, действующую на S и приложенную к контуру L, разбивают L на ряд маленьких элементарных дуг. Вектор силы натяжения, приложенный к элементарной дуге $\Delta\boldsymbol{l}$, перпендикулярен к этой дуге (к её касательной) и расположен в касательной плоскости к поверхности S, следовательно, он перпендикулярен к единичному вектору $\mathbf{n}$ нормали к поверхности S. Так как вектор натяжения численно равен $T|\Delta\boldsymbol{l}|$ и перпендикулярен векторам $\Delta\boldsymbol{l}$ и $\mathbf{n}$, то он равен их векторному произведению:

$$\Delta\boldsymbol{F} = T\Delta\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{n}$$

или

$$\Delta\boldsymbol{F} = T(\Delta\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{n}).$$

Суммируя эти элементарные силы натяжения по всем $\Delta\boldsymbol{l}$, получим всю силу натяжения, действующую на S. При этом, проекции суммарной силы натяжения на оси Ox и Oy равны нулю (так как по условию все точки мембраны перемещаются только в вертикальном направлении), а проекция на ось Ou (численно равная всей силе натяжения) вызывает перемещение площадки S.

Проекция элементарной силы $\Delta\mathbf{F}$ на ось Ox равна скалярному произведению этой силы на орт $\mathbf{i}$:

$$.\Delta\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} = T(\Delta\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{i}.$$

В правой части этого равенства стоит смешанное произведение векторов $\Delta\boldsymbol{l},\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}$. По свойству смешанного произведения круговая перестановка сомножителей не изменяет произведения, поэтому

$$\Delta\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} = T[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}]\cdot\Delta\boldsymbol{l}.$$

Суммируя по всем $\Delta\boldsymbol{l}$ и затем, переходя к пределу при $\max\Delta\boldsymbol{l}\to 0$, получим проекцию F_x всей силы натяжения на ось Ox:

$$F_x = \lim_{\max|\Delta l|\to 0}\sum_{\Delta\boldsymbol{l}}\Delta\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} = \lim_{\max|\Delta l|\to 0}\sum_{\Delta\boldsymbol{l}}T[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}]\cdot\Delta\boldsymbol{l} = \int_L T[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}]\cdot\Delta\boldsymbol{l}. \tag{1.15}$$

Проекция силы натяжения на оси Oy и Ou F_y F_u равны таким же криволинейным интегралам:

$$F_y = \int_L T[\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j}] \cdot \Delta \boldsymbol{l}, \qquad (1.16)$$

$$F_u = \int_L T[\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k}] \cdot \Delta \boldsymbol{l}. \qquad (1.17)$$

Для того, чтобы упростить эти интегралы, выражают вектор $\boldsymbol{n}$ через u_x и u_y. Уравнение поверхности S в момент t записывается в виде $u = u(x, y, t)$ (здесь t фиксировано). Следовательно, уравнение касательной плоскости в точке (x, y, u) имеет вид:

$$U - u = u_x (X - x) + u_y (Y - y),$$

а вектор нормали равен

$$\mathbf{N} = -u_x \mathbf{i} - u_y \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Чтобы получить единичный вектор нормали, надо найденный вектор разделить на его длину:

$$\mathbf{n} = \frac{-u_x \mathbf{i} - u_y \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}}.$$

Но по условию слагаемыми u_x^2 и u_y^2 при единице можно пренебречь. Поэтому

$$\mathbf{n} = -u_x \mathbf{i} - u_y \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Найдём векторные произведения $[\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i}]$, $[\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j}]$ и $[\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k}]$:

$$[\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -u_x & -u_y & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{j} + u_y \boldsymbol{k};$$

$$[\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j}] = \boldsymbol{i} - u_x \boldsymbol{k};$$

$$[\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k}] = -u_y \boldsymbol{i} + u_x \boldsymbol{j}.$$

Отсюда интегралы (1.15), (1.16) и (1.17) можно написать следующим образом:

$$F_x = \int_L T dy + T u_y du, \qquad (1.15`)$$

$$F_y = \int_L - T dx - T u_x du, \qquad (1.16`)$$

$$F_u = \int_L - T u_y dx + T u_x dy. \qquad (1.17`)$$

В интегралах (1.15`) и (1.16`) вторые слагаемые могут быть опущены, так как они являются величинами второго порядка малости по сравнению с частными производными u_x и u_y; Действительно, например,

$$T u_x du = T u_x (u_x dx + u_y dy) = T u_x^2 dx + T u_x u_y dy;$$

аналогично $$T u_y du = T u_x u_y dx + T u_y^2 dx.$$

Итак

$$F_x = \int_L T dy, \quad F_y = -\int_L T dx.$$

Так как $F_x = 0, F_y = 0$, потому что на поверхность мембраны действуют только вертикальные силы, то интегралы

$$\int_L T dy = 0, \quad \int_L T dx = 0.$$

Эти равенства имеют место для любого замкнутого контура l на S. Следовательно, по лемме 2 всюду на S имеем $T = Const$. Итак, доказано, что в условиях нашей задачи *плотность натяжения во всех точках мембраны одинакова.*

Рассмотрим проекцию суммарной силы натяжения на ось Ou:

$$F_u = \int\limits_L -Tu_y dx + Tu_x dy = T\int\limits_L -u_y dx + u_x dy.$$

Так как подынтегральная функция содержит переменные x и y, но не содержит u (производные u_x и u_y также выражены только через x и y), то интегрирование по контуру l можно заменить интегрированием по его проекции λ, а затем к этому интегралу применить формулу Грина (рис. 1.3).

$$F_u = T\int\limits_L -u_y dx + u_x dy = T\iint\limits_\sigma \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial(-u_y)}{\partial y}\right] d\sigma = T\iint\limits_\sigma \left[u_x^2 + u_y^2\right] d\sigma. \tag{1.18}$$

Кроме силы натяжения на мембрану могут действовать другие силы (например, вес). Равнодействующая всех сил, приложенных к какому-нибудь участку мембраны и отличных от силы натяжения, называется *внешней* силой на этом участке. Обозначим через $\varphi(x, y, t)$ тот предел, к которому стремится отношение внешней силы, действующей на элементарную площадку $\Delta\sigma$ в момент времени t, к массе этой площадки при стягивании $\Delta\sigma$ к точке (x, y). Функция $\varphi(x, y, t)$ называется *плотностью* внешней силы. Так как каждая точка мембраны может двигаться только по направлению оси Ou, то и внешняя сила в каждой точке параллельна оси Ou. Для того, чтобы найти теперь *всю внешнюю силу*, действующую на σ (или что то же самое на S), надо разбить σ на элементарные площадки $\Delta\sigma$; внешняя сила, действующая на каждую элементарную площадку, равна $\varphi(x, y, t)\cdot\Gamma\cdot\Delta\sigma$, а, следовательно, вся внешняя сила равна

$$\iint\limits_\sigma \varphi(x, y, t)\cdot\Gamma\cdot d\sigma. \tag{1.19}$$

Итак, вся сила Φ, действующая на S, направлена по оси Ou и численно равна сумме выражений (1.18) и (1.19)

$$\Phi = T\iint\limits_\sigma \left[T\left(u_x^2 + u_y^2\right) + \varphi\Gamma\right] d\sigma.$$

Применяя теорему о среднем, получим

$$\Phi = \left[T\left(u_x^2 + u_y^2\right) + \varphi\Gamma\right]_{M_{cp}} \sigma, \tag{1.20}$$

где M_{cp} - некоторая промежуточная точка площадки σ.

С другой стороны, сила, действующая на материальную точку, равна произведению массы этой точки на ускорение, считая (при достаточно малом диаметре S) площадку S материальной точкой, получим

$$\Phi = u_{tt}\cdot\Gamma\cdot S,$$

или, так как колебания мембраны малы, то $S \cong \sigma$, и поэтому

$$\Phi = u_{tt}\cdot\Gamma\cdot\sigma.$$

Приравнивая это к выражению для Φ из формулы (1.20), после сокращения на σ получим

$$\left[T\left(u_x^2 + u_y^2\right) + \varphi\Gamma\right]_{M_{cp}} = u_{tt}\Gamma.$$

Стягивая теперь площадку σ к точке $M(x, y)$ и устремляя M_{cp} к M, получим в пределе:

$$T\left(u_x^2 + u_y^2\right) + \varphi\Gamma = u_{tt}\Gamma.$$

Это равенство выполняется в любой точке (x, y) области Ω, где Ω означает проекцию всей мембраны на плоскость Oxy в любой момент времени t. Оно и является искомым уравнением, которому удовлетворяет функция $u(x, y, t)$. Для его упрощения разделим все его члены на Γ и обозначим T/Γ через a^2 (легко проверить, что a имеет размерность *м/сек*):

$$u_{tt} = a^2\left(u_x^2 + u_y^2\right) + \varphi(x, y, t) \tag{1.21}$$

В случае отсутствия внешней возмущающей силы или в том случае, когда она пренебрежимо мала, уравнение (1.21) упрощается:

$$u_{tt} = a^2\left(u_x^2 + u_y^2\right). \qquad (1.22)$$

Это уравнение (1.22) и есть *уравнение свободных колебаний мембраны.*

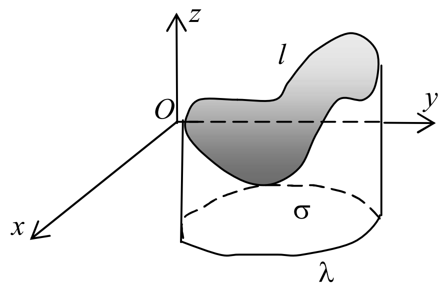


Рис. 4.

Граничные и начальные условия

1. Если мембрана является ограниченной, то есть её диаметр равен конечному числу, и её граница закреплена на плоскости Oxy, то граничное условие будет $u(x, y, t) = 0$ в любой момент времени t для всех точек (x, y), которые принадлежат границе мембраны. Здесь граничное условие записано словесно, его можно было бы записать и с помощью формул, но способ этой записи зависит от формы мембраны. Кроме граничного, необходимо задать *начальные условия*. В данном случае они имеют вид:

$$u(x, y, t)\big|_{t=0} = f(x, y).$$

или в более короткой записи,

$$u(x, y, 0) = f(x, y); \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y).$$

Здесь $f(x, y)$.- заданная функция, определённая всюду в области Ω. Она даёт начальное отклонение мембраны в каждой точке. Функция $\psi(x, y)$ также задана в области Ω; она даёт начальную скорость в каждой точке мембраны.

Из физических соображений ясно, что эти условия гарантируют единственное решение (действительно, при заданном начальном отклонении и заданной начальной скорости мембрана, закреплённая на границах, будет колебаться по вполне определённому закону). Доказательство единственности и устойчивости здесь не производится.

2. Если мембрана не закреплена в точках её границы, то граничные условия имеет другой вид (они могут стать неоднородными). Например, точки границы могут двигаться по некоторому заданному закону. При этом каждая точка границы должна двигаться только в вертикальном направлении, потому что по условию колебания мембраны являются поперечными.
3. Если мембрана бесконечна и совпадает со всей плоскостью Oxy, то здесь нет смысла говорить о граничных условиях. В этом случае закон колебаний мембраны вполне определяется начальными условиями, и задача сводится к решению уравнения

$$u(x, y, 0) = f(x, y); \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y),$$

где $f(x, y)$ и $\psi(x, y)$- функции, заданные на всей плоскости.

4. Интересен случай стационарного уравнения мембраны, то есть тот случай, когда мембрана находится в состоянии покоя: отклонение каждой её точки от плоскости Oxy не зависит от времени t, а зависит только от абсциссы и ординаты этой точки: $u = u(x, y)$. Ясно, что эта задача легко решается, если контур, вдоль которого закреплена мембрана, расположен на плоскости Oxy. В этом случае и сама мембрана расположена на этой плоскости. Если плоскость мембраны не лежит на плоскости Oxy и ограничена некоторой замкнутой пространственной кривой l (рис. 1.4), тогда

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (1.23)$$

при граничном условии

$$u(x, y)\big|_{\text{ìà } \lambda} = f(x, y). \qquad (1.24)$$

Здесь λ - проекция кривой на плоскость Oxy, а функция $f(x, y)$ задаёт величину отклонения точек контура l от плоскости Oxy.

Найдя функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1.23) и граничному условию (1.24), мы получим уравнение поверхности S, по которой расположена мембрана, натянутая на контур l (такую форму принимает, например, мыльная плёнка, натянутая на проволочный каркас l). Уравнение (1.23) является уравнением Лапласа для функции двух переменных. Его решением являются гармонические функции. Следовательно, задача сводится к тому, чтобы найти гармоническую функцию $u(x,y)$, определённую в области σ (рис. 4) и принимающую на её границе заданные значения. Проблема отыскания такой функции называется *плоской задачей Дирихле.*

§ 2. Уравнение теплопроводности

Задача 4. **Уравнение распространения тепла в стержне.**

Рассматривается однородный стержень длины l. Предположим, что боковая поверхность стержня теплонепроницаема и что во всех точках поперечного сечения стержня температура одинакова. Изучается процесс распространения тепла в стержне.

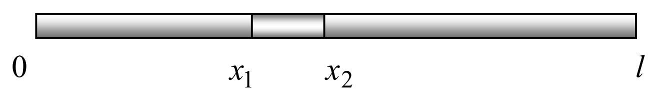


Рис. 5.

Ось Ox располагается так, что один конец стержня будет совпадать с точкой $x=0$, а другой с точкой $x=l$ (рис. 5). Пусть $u(x,t)$ - температура в сечении стержня с абсциссой x в момент t. Опытным путём установлено, что скорость распространения тепла, то есть, количество тепла, протекающего через сечение с абсциссой x за единицу времени, определяется формулой

$$q=-k\frac{\partial u}{\partial x}S, \tag{2.1}$$

где S - площадь сечения рассматриваемого стержня, k - коэффициент теплопроводности. Скорость распространения тепла или скорость теплового потока, определяется так:

$$q=\lim\frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

где ΔQ- количество тепла, прошедшего через сечение S за время Δt. Количество тепла, протекающего через поверхность S, будет равно

$$Q=-\Delta t\iint\limits_S k\,\mathbf{n}\,\mathrm{grad}\,u\,ds\,, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности S. Очевидно, что формула (2.2) даёт количество тепла, поступающего в объём V (или уходящего из объёма V) за время $\Delta t.$ Количество тепла, поступающего в объём V, идёт на повышение температуры вещества этого объёма.

Рассмотрим элементарный объём $\Delta\upsilon$. Пусть за время Δt его температура поднялась на Δu. Очевидно, что количество тепла, затраченное на это повышение температуры элемента $\Delta\upsilon$, будет равно

$$c\Delta\upsilon\rho\Delta u=c\Delta\upsilon\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$$

где с – теплопроводность вещества, ρ - плотность. Общее количество тепла, затраченное на повышение температуры в объёме V за время Δt, будет

$$\Delta t\iiint\limits_V c\,\rho\frac{\partial u}{\partial t}d\upsilon\,.$$

- это тепло, поступившее в объём V за время Δt, оно определено формулой (2.2). Таким образом, имеет место равенство

$$\Delta t \iint\limits_S k\, \mathbf{n}\, \mathrm{grad}\, u\, ds = \Delta t \iiint\limits_V c\, \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\upsilon.$$

Сокращая на Δt, получаем:

$$\iint\limits_S k\, \mathbf{n}\, \mathrm{grad}\, u\, ds = \iiint\limits_V c\, \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\upsilon \tag{2.3}$$

- поверхностный интеграл, стоящий в левой части этого равенства, преобразуем по формуле Остроградского, полагая $\mathbf{F} = k\ \mathrm{grad}\, u$:

$$\iint\limits_S (k\ \mathrm{grad}\, u)\, \mathbf{n}\, ds = \iiint\limits_V \mathrm{div}(k\ \mathrm{grad}\, u)\, d\upsilon.$$

Заменяя поверхностный интеграл, стоящий в левой части уравнения (2.3), тройным интегралом по формуле Остроградского - Гаусса, получим

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}(k\ \mathrm{grad}\, u) d\upsilon. = \iiint\limits_V c\, \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\upsilon$$

или

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}(k\ \mathrm{grad}\, u) d\upsilon. - \iiint\limits_V c\, \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\upsilon = 0\,. \tag{2.4}$$

Применяя теорему о среднем к тройному интегралы, стоящему слева, получим

$$\left[\mathrm{div}(k\ \mathrm{grad}\, u) - c\, \rho \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x=x_1,\, y=y_1,\, z=z_1} = 0\,, \tag{2.5}$$

где точка $P(x, y, z)$ - некоторая точка объёма V. Так как мы можем выделить произвольный объём V в трёхмерном пространстве, где происходит распространение тепла, и так как мы предполагаем, что подынтегральная функция в равенстве (2.4) непрерывна, то равенство (2.5) будет выполняться в каждой точке пространства. Итак,

$$c\, \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(k\ \mathrm{grad}\, u) \tag{2.6}$$

Но
$$k\ \mathrm{grad}\, u = k \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + k \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + k \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

и
$$\mathrm{div}(k\ \mathrm{grad}\, u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Подставляя в уравнение (1.20), получим:

$$c\, \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right). \tag{2.7}$$

Если k постоянное, то

$$\mathrm{div}(k\ \mathrm{grad}\, u) = k \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u) = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

и уравнение (2.7) в этом случае даёт:

$$c\, \rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

или, положив $\dfrac{k}{c\, \rho} = a^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \tag{2.8}$$

Коротко уравнение (2.8) записывается так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u ,$$

где $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа. Уравнение (2.8) и есть *уравнение теплопроводности в пространстве.* Для того чтобы найти его единственное решение, отвечающее поставленной задачи, нужно задать краевые условия.

Пусть имеем тело Ω, поверхность которого σ. В этом теле рассматривается процесс распространения тепла. В начальный момент температура тела задана. Это соответствует тому, что известно значение $u(x, y, z)$ при $t = 0$ - начальное условие:

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) . \tag{2.9}$$

Кроме того, должна быть известна температура в любой точке M поверхности σ тела в любой момент времени t - граничное условие:

$$u(M, t) = \psi(M, t) . \tag{2.10}$$

Возможны и другие граничные условия.

Если искомая функция $u(x, y, z, t)$ не зависит от z, что соответствует тому, что температура не зависит от z, то получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2.11}$$

- *уравнение распространения тепла на плоскости.* Если рассматривается распространение тепла в плоской области D с границей C, то граничные условия, аналогично (2.9) и (2.10), формулируются так:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi(x, y), \\ u(M, t) &= \psi(M, t), \end{aligned} \tag{2.12}$$

где φ и ψ - заданные функции, M точка границы C.

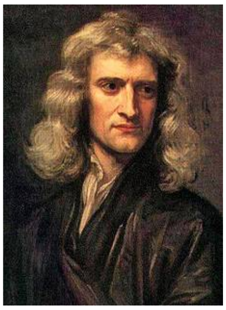
Если же функция u не зависит от z, ни от y, то получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.13}$$

- распространение тепла в стержне.

§ 3. Уравнение неразрывности

Задача 5 Вывод уравнения Лапласа



Исаак Ньютон
1643 -1727

Уравнение сплошности, или неразрывности, называется также уравнением Лапласа. Так как уравнение Лапласа играет ключевую роль в решении задач математической физики, то интересна его история[5]. Появление уравнения Лапласа имеет свою интересную историю и вызвано совсем нетривиальным ходом развития естественных идей. Неожиданный поворот мыслей Лапласа предопределили ряд важных соображений, следствием которых явилось уравнение Максвелла для электромагнитного поля и, в настоящее время, уравнения полей, связанных с элементарными частицами.

История такова**:** Кеплер обрабатывал наблюдения Тихо Браге над движением планет и установил три основных закона, которые носят его имя: 1) каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце; 2) радиус-

[5] С.К. Годунов Уравнения математической физики. Изд. «Наука», ГРФ-МЛ, Москва, 1971 г. Стр. 12.

вектор от Солнца до планеты заметает равные площади в равные интервалы времени; 3) квадраты времён обращения двух планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

В дальнейшем Ньютон нашёл для этих законов довольно простое выражение, называемое законом всемирного тяготения: «между любыми двумя телами действуют силы притяжения, прямо пропорциональные их массам и обратно пропорциональные квадрату расстояния между ними»

Законы Кеплера, закон Ньютона и связь между ними подробно изучались в курсе механики. Однако было непонятно, как два тела, находящиеся на колоссальном расстоянии друг от друга, могут действовать одно на другое. Это дальнодействие всегда казалось удивительным, и попытка преодолеть его, по-видимому, и привела Лапласа к следующему истолкованию. Лаплас сформулировал так: наличие какого-либо притягивающего тела влечёт за собой возникновение во всём пространстве некоторой *субстанции*, интенсивность $u(x,y,z)$ которой в точке (x,y,z) вычисляется по формуле

$$u(x,y,z)=\gamma\frac{M}{\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2}}. \qquad (3.1)$$

Здесь γ - некоторая постоянная, x_o, y_o, z_o - координаты притягивающего тела, M - его масса. Чтобы вычислить компоненты F_x, F_y, F_z силы тяготения, действующей на тело единичной массы, расположенное в точке с координатами x,y,z, надо положить

$$F_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad F_y=\frac{\partial u}{\partial y},\quad F_z=\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (3.2)$$

Функция $u(x,y,z)$ называется *потенциалом векторного поля* $\{F_x, F_y, F_z\}$. В случае, если притягивающих тел несколько (тело массы M_i располагается в точке x_i, y_i, z_i), то силу можно вычислить по тем же формулам, если взять в качестве потенциала функцию

$$u_i=\gamma\sum_i\frac{M_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}} \qquad (3.3.)$$


Пьер Симон Лаплас
1749-1827

Лаплас предложил пользоваться при изучении тяготения не самой функцией $u(x,y,z)$, а тем дифференциальным уравнением, которому эта функция удовлетворяет. Это уравнение может быть получено следующим образом. Рассмотрим сначала только одно слагаемое в формуле для функции $u(x,y,z)$

$$u_i=\gamma\frac{M_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}}$$

и вычислим его производные. Для упрощения записи обозначим расстояние между точками (x,y,z) и (x_i, y_i, z_i) в виде $r=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}$ и заметим, что

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}}=\frac{x-x_i}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-y_i}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z-z_i}{r}.$$

Таким образом, производные

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=-\gamma M_i\frac{x-x_i}{r^2},\quad \frac{\partial u_i}{\partial y}=-\gamma M_i\frac{y-y_i}{r^2},\quad \frac{\partial u_i}{\partial z}=-\gamma M_i\frac{z-z_i}{r^2}.$$

Продифференцируем их ещё раз:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = -\gamma M_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(x - x_i)^2}{r5} \right],$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = -\gamma M_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(y - y_i)^2}{r5} \right],$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = -\gamma M_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(z - z_i)^2}{r5} \right].$$

Складывая эти три частные производные, получим

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0.$$

Очевидно, что отсюда и из того, что $u = \sum_i u_i$, вытекает равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{3.4}$$

которое и называется *уравнением Лапласа.*

Таким образом, Лаплас предложил отказаться от явной формулы для сил дальнодействия и заменить её на дифференциальное уравнение для поля величины *u*. Уравнение *неразрывности* записывается так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \upsilon) = 0\,. \tag{3.5}$$

Замечание 4. В курсе математической физики рассматриваются гиперболические, параболические и эллиптические уравнения.

Определение 4. *Гиперболическими* называются *однородные* уравнения вида $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ для одномерного случая и $u_{tt} = a^2 \Delta u$ и *неоднородные* $u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, y, z)$.

Определение 5. *Параболическими* называются *однородные* уравнения вида $u_t = a^2 \Delta u$ **и** *неоднородные вида* $u_t = a^2 \Delta u + f(x, y, z)$**.**

Определение 6. *Эллиптическими* называются *уравнение Лапласа* $\Delta u = 0$ **(**однородное**) и** *уравнение Пуассона* $\Delta u = -4\pi\rho(x.y.z)$ (неоднородное)**.**

§ 4. Постановка краевой задачи

Задача 6. Движение тела на свободной поверхности жидкости

При формулировке данной задачи вводится линеаризация граничных условий, что даёт возможность получить аналитическое решение задачи. Если не линеаризовать граничные условия, то в общем случае можно получить только приближённое решение, используя численные методы интегрирования.

Требуется получить интеграл уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{или} \quad \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \tag{4.1}$$

при граничных условиях непротекания на свободной поверхности (кинематическое условие)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - (U - \frac{\partial \Phi}{\partial x})\varsigma_x - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\varsigma_y = 0 \quad \text{íà} \quad z = \varsigma(x, y)\,. \tag{4.2}$$

Учитывая, что вызванные скорости φ_x и φ_y малы по сравнению со скоростью движения судна, а также перенося условие с неизвестной взволнованной поверхности на невозмущённую поверхность z = 0, получают

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - U\varsigma_x = 0 \quad \text{на} \quad z = 0, \tag{4.3}$$

учитывая также, что квадрат скорости равен

$$q^2 = \left(U - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 = U^2 - 2U\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2$$

и, пренебрегая квадратами вызванных скоростей, можно написать

$$q^2 \approx U^2 - 2U\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{4.4}$$

и динамическое условие имеет вид

$$\frac{p - p_a}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 - g\varsigma = const. \tag{4.5}$$

При учете того, что $p = p_a$ и, принимая константу равной нулю, условие на свободной поверхности получают в виде

$$g\varsigma + U\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \tag{4.6}$$

Условия (4.3) и (4.6) можно объединить

$$\begin{cases} g\varsigma - U\Phi_x = 0, \\ \Phi_z - U\varsigma_x = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Исключая неизвестную высоту свободной поверхности, Коши получил линейное условие на свободной поверхности в виде

$$\Phi_z + \frac{U^2}{g}\Phi_{xx} = 0. \tag{4.8}$$

Джон Генри Мичелл
1863 – 1940

Обычно вводят обозначения $K = \dfrac{U^2}{g}$, тогда

$$\Phi_z + K\Phi_{xx} = 0. \tag{4.9}$$

Граничное условие на теле состоит в непротекании жидкости через поверхность тела

$$\nabla\Phi \cdot n = \Phi_y - \Phi_x f_x - \Phi_z f_z = 0 \quad \text{на} \quad y = \pm f(x,z). \tag{4.10}$$

Кроме этих условий вводятся условия на бесконечности за телом и на бесконечной глубине в виде

$$\Phi = 0 \quad \text{на} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty \quad \text{и} \quad z = -\infty \tag{4.11}$$

и условие отсутствия волн перед телом

$$\sqrt{x}\varphi \to 0 \quad \text{для} \quad x \to -\infty. \tag{4.12}$$

Таким образом, задача записывается в виде *системы уравнений*

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0,$$

$$\Phi_z + K\Phi_{xx} = 0 \quad \text{на } z = 0,$$

$$\Phi_y - \Phi_x f_x - \Phi_z f_z = 0 \quad \text{на} \quad y = \pm f(x,z),$$

$$\Phi = 0 \quad \text{на} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty \quad \text{и} \quad z = -\infty \;\; \sqrt{x}\varphi \to 0 \quad \text{для} \quad x \to -\infty.$$

Решение этой задачи найдено для движущегося под свободной поверхностью источника, для диполя, для эллипсоида, для узкого судна, для удлиненного судна и т.д. Эти решения используются для получения волнового сопротивления тел простых аналитических форм при условии, что жидкость считается идеальной. Для корабля с произвольной формой корпуса в предположении малого отношения его ширины к длине («узкого судна») задача определения волнового сопротивления была решена Джоном Мичеллем в 1898 году[6].

Замечание 1. Эта задача относится к, так называемым, *задачам со свободной границей*.

Перечисленные в этой главе задачи математической физики сведены в таблицу 1. В таблице приведены дифференциальные уравнения и граничные условия, позволяющие получить единственное решение.

Таблица 1

Основные уравнения математической физики

№ п/п	Гиперболическое	Параболическое	Эллиптическое	Характеристика
1	Волновое уравнение $a^2 u_{xx} = u_{tt}$	Уравнение теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$	Уравнения неразрывности $u_x = 0$	Однородное, линейное, одномерное
2	$a^2 \Delta_2 u = u_{tt}$	$u_t = a^2 \Delta_2 u$	$\Delta_2 u = 0$	Двумерное, линейное, однородное
3	$a^2 \Delta u = u_{tt}$	$u_t = a^2 \Delta u$	$\Delta u = 0$	Трёхмерное, линейное, однородное Уравнение Лапласа-
4	$a^2 \Delta u + F(x,t) = u_{tt}$	$u_t = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t)$	$\Delta u = -4\pi\rho(x,y,z)$	Трёхмерное, линейное, неоднородное Уравнение Пуассона
5	$u(X,0) = u\big\|_{t=0} =$ $= f(x,y,z)$	$u(X,0) = f(X)$ $u_t(X,0) = \varphi(X)$	-	Начальные условия, где X=(x,y,z)
6	I типа $u\big\|_S = \mu(M,t)$ II типа $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_S = \nu(M,t)$ III типа $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right\|_S = \beta\,(M,t)$	I типа $u\big\|_S = \mu(M,t)$ II типа $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_S = \nu(M,t)$ III типа $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right\|_S = \beta\,(M,t)$	Условие Дирихле $u\big\|_S = \mu(M,t)$ Условие Неймана $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_S = \nu(M,t)$ Условия Коши $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right\|_S = \beta\,(M,t)$	Краевые условия Точка М – произвольная точка пространства
7	-	-	$u(x) = O\left\|\frac{1}{\|x\|^{m-2}}\right\|$	Условия на бесконечности для внешней задачи

ГЛАВА 2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Основные дифференциальные уравнения, которые используются в математической физике – это дифференциальные уравнения в частных производных 2-го порядка. Естественно, что для их составления и решения требуются определённые обобщения. Эти обобщения приводятся в **§ 5.**

---

[6] Michell, J.H. 1898 The wave resistance of a ship. *Philosophical Magazine.-Ser. 5*, **45**, 106-123.

§ 5. Дифференциальные уравнения с частными производными 2-го порядка[7]

Определение 1. Уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y называется соотношение между неизвестной функцией $u(x, y)$ и её частными производными до 2-го порядка включительно (используются такие обозначения для производных: $u_x = \partial u/\partial x, u_y = \partial u/\partial y, u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2, u_{xy} = \partial^2 u/\partial x \partial y, u_{yy} = \partial^2 u/\partial y^2$):

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Замечание 1. Аналогично записываются уравнения для большего числа независимых переменных.

Определение 2. Уравнение называется *линейным* относительно старших производных, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{5.1}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

Определение 3. Если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят не только от x и y, но являются, подобно F_1, функциями x, y, u, u_x, u_y, то такое уравнение называется *квазилинейным*.

Определение 4. Уравнение называется *линейным***,** если оно линейно как относительно старших производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, так и относительно функции u и её первых производных $u_x u_y$:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0, \tag{5.2}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ - функции только x и y.

Определение 5. Уравнение называется *однородным,* если $f(x, y) = 0$.

Определение 6. Если коэффициенты уравнения (5.2) не зависят от x и y, то оно представляет собой линейное *дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.*

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование, получается новое уравнение, эквивалентное однородному. Проблема состоит в том, чтобы выбрать φ. и ψ так, чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простой вид.

Сделаем подобные преобразования для уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Преобразуя производные к новым переменным, получают:

$$\left.\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\; u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\eta_x\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\,\xi_{xx} + u_\eta\,\eta_{xx},\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_y\xi_x + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_y\eta_x + u_\xi\,\xi_{xy} + u_\eta\,\eta_{xy},\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi y_x^2 + 2u_{\xi\eta}\eta_y\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\,\xi_{yy} + u_\eta\,\eta_{yy}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Подставляя значения производных из (5.3) в уравнение (5.1), получают

$$\overline{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\overline{a}_{12}u_{\xi\eta} + \overline{a}_{22}u_{\eta\eta} + \overline{F} = 0, \tag{5.4}$$

где

---
[7] Тихонов А.Н., Самарский А.А.1972. Уравнения математической физики, Наука,1972.- 724 с.

$$\begin{aligned}
\overline{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,\\
\overline{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y,\\
\overline{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

а функция $\overline{F}$ не зависит от вторых производных. Если исходное уравнение линейно, то есть,

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

то $\overline{F}$ имеет вид

$$\overline{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = \beta_1u_\xi + \beta_2u_\eta + \gamma u + \delta,$$

то есть уравнение остаётся линейным.[8].

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент a_{11} был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными 1-го порядка

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0. \tag{5.6}$$

Пусть $z = \varphi(x,y)$ - какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi = \varphi(x,y)$, то коэффициент $\overline{a}_{11}$, очевидно, будет равен нулю, так как тогда $a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0$ в (5.5). Таким образом, упомянутая выше задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (5.6).

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. Если $z = \varphi(x,y)$ является частным решением уравнения

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0,$$

то соотношение $\varphi(x,y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx\,dy + a_{22}dx^2 = 0. \tag{5.7}$$

Доказательство леммы 1. Поскольку функция $z = \varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению (5.6), то равенство

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right) + a_{22} = 0 \tag{5.8}$$

является тождеством, так как оно удовлетворяется для всех x, y в той области, где задано решение. Соотношение $\varphi(x,y) = C$ является общим интегралом уравнения (5.7), если функция y, определённая из неявного соотношения $\varphi(x,y) = C$, удовлетворяет уравнению (5.7). Пусть

$$y = f(x,C)$$

есть эта функция, тогда

$$dy/dx = -\left(\varphi_x(x,y)/\varphi_y(x,y)\right)_{y=f(x,C)}, \tag{5.9}$$[9]

где скобки и знак $y = f(x,C)$ указывают, что в правой части равенства (5.9) переменная y не является независимой переменной и имеет равное $f(x,C)$ значение. Отсюда следует, что $y = f(x,C)$ удовлетворяет уравнению (5.7), так как

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x,C)} = 0,$$

---

[8] Если преобразование переменных линейно, то $\overline{F} = F$, так как вторые производные от ξ и η в формулах (3) равны нулю и $\overline{F}$ не получает дополнительных слагаемых от преобразования вторых производных.

[9] Это получается из выражения полного дифференциала $d\varphi = \varphi_xdx + \varphi_ydy = dC = 0$

поскольку выражение в квадратных скобках равно нулю при всех значениях x, y, а не только $y = f(x, C)$, что доказывает лемму 1.

Лемма 2. Если $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx\, dy + a_{22} dx^2 = 0,$$

то функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (5.6).

Доказательство леммы **2**. Пусть $\varphi(x, y) = C$ - общий интеграл уравнения (5.7). Докажем, что

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \tag{5.10}$$

для любой точки (x, y). Пусть (x_o, y_o) - какая-нибудь заданная точка. Если мы докажем, что в ней удовлетворяется равенство (5.10), то отсюда в силу произвольности (x_o, y_o) будет следовать, что равенств (5.10) есть тождество и функция $\varphi(x, y)$ является решением уравнения (5.7). Проведем через точку (x_o, y_o) интегральную кривую уравнения (5.6), полагая $\varphi(x_o, y_o) = C_o$ и рассматривая кривую $y = f(x, C_o)$.Очевидно, что $y_o = f(x_o, C_o)$. Для всех точек этой кривой имеем:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x,C_o)} = 0.$$

Полагая в последнем равенстве $x = x_o$ получим:

$$a_{11}\varphi_x^2(x_o, y_o) + 2a_{12}\varphi_x(x_o, y_o)\varphi_y(x_o, y_o) + a_{22}\varphi_y^2(x_o, y_o) = 0,$$

что и требовалось доказать[10].

Определение 7. Уравнение (5.7) называется *характеристическим* для уравнения (5.1), а его интегралы – *характеристиками.*

Полагая $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = const$ есть общий интеграл уравнения (5.7), мы обращаем в нуль коэффициент при $u_{\xi\xi}$ Если $\varphi(x, y) = const$ является другим общим интегралом уравнения (5.7), независимым от $\varphi(x, y)$, то мы обратим в нуль также и коэффициент при $u_{\eta\eta}$.

Уравнение (5.7) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_2}}{a_{11}}, \tag{5.11}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_2}}{a_{11}}. \tag{5.12}$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \tag{5.13}$$

[10] Установленная связь уравнений (5.5) и (5.6) эквивалентна известной связи между линейным уравнением с частными производными 1-го порядка и системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом можно убедиться, разлагая левую часть уравнения (5.5) в произведение двух линейных дифференциальных уравнений.

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = z_x(a_{11}z_x + a_{12}z_y) + z_y(a_{12}z_x + a_{22}z_y) = 0,$$

$$a_{11}z_x + a_{12}z_y = 0, \quad a_{12}z_x + a_{22}z_y = 0.$$

Уравнение называют в точке М уравнением *гиперболического* типа, если в точке М $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, *эллиптического* типа, если в точке М $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, *параболического* типа, если в точке М $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$[11].

Замечание 2. В различных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам.

Замечание 3. В случае, когда все коэффициенты $a_{11,}\, a_{12}, a_{22}$- постоянные, уравнение имеет один и тот же тип во всех точках пространства.

Замечание 4. Если уравнение в каких-то точках пространства эллиптическое, а в других гиперболическое, то оно называется *смешанным.* В этом случае параболические точки образуют линию раздела, которую называют *вырожденной.*

Характеристики

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G проходят две характеристики, причём для уравнения гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнения эллиптического типа комплексны и различны, а для уравнения параболического типа характеристики действительны и совпадают между собой.

1. Для уравнений гиперболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ и правые части уравнений (5.11) и (5.12) действительны и различны. Общие интегралы $\varphi(x,y) = C$ и $\psi(x,y) = C$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая

$$\xi = \varphi(x,y) \text{ и } \eta = \psi(x,y), \tag{5.14}$$

приводят уравнение (5.4) после деления на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ к виду

$$u_{\xi\eta} = \overline{\Phi}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta), \quad \Phi = -\frac{\overline{F}}{2\,\overline{a}_{12}},$$

Это, так называемая, *каноническая* форма уравнений гиперболического типа[12].

Часто пользуются *второй канонической* формой. Положим

$$\xi = \alpha + \beta, \;\; \eta = \alpha - \beta,$$

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

где α и β - новые переменные. Тогда

$$u_\xi = \frac{1}{2}\left(u_\alpha + u_\beta\right), \quad u_\eta = \frac{1}{2}\left(u_\alpha - u_\beta\right), \quad u_{\xi\eta} = \left(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}\right).$$

В результате уравнение (5.4) примет вид

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 \quad \left(\Phi_1 = 4\Phi\right).$$

---

[11] Эта терминология заимствована из теории кривых второго порядка.

[12] Для возможности введения новых переменных ξ и η через функции φ и ψ, надо убедиться в независимости этих функций, достаточным условием чего является отличие от нуля соответствующего функционального определителя: $\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$ в некоторой точке М обращается в нуль. Тогда имеет место пропорциональность строк, т. е. $\varphi_x / \varphi_y = \psi_x / \psi_y$, что, однако, невозможно, так как $\varphi_x/\varphi_y = \left(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_2}\right)\Big/ a_{11}$, $\psi_x/\psi_y = \left(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_2}\right)\Big/ a_{11}$, ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$), при этом считается $a_{11} \neq 0$, что не является ограничением общности. Тем самым независимость функций φ и ψ установлена.

2. Для уравнений *параболического* типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ уравнения (5.11) и (5.12) совпадают, и получается один общий интеграл уравнения (5.7): $\varphi(x,y) = const$. Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x,y) \text{ и } \eta = \eta(x,y),$$

где $\eta(x,y)$ - любая функция, не зависящая от φ. При таком выборе переменных коэффициент

$$a_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0,$$

так как $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; отсюда следует, что

$$a_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + 2a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0,$$

После деления уравнения (5.4) на коэффициент при $u_{\eta\eta}$ получим каноническую форму для уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} = \overline{\Phi}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta), \quad \left(\overline{\Phi} = -\frac{\overline{F}}{\overline{a}_{12}}\right).$$

Если в правую часть не входит u_ξ, то это уравнение будет обыкновенным дифференциальным уравнением, зависящим от ξ, как от параметра.

3. Для уравнения *эллиптического* типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ правые части уравнений (5.11) и (5.12) комплексны. Пусть

$$\varphi(x,y) = C$$

- комплексный интеграл уравнения (5.11). Тогда

$$\varphi^*(x,y) = C,$$

где φ^* - сопряжённая к φ функция, будет представлять собой общий интеграл сопряжённого уравнения (5.10). Нужно перейти к комплексным переменным, полагая

$$\xi = \varphi(x,y) \text{ и } \eta = \varphi^*(x,y), \qquad .$$

При этом уравнение эллиптического типа приводится к такому же виду, что и гиперболическое. Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, вводят новые переменные α и β, равные

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2},$$

так что

$$\xi = \alpha + \beta, \ \eta = \alpha - \beta.$$

В этом случае

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\alpha_x^2 = (a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+ 2l(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0,$$

то есть

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0. \qquad .$$

Уравнение (5.4) после деления на коэффициент при $u_{\xi\xi}$ примет вид[13]

[13] Подобное преобразование законно только в том случае, если коэффициенты уравнения (5.1) – аналитические функции. Действительно, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то правая часть уравнений (5.11) и (5.12) комплексны, а, следовательно, функция y должна иметь комплексные значения. О решении этих уравнений можно говорить лишь в том случае, когда коэффициенты $a_{ik}(x,y)$ определены для комплексных значений y. При приведении уравнений эллиптического типа к канонической форме мы ограничимся случаем аналитических коэффициентов.

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta), \quad \left(\Phi = -\frac{\overline{F}}{\overline{a}_{22}}\right).$$

Таким образом, в зависимости от *знака* выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ имеют место следующие канонические формы уравнения (5.1):

1. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (*гиперболический* тип), $u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ или $u_{xy} = \Phi$,
2. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (*эллиптический* тип), $u_{xx} + u_{yy} = \Phi$,
3. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ (*параболический* тип), $u_{xx} = \Phi$.

Если сравнить *уравнение колебаний* струны с первым случаем, то видно, что уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ относится к *гиперболическому* типу. К *параболическому* типу явно относится уравнение *теплопроводности* $u_t = a^2 \Delta u$, что видно из сравнения с уравнением $u_{\eta\eta} = \overline{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$*, в котором справа стоят первые производные по координатам.* Легко видеть, что *эллиптический* тип соответствует *уравнению Лапласа*. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

ГЛАВА 3. МЕТОД ФУРЬЕ

Жан Батист Жозеф Фурье
1768 –1830

Метод Фурье один из самых распространённых методов решения краевых задач. Этот метод рассматривается здесь на примере решения дифференциального уравнения гиперболического типа.

§ 6. Дифференциальное уравнение с однородными граничными условиями

Условие задачи: найти решение гиперболического уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad (6.1)$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0. \end{aligned}\right\}. \qquad (6.2)$$

Решение ищется в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t). \qquad (6.3)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (6.1) даёт

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t).$$

После деления на (6.3) получается разделение переменных

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)}. \qquad (6.4)$$

Условие (6.3) должно удовлетворяться для всех $0 < x < l$ и $t > 0$. Так как должно быть справедливо равенство (6.4) при любых x и t, то правая и левая части должны быть постоянны

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \qquad (6.5)$$

где λ - любое положительное или отрицательное число. Тогда

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \qquad (6.6)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0. \qquad (6.7)$$

Граничные условия при (6.3) получаются в виде

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0\,,$$
$$u(l,t) = X(l) \cdot T(t) = 0\,.$$

Отсюда краевые условия принимаются в виде

$$X(0) = X(l) = 0\,, \tag{6.8}$$

так как иначе было бы $T(t) \equiv 0$ и $u(x,l) = 0$, что противоречит условию.

§ 7. Задача Штурма – Лиувилля

Задача Штурма – Лиувилля - это *задача о собственных значениях, которая формулируется следующим образом*: найти те значения λ, при которых существуют *нетривиальные* (ненулевые) решения задачи:

$$\left.\begin{aligned} &X''+\lambda X = 0, \\ &X(0) = X(l) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

а также найти эти решения.

Такие значения λ называются *собственными значениями*, их нетривиальные решения называются *собственными функциями* задачи (7.1).

Рассмотрим *разные* случаи.

а) $\lambda = 0$. Задача в этом случае не имеет нетривиальных решений, потому что

$$X''= 0 \quad \Rightarrow X(x) = C_1 x + C_2\,.$$

Граничные условия дают:

$X(0) = \{C_1 x + C_2\}_{x=0} \quad \Rightarrow C_2 = 0$ и $X(l) = \{C_1 x + C_2\}_{x=l} = C_1 l + C_2 = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0$ и, следовательно, $X(x) = 0.$

Это решение не отвечает условию задачи, потому что цель состоит в том, чтобы найти *нетривиальное решение*.

б) $\lambda > 0$ дифференциальное уравнение и граничные условия имеют вид

$$X''+\lambda X = 0\,,$$
$$X(0) = X(l) = 0\,.$$

Решение этого однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка ищется с помощью подстановки Эйлера

$$X = e^{kx},$$
$$X' = k\,e^{kx},$$
$$X'' = k^2\,e^{kx}.$$

Подстановка в дифференциальное уравнение даёт характеристическое уравнение в виде

$$k^2 + \lambda = 0\,,$$

решение которого равно $k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$.

Тогда решение имеет вид $X(x) = D_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + D_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x$.

Граничные условия дают значения постоянных D_1, D_2 в виде

$$X(0) = D_1 = 0,$$
$$X(l) = D_2 \sin\sqrt{\lambda l} = 0.$$

При нетривиальном решении $D_2 \neq 0$, а следовательно,

$$\sin\sqrt{\lambda l} = 0$$

Отсюда уравнение для λ получается в виде $\sqrt{\lambda} = \dfrac{\pi n}{l}$, где n - целое число.

Следовательно, нетривиальные решения возможны при

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2. \tag{7.2}$$

Этим *собственным значениям* соответствуют *собственные функции*

$$X_n(x) = D_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где D_n - произвольная постоянная.

Если положить $D_n = 1$, то собственные решения принимают вид

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{7.3}$$

Этим же собственным значениям λ_n соответствуют

$$T(t) = A_n \cos\frac{\pi n}{l} a t + B_n \sin\frac{\pi n}{l} a t. \tag{7.4}$$

Тогда решение имеет вид

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} a t + B_n \sin\frac{\pi n}{l} a t\right) \cdot \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{7.5}$$

является частным решением задачи (6.1) с граничными условиями (6.2).

Замечание 1. Эти решения могут удовлетворять начальным условиям задачи

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

только для частных случаев значений $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Потребуем, чтобы функция (7.5) удовлетворяла условиям (7.6). Пусть общее решение имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} a t + B_n \sin\frac{\pi n}{l} a t\right) \cdot \sin\frac{\pi n}{l} x. \tag{7.7}$$

При условиях (7.6)

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x,0) &= \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} B_n \sin\frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

Если использовать ряды Фурье для нечётной функции (интервал $[0,l]$) и продолжить нечётно, то начальные условия будут заданы в виде

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \text{ где } \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi, \tag{7.9}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \text{ где } \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \xi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \tag{7.10}$$

Сравнивая (7.8) и (7.9), а также (7.8) и (7.10), получим, что коэффициенты A_n и B_n должны быть равны

$$A_n = \varphi_n \text{ и } B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n. \tag{7.11}$$

Для существования решения необходимо, чтобы $u(x,t)$, представляемая в (7.8), была дифференцируемой, а ряд сходился.

§ 8. Решение неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных

Рассмотрим неоднородное уравнение колебаний

$$u_{tt} + a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad 0 < x < l \tag{8.1}$$

с начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \; 0 < x < l \tag{8.2}$$

и однородными граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(l,t) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad t > 0\,. \tag{8.3}$$

Решение ищется в виде разложения в ряд Фурье по x

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x\,, \tag{8.4}$$

рассматривая при этом t как параметр.

Для нахождения $u(x,t)$ нужно найти $u_n(t)$. Представим функцию $f(x,t)$ и начальные условия в виде рядов Фурье

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x, \text{ где } f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t) \sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \text{ где } \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi\,, \tag{8.5}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \text{ где } \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi\,.$$

Подставляя предполагаемую форму решения (8.5) в исходное уравнение (8.2), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{l} x \left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t) \right\} = 0\,. \tag{8.6}$$

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, то есть

$$u_n''(t) + a^2 u_n(t) \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = f_n(t)\,. \tag{8.7}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для u_n с постоянными коэффициентами. Начальные условия дают

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin\frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin\frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} x.$$

Откуда

$$\left.\begin{aligned} u_n(0) &= \varphi_n, \\ u_n(0) &= \psi_n. \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

Эти условия (8.8) полностью определяют решение уравнения (8.1). Функцию $u_n(t)$ можно представить в виде

$$u_n(t) = u_n^{(1)}(t) + u_n^{(2)}(t)\,,$$

где

$$u_n^{(1)}(t) = \frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\, f_n(\tau)\,d\tau,$$

$$u_n^{(2)}(t) = \varphi_n \cos\frac{\pi n}{l}a t + \psi_n \frac{l}{\pi n a}\sin\frac{\pi n}{l}a t.$$

Отсюда общее решение имеет вид (вывод приводится в Приложении А)

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\,\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot f_n(\tau)\,d\tau + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n \cos\frac{\pi n}{l}a t + \psi_n \frac{l}{\pi n a}\sin\frac{\pi n}{l}a t)\sin\frac{\pi n}{l}x. \end{gathered} \tag{8.9}$$

Приложение А. *Вывод формулы* (8.9)

Для получения формулы (8.9) необходимо решить обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$u_n''(t) + a^2 u_n(t)\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = f_n(t) \tag{8.10}$$

при однородных граничных условиях (задача Коши)

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\}\ 0 < x < l. \tag{8.11}$$

Решение ищется в виде суммы

$$u_n(t) = u_n^{(1)}(t) + u_n^{(2)}(t), \tag{8.12}$$

где $u_n^{(1)}(t)$- общее решение соответствующего однородного уравнения, а $u_n^{(2)}(t)$ - какое – либо частное решение заданного неоднородного уравнения (8.10).

Определение $u_n^{(1)}(t)$. Для определения $u_n^{(1)}(t)$ решается однородное уравнение

$$u_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) = 0. \tag{8.13}$$

Решение ищется по Коши в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{8.14}$$

где y_1 и y_2 - два линейно независимых частных решения, которые определяются с помощью подстановки Эйлера

$$y = e^{rt}, \quad y_t = r e^{rt}, \quad y_2 = r^2 e^{rt}. \tag{8.15}$$

Подстановка в (8.13) даёт характеристическое уравнение

$$r^2 + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 = 0. \tag{8.16}$$

Решения этого уравнения – сопряжённые мнимые

$$r_{1,2} = \pm i\frac{a\pi n}{l}. \tag{8.17}$$

Тогда решение уравнения (8.13) имеет вид

$$u_n^{(1)} = C_1 \cos\frac{a\pi n}{l}t + C_2 \sin\frac{a\pi n}{l}t. \tag{8.18}$$

Определение $u_n^{(2)}(t)$. Решение ищутся по методу Лагранжа вариации произвольной постоянной

$$u_n = C_1(t)\cos\frac{a\pi n}{l}t + C_2(t)\sin\frac{a\pi n}{l}t\,. \tag{8.19}$$

Беря производную по t, получаем

$$\dot{u}_n = C_1'(t)\cos\frac{a\pi n}{l}t + C_2'(t)\sin\frac{a\pi n}{l}t - C_1(t)\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{a\pi n}{l}t + C_2(t)\frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}t\,. \tag{8.20}$$

По теории принимаем

$$C_1'(t)\cos\frac{a\pi n}{l}t + C_2'(t)\sin\frac{a\pi n}{l}t = 0\,. \tag{8.21}$$

Тогда вторая производная равна

$$\begin{aligned}\ddot{u}_n = &-C_1'(t)\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{a\pi n}{l}t + C_2'(t)\frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}t - \\ &- C_1(t)\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2\cos\frac{a\pi n}{l}t - C_2(t)\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2\sin\frac{a\pi n}{l}t.\end{aligned} \tag{8.22}$$

После подстановки в уравнение (8.10) получим

$$\begin{aligned}&C_1'(t)\cos\frac{a\pi n}{l}t + C_2'(t)\sin\frac{a\pi n}{l}t = 0,\\ &-C_1'(t)\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{a\pi n}{l}t + C_2'(t)\frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}t - C_1(t)\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2\cos\frac{a\pi n}{l}t - C_2(t)\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2\sin\frac{a\pi n}{l}t +\\ &+\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2\left[C_1(t)\cos\frac{a\pi n}{l}t + C_2(t)\sin\frac{a\pi n}{l}t\right] = f(t).\end{aligned} \tag{8.23}$$

И после взаимного уничтожения четырёх членов остаётся второе уравнение для определения C_1', C_2' в виде

$$\left.-C_1'(t)\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{a\pi n}{l}t + C_2'(t)\frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}t = f(t)\right\}. \tag{8.24}$$

Отсюда получается система уравнений для определения $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$:

$$\left.\begin{aligned}&C_1'(t)\cos\frac{a\pi n}{l}t + C_2'(t)\sin\frac{a\pi n}{l}t = 0,\\ &-C_1'(t)\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{a\pi n}{l}t + C_2'(t)\frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}t = f(t).\end{aligned}\right\} \tag{18.25}$$

Решение полученной системы выполняется по методу Крамера. Определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix}\cos\frac{a\pi n}{l}t & \sin\frac{a\pi n}{l}t\\ -\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{a\pi n}{l}t & \frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}\end{vmatrix} = \frac{a\pi n}{l}\,. \tag{8.26}$$

Вспомогательные определители имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix}0 & \sin\frac{a\pi n}{l}t\\ f(t) & \frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}\end{vmatrix} = -f(t)\sin\frac{a\pi n}{l}t,\\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix}\cos\frac{a\pi n}{l}t & 0\\ -\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{a\pi n}{l}t & f(t)\end{vmatrix} = f(t)\cos\frac{a\pi n}{l}t.\end{aligned} \tag{8.27}$$

Откуда получаем

$$C_1'(t) = -\frac{l\cdot f(t)}{a\pi n}\sin\frac{a\pi n}{l}t \Rightarrow C_1(t) = -\int_0^t \frac{l}{a\pi n}\sin\frac{a\pi n}{l}\tau f(\tau)\,d\tau,$$
$$C_2'(t) = \frac{l\cdot f(t)}{a\pi n}\cos\frac{a\pi n}{l}t \Rightarrow \quad C_2(t) = \int_0^t \frac{l}{a\pi n}\cos\frac{a\pi n}{l}\tau f(\tau)\,d\tau. \qquad (8.28)$$

Решение получается в виде

$$u_n^{(2)} = -\frac{l}{a\pi n}\int_0^t \sin\frac{a\pi n}{l}\tau f(\tau)\,d\tau\cos\frac{a\pi n}{l}t + \frac{l}{a\pi n}\int_0^t \cos\frac{a\pi n}{l}\tau f(\tau)\,d\tau\sin\frac{a\pi n}{l}t =$$

$$-\frac{l}{a\pi n}\int_0^t \sin\frac{a\pi n}{l}\tau\cos\frac{a\pi n}{l}tf(\tau)\,d\tau + \frac{l}{a\pi n}\int_0^t \cos\frac{a\pi n}{l}\tau\sin\frac{a\pi n}{l}t\,f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{l}{a\pi n}\int_0^t \sin\frac{a\pi n}{l}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Откуда можно записать

$$u_n^{(2)} = \frac{l}{a\pi n}\int_0^t \sin\frac{a\pi n}{l}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau\,. \qquad (8.29)$$

Решение задачи Коши (даны дифференциальное уравнение и *начальные* условия, то есть поставлена *задача Коши***).**

Используются начальные условия (8.2),

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \ 0 < x < l\,, \qquad (8.30)$$

которые записываются в виде интеграла Фурье

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\,, \qquad (8.31)$$

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\,. \qquad (8.32)$$

Для определения произвольных постоянных рассматриваются начальные условия при $t = 0$, при которых $u_n^{(2)} = 0$, так как

$$u_n^{(2)}(0) = \frac{l}{a\pi n}\int_0^0 \sin\frac{a\pi n}{l}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = 0\,.$$

Тогда

$$u_n^{(1)} = C_1\cos\frac{a\pi n}{l}t + C_2\sin\frac{a\pi n}{l}t,$$
$$u'_n{}^{(1)} = -\frac{a\pi n}{l}C_1\sin\frac{a\pi n}{l}t + \frac{a\pi n}{l}C_2\cos\frac{a\pi n}{l}t. \qquad (8.33)$$

Отсюда при заданных граничных условиях получаем

$$u_n(0) = C_1 = \varphi_n \quad \Rightarrow C_1 = \varphi_n,$$
$$u'_n(0) = \frac{a\pi n}{l}C_2 = \psi_n \quad \Rightarrow C_2 = \frac{l}{a\pi n}\psi_n. \qquad (8.34)$$

Подставляя полученные решения, получим

$$u_n^{(1)} = \varphi_n\cdot\cos\frac{a\pi n}{l}t + \frac{l}{a\pi n}\psi_n\cdot\sin\frac{a\pi n}{l}t\,. \qquad (8.35)$$

Отсюда и с учётом формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t)-u_n''(t)+f_n(t)\right\}=0\,. \qquad (8.36)$$

получается формула (8.9)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\ \sin\frac{\pi n}{l}x\cdot f_n(\tau)\,d\tau+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n\cos\frac{\pi n}{l}at+\psi_n\ \frac{l}{\pi n a}\sin\frac{\pi n}{l}at)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Определение 1. *Свёртка* функций $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащих $L(-\infty,\infty)$, - это функция $h(x)$, определяемая равенством

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)dy$$

и обозначаемая символом $(f*g)(x)$, то есть,

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)dy\ . \qquad (8.38)$$

Пример 1. $y''+\upsilon^2y=f(x)$ при начальных условиях $y(0)=y(s)=0$.

Решение ищется по методу Коши в виде суммы общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения y^* заданного неоднородного уравнения

$$y=\bar{y}+y^*.$$

Огюстен Луи Коши
1789 - 1857

1) $\bar{y}$ определяется из $y''+\upsilon^2y=0$. Решение было уже получено раньше в виде

$$X(x)=C_1\cos\upsilon x+C_2\sin\upsilon x\,.$$

Если положить $C_1=-A\sin(\upsilon s),\quad C_2=A\cos(\upsilon s)$, тогда

$$\bar{y}=A\sin\upsilon(x-s)$$

- это фундаментальное решение, где $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\quad \upsilon s=\mathrm{arctg}\dfrac{C_1}{C_2}$.

2) y^* ищется в виде

$$y^*=\int_0^x K(x,s)\cdot f(s)\,ds$$

при $K(x,s)=A\sin\upsilon(x-s)$.- ядро.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A=\dfrac{1}{\upsilon},\ \ K'(x,s)=A\upsilon\cos\upsilon(x-s)$,

$$K(s,s)=A\sin\upsilon(s-s)=\frac{1}{\upsilon}\sin\upsilon(s-s).=0,$$

$$K''(s,s)=A\upsilon\cos\upsilon(s-s)=\frac{1}{\upsilon}\cdot\upsilon\cos\upsilon(s-s)=1,$$

так как $K(0,s)=K(s,s)=0$, то выполняются условия $y(0)=y(s)=0$. Отсюда

$$y^*=\int_0^x\sin\upsilon(x-s)\cdot f(s)\,ds\,. \qquad (8.39)$$

Общее решение записывается в виде

$$y = A\sin\upsilon(x-s) + \frac{1}{\upsilon}\int_0^x \sin\upsilon(x-s)\cdot f(s)\,ds\,. \qquad (8.40)$$

Пример 2. Задано *неоднородное* уравнение Лапласа, которое называется уравнением *Пуассона*:

$$\Delta u = F(x, y)\,. \qquad (8.41)$$

Требуется найти функцию, удовлетворяющую уравнению (8.41) в области D, непрерывную в области D, и принимающую на кривой C заданные значения:

$$u\big|_C = f(P)\,. \qquad (8.42)$$

В данном случае P - это точка, лежащая на кривой C. Следует отметить, что здесь граничные условия даны для внутренней задачи, когда функция ищется внутри контура C.

Для решения этой задачи разобьем её обычным способом на две более простые, то есть, будем искать $u(M)$ в виде

$$u(M) = u_1(M) + u_2(M)\,,$$

где $u_1(M)$ является решением задачи

$$\Delta u_1 = 0, \qquad (8.43)$$

$$u_1\big|_C = f(P), \qquad (8.44)$$

а $u_2(M)$ - решением задачи

$$\Delta u_2 = F(x, y), \qquad (8.45)$$

$$u_2\big|_C = 0. \qquad (8.46)$$

Таким образом, если нам известно решение задачи Дирихле (8.43), (8.44) для однородного уравнения $\Delta u = 0$, то при переходе к неоднородному уравнению (8.41) нам достаточно рассмотреть лишь случай нулевых граничных условий.

Итак, будем рассматривать задачу (8.45), (8.46). Для решения этой задачи могут быть использованы собственные функции двумерной задачи Штурма – Лиувилля: нужно найти значения параметра λ - собственных значений, при которых существует нетривиальное решение уравнения

$$\Delta\upsilon + \lambda\upsilon = 0, \qquad (8.47)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\upsilon\big|_C = 0\,, \qquad (8.48)$$

а также найти эти решения – собственные функции.

Ограничимся тем частным случаем, когда решение задачи (8.47) , (8.48) можно получить в явном виде. Пусть область D прямоугольник, тогда собственные числа и собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{mn} &= u^2\left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}\right), \\ \upsilon_{mn}(x, y) &= \sin\frac{m\pi x}{p}\cdot\sin\frac{n\pi y}{q}, \quad m, n = 1,2. \end{aligned} \qquad (8.49)$$

Будем искать решение исходной задачи (8.45), (8.46) в виде двойного ряда Фурье по синусам

$$u_1(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\upsilon_{mn}(x, y)\,, \qquad (8.50)$$

который в случае его равномерной сходимости удовлетворяет граничному условию (8.46). Определим постоянные A_{mn} таким образом, чтобы ряд (9.50) удовлетворял уравнению (8.45). Учитываем, что функции υ_{mn} удовлетворяют уравнению (8.45) и функции υ_{mn} удовлетворяют в D тождеству $\Delta\upsilon_{mn} + \lambda_{mn}\upsilon_{mn} = 0$ и

$$\Delta\left[\sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\upsilon_{mn}\right] = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\Delta\upsilon_{mn} = -\sum_{m,n=1}^{\infty}\lambda_{mn}A_{mn}\upsilon_{mn}(x,y) = F(x,y). \tag{8.51}$$

Предполагаем, что $F(x,y)$ раскладывается в двойной ряд Фурье по синусам, получим, что

$$A_{mn} = -\frac{4}{pq\lambda_{mn}}\int_0^p\int_0^q F(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy. \tag{8.52}$$

Таким образом, решение задачи (8.45), (8.46) даётся рядом

$$u_2(x,y) = A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}, \tag{8.53}$$

где A_{mn} определяется соотношением (8.52). Это формальное решение должно быть обосновано. Используя результаты решения для колебаний круглой мембраны, можно получить аналогичное решение задачи (8.45), (8.46) для круга при дополнительном предположении, что правая часть уравнения (8.45) не зависит от полярного угла φ, то есть, $F = F(r)$.

ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

§ 9. Интегральная формула Фурье

Пусть функция $f(t)$, имеющая период $2l$, представлена рядом Фурье в виде

$$f(t) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\,d\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\frac{n\pi}{l}(\tau - t)\,d\tau. \tag{9.1}$$

Если положить $\frac{n\pi}{l} = \lambda$, $\frac{\pi}{l} = \Delta\lambda$ и перейти формально к пределу при $l \to \infty$, то сумма превратится в интеграл, и получается *интегральная формула Фурье*

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\lambda(\tau - t)\,d\tau\ . \tag{9.2}$$

Она представляет функцию, определённую в интервале $(-\infty,+\infty)$ таким же образом, как ряд Фурье представляет функцию с конечным периодом. После преобразований можно привести формулу (9.2) к следующему виду:

$$f(t) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} e^{it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} f(\tau)\,d\tau\,d\lambda \tag{9.3}$$

или

$$f(t) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin l(t-\tau)}{t-\tau} f(\tau)\,d\tau. \tag{9.4}$$

Определение 1. Интеграл в правой части формулы (9.2) называется *двойным интегралом Фурье.*

Определение 2. Формула (9.3) называется *комплексной формой интеграла Фурье.*

Определение 3. Формулу (9.4) называют *представлением функции* $f(t)$ *посредством простого интеграла Фурье.*

Справедливы формулы *косинус – преобразование Фурье* в виде

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos tu\,du\int_0^{\infty} f(\tau)\cos ut\,d\tau \tag{9.5}$$

и *синус – преобразование Фурье* в виде

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin t\,u\,du\int_0^{\infty}f(\tau)\sin u\,t\,d\tau\ . \qquad (9.6)$$

Основные свойства преобразования Фурье

Свойство 1. Формулы, рассмотренные выше, *приводят к взаимным* или *двойственным* соотношениям между *парами функций.*
Положим

$$F(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{iut}dt\ , \qquad (9.7)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле *главного значения,* то есть как предел

$$\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}F(u)e^{itu}\ du\ . \qquad (9.8)$$

Определение 4. Функция $F(u)$ называется *преобразованием* или *трансформацией Фурье* функции $f(t)$.

Если функция $f(t)$ интегрируется в интервале $(-\infty,+\infty)$, то функция $F(u)$ существует для всех t. Функции $F(u)$ и $f(t)$, являющиеся преобразованием Фурье одна другой, называются парой преобразований Фурье. Полагая

$$F_c(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos u\,t\,dt,. \qquad (9.9)$$

получим из формулы (9.9)

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(u)\cos t\,u\,du. \qquad (9.10)$$

Определение 5. Функции, связанные таким образом, называются парой косинус - преобразования Фурье.
Замечание 1. Аналогично из формулы (9.2) получается *синус - преобразования Фурье*.

$$F_s(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin u\,t\,dt,. \qquad (9.11)$$

получим из формулы (9.11)

$$g(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(u)\sin t\,u\,du. \qquad (9.12)$$

Замечание 2. Если $f(t)$ - *чётная* функция, то

$$F(u)=F_c(u)\,. \qquad (9.13)$$

Если $f(t)$ - *нечётная* функция, то

$$F(u)=i\,F_s(u)\,. \qquad (9.14)$$

Свойство 2. Пусть функции $F(u)$ и $G(u)$- преобразования Фурье соответственно функций $f(t)$ и $g(t)$, определённых формулами (9.5) и (9.6).
Формально имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\cdot G(u)e^{-itu}du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\,e^{-itu}du\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)e^{iu\tau}d\tau=\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{-iu(t-\tau)}\ du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau,\end{aligned} \qquad (9.15)$$

то есть, функции

$$F(u)\cdot G(u) \text{ и } h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau \qquad (9.10)$$

называются *парой преобразований Фурье*.

§ 10. Кратные преобразования Фурье

По определению имеем

$$f(x,y)=\mathsf{F}[\mathrm{f(x,y)}]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega x+\lambda y)} f(x,y)dxdy. \qquad (10.1)$$

Определение 6. Функция $F(\omega,\lambda)$ называется *преобразованием Фурье функции двух переменных* $f(x,y)$.

Для функций $f(x,y)$ и $F(\omega,\lambda)$, принадлежащих L, имеет место следующая формула обращения F

$$f(x,y)=\mathsf{F}^{-1}[F(\omega,\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega x+\lambda y)} F(\omega,\lambda)d\omega d\lambda . \qquad (10.2)$$

Если $f(x,y)$ и $g(x,y)$ принадлежат L, то существует интеграл

$$f(x,y)\underset{-\infty}{\overset{\infty}{*}}\underset{-\infty}{\overset{\infty}{*}} g(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, g(x-\xi,y-\eta)\, d\xi\, d\eta , \qquad (10.3)$$

причём

$$\mathsf{F}[f(x,y)\underset{-\infty}{\overset{\infty}{*}}\underset{-\infty}{\overset{\infty}{*}} g(x,y)]=F(\omega,\lambda)G(\omega,\lambda) . \qquad (10.4)$$

Некоторые приложения преобразований Фурье

Преобразования Фурье играют важную роль при решении широкого класса задач математической физики, к которым относятся, например, краевые задачи для уравнения Лапласа, Гельмгольца и Фурье в области, имеющий вид бесконечной полосы и полуполосы, бесконечного цилиндра и полуцилиндра и т.п.

В частности, применение преобразования Фурье целесообразно в задачах, приводящих к интегрированию уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+L(u)=f(x,y) ,$$

где $L(u)$ - линейный дифференциальный оператор, не содержащий переменной x; $f(x,y)$ - заданная функция.

Пример 1. Рассмотрим задачу *гидродинамики*, сводящуюся к решению уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad (y<0) \qquad (10.5)$$

при следующих граничных

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ при } \quad y=0 \qquad (10.6)$$

и начальных условиях

$$u=\varphi(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}=0 \text{ при } y=0 \text{ и } .t=0 . \qquad (10.7)$$

Пусть функция $U(\omega,y,t)$ ищется в виде

$$U(\omega,y,t)=F[u(x,y,t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,y,t)\,e^{-i\omega x}dx\,. \tag{10.8}$$

Тогда в предположении, что $u\to 0$ и $\frac{\partial u}{\partial x}\to 0$, когда $x\to\infty$, используя интегрирование по частям, получим

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_{xx}(x,y,t)\,e^{-i\omega x}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}du_x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[e^{-i\omega x}u_x(x,y,t)\Big]_{-\infty}^{\infty}[=0]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_x(x,y,t)\,de^{-i\omega x}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-i\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_x e^{-i\omega x}dx\right)=\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_x e^{-i\omega x}dx=$$

$$=\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}du=\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\Big[e^{-i\omega x}u(x,y,t)\Big]_{-\infty}^{\infty}[=0]-\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,y,t)de^{-i\omega x}\right)=$$

$$=-\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,y,t)\,de^{-i\omega x}=\frac{i\omega\cdot i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u\,e^{-i\omega x}dx=-\frac{\omega^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u\,e^{-i\omega x}dx=-\omega^2F(u).$$

$$F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=-\,\omega^2 U. \tag{10.9}$$

Из равенства $U(\omega,y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,y,t)\,e^{-i\omega x}dx$ следует, что преобразование Фурье для $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ равно $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_{yy}(x,y,t)\,e^{-i\omega x}dx=U_{yy}(\omega,y,t)$ и тогда вместо (10.1) будем иметь уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\omega^2 U=0. \tag{10.10}$$

Его решение, стремящееся к нулю, когда $y=-\infty$, имеет вид[14]

$$U=c(\omega,t)\,e^{|\omega|\,y}, \tag{10.11}$$

где $c(\omega,t)=U\big|_{y=0}$. Учитывая это последнее равенство, после применения его к уравнению (10.10)[15] найдём

---

[14] $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\omega^2 U=0.$ - это обыкновенное дифференциальное, однородное уравнение второго порядка, решение которого равно $U(\omega,y,t)=C_1(\omega,t)u_1+C_2(\omega,t)u_2$, а u_1 и u_2 ищутся с помощью подстановки Эйлера $u=e^{k\,y}$. Получается характеристическое уравнение в виде $k^2-\omega^2=0,\quad k_{1,2}=\pm\omega$. Отсюда $U(\omega,y,t)=C_1(\omega,t)\,e^{-\omega y}+C_2(\omega,t)\,e^{\omega y}$.

[15] $\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\Rightarrow\ U=|\omega|c(\omega,t)e^{|\omega|\,y}=-\frac{1}{g}c_{tt}(\omega,t)e^{|\omega|\,y}\Rightarrow c_{tt}+|\omega|g\,c=0$ - это обыкновенное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого ищется в виде $c(\omega,t)=A(\omega)\,c_1+B(\omega)\,c_2$, для которого частные линейно-независимые решения ищутся по методу Эйлера в виде $c=e^{r\,t}$, $c_t=r\,e^{r\,t}$, $c_{tt}=r^2\,e^{r\,t}$. Получается следующее характеристическое уравнение:

$$c(\omega,t) = A(\omega)e^{i\sqrt{g|\omega|}\,t} + B(\omega)e^{-i\sqrt{g|\omega|}\,t}. \qquad (10.12)$$

Из условий (10.7) получим $\Phi(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-i\omega x}dx$, и тогда

$$A(\omega) = B(\omega) = \frac{1}{2}\Phi(\omega), \qquad (10.13)$$

где $\Phi(\omega)$ - преобразование Фурье функции $\varphi(x)$.

$U_{y=0} = c(\omega,t) = A(\omega)e^{i\sqrt{g|\omega|}\,t} + B(\omega)e^{-i\sqrt{g|\omega|}\,t}, \quad c(\omega,0) = A(\omega) + B(\omega) = \Phi(\omega)$,

$$c_t(\omega,t) = i\sqrt{g|\omega|}\,A(\omega)e^{i\sqrt{g|\omega|}\,t} - i\sqrt{g|\omega|}\,B(\omega)e^{-i\sqrt{g|\omega|}\,t}$$

$$[c_t(\omega,0)] = i\sqrt{g|\omega|}\,A(\omega) - i\sqrt{g|\omega|}\,B(\omega) = 0 \Rightarrow A(\omega) - B(\omega) = 0,$$

$$A(\omega) + B(\omega) = \Phi(\omega), \quad A(\omega) - B(\omega) = 0.$$

Тогда $A(\omega) = B(\omega) = \dfrac{1}{2}\Phi(\omega)$. Подставляя в $c(\omega,t) = A(\omega)e^{i\sqrt{g|\omega|}\,t} + B(\omega)e^{-i\sqrt{g|\omega|}\,t}$, получим

$$c(\omega,t) = \frac{\Phi(\omega)}{2}e^{i\sqrt{g|\omega|}\,t} + \frac{\Phi(\omega)}{2}e^{-i\sqrt{g|\omega|}\,t} = \frac{\Phi(\omega)}{2}\left[\cos\left(\sqrt{g|\omega|}\,t\right) + i\sin\left(\sqrt{g|\omega|}\,t\right)\right] +$$

$$+ \frac{\Phi(\omega)}{2}\left[\cos\left(\sqrt{g|\omega|}\,t\right) - i\sin\left(\sqrt{g|\omega|}\,t\right)\right] = \Phi(\omega)\cos\left(\sqrt{g|\omega|}\,t\right).$$

Таким образом,

$$U = \Phi(\omega)\cos(\sqrt{g|\omega|}\,t)e^{i|\omega|y} \qquad (10.14)$$

и, следовательно, решение поставленной краевой задачи имеет вид

$$u(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\cos\sqrt{g|\omega|}\,t\cdot e^{|\omega|y+i\omega x}d\omega. \qquad (10.15)$$

Примечание. Метод интегральных преобразований имеет ряд преимуществ перед другими методами интегрирования дифференциальных уравнений, так как значительно сокращает вычислительную работу, позволяет получить решение в такой форме, которая наиболее удобна для исследования, благодаря обозримости полученного решения. Метод интегральных преобразований имеет такие же преимущества при решении систем дифференциальных уравнений, потому что при этом каждая неизвестная функция определяется сама по себе, независимо от других.

Замечание 1. Выбор *синус* – или *косинус – преобразований Фурье* для решения той или иной краевой задачи определяется видом краевых условий на нижнем пределе переменной, подлежащей исключению. Так, применение синус – преобразования к производной $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, входящей в дифференциальное уравнение, целесообразно в том случае, когда задана величина $u(x,t)$ при $x = 0$, а применение косинус – преобразования целесообразно в том случае, когда задано значение $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ при $x = 0$. Действительно, умножая $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на $\sin px$ и интегрируя по частям полученное выражение по x в пределах от нуля до бесконечности, найдём

$r^2 + |\omega|g = 0$ Отсюда получаются решения в виде $r_{1,2} = \pm i\sqrt{|\omega|g}$. Подставляя в с, получим два частных решения $c_1 = e^{i\sqrt{g|\omega|}\,t}, \quad c_2 = e^{-i\sqrt{g|\omega|}\,t}$. Это и даёт формулу (11.12).

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin pxdx = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\sin px\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x}\cos pxdx .$$

В силу физических условий задачи $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0$. Значит, внеинтгеральный член обращается в нуль. После повторного интегрирования по частям получим

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin pxdx = -p\left(u\cos px\right)\Big|_0^\infty - p^2\int_0^\infty u\,\sin px\,dx .$$

Предположим, что $\lim\limits_{x\to\infty} u = 0$, тогда

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin pxdx = -p\left(u(x,t)\big|_{x=0}\right) - p^2 U(p,t) .$$

Если воспользоваться косинус – преобразованием Фурье, то, рассуждая аналогично, получим

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin pxdx = -p\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} - p^2 U(p,t) .$$

Замечание 2. Если в дифференциальное уравнение входит производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, то исключить её с помощью синус – или косинус – преобразования Фурье по переменной x не удаётся. . Это следует из того, что интегрирование по частям интеграла $\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x}\sin pxdx$ $\left(\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x}\cos pxdx\right)$ приводит к интегралу $\int_0^\infty u\cos pxdx$ $\left(u\sin pxdx\right)$, который не выражается через $U(x,t)$ Это большой недостаток преобразований Фурье по сравнению, например, с преобразованием Лапласа, который быстро приводит к цели. Однако, по преобразованию Фурье легче по изображению находить оригинал, чем при использовании преобразования Лапласа.

Пример 2. *Рассмотрим задачу распространения тепла в полубесконечном стержне.* Условие на конце $x=0$ состоит в том, что на этом конце поддерживается постоянная температура u_o, а начальная температура равна нулю:

$$u(0,t)=u_o, \quad u(x,0)=0.$$

Решение. Найти решение $u(x,t)$ однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x>0, \quad t>0 , \qquad (10.16)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0)=0 \qquad (10.17)$$

и краевому условию

$$u(0,t)=u_o . \qquad (10.18)$$

Замечание 3. Характер условий задачи показывает, что можно применить синус - преобразование Фурье.

Используем синус – преобразование Фурье

$$U(p,t)=\int_0^\infty \sin px\, u(x,t)\,dx . \qquad (10.19)$$

Умножим обе части дифференциального уравнения (10.16) на $\sin px$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до бесконечности. Тогда получим изображающее уравнение в виде

$$\frac{dU}{dt} = a^2(p\,u_o - p^2U), \qquad (10.20)$$

так как

$$\frac{\partial U(p,t)}{\partial t} = \int_0^\infty \sin px \frac{\partial u}{\partial t} dx,$$

а

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin pxdx = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \sin px \right) \Bigg|_0^\infty - p\left(u \cos px\right)\Big|_0^\infty - p^2 \int_0^\infty u \sin px\, dx = p\,u_o - p^2 U.$$

Здесь первый член равен нулю, потому что на бесконечности $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, а при нижнем переделе равен нулю синус. Второй член равен нулю при $x \to \infty$, а при нижнем пределе применено условие $u(0,t) = u_o$, а косинус равен единице.

Из (10.20) получается обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{dU}{dt} + a^2 p^2 U = a^2 p\,u_o \qquad (10.21)$$

и при начальном условии, которое получено из (10.18) в виде

$$U(p,t)\big|_{t=0} = 0. \qquad (10.22)$$

Решение ищется по методу Коши в виде суммы $U = \overline{U} + U^*$.

1) Определение $\overline{U}$ из однородного уравнения $\frac{dU}{dt} + a^2 p^2 U = 0$, которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными

$$\frac{dU}{U} = -a^2 p^2 dt, \qquad (10.23)$$

$$\int \frac{dU}{U} = -\int a^2 p^2 dt.$$

После интегрирования по t получается $\ln U = -a^2 p^2 t + \ln C$,
Откуда

$$\overline{U} = C \cdot e^{-a^2 p^2 t}. \qquad (10.24)$$

2) Определение U^* по методу вариации произвольной постоянной Лагранжа. Принимаем

$U^* = C(t) \cdot e^{-a^2 p^2 t}$, производная равна

$$\frac{dU^*}{dt} = C'(t) \cdot e^{-a^2 p^2 t} - C(t) \cdot a^2 p^2 e^{-a^2 p^2 t}. \qquad (10.25)$$

Подстановка в уравнение (10.21) даёт

$$C'(t) \cdot e^{-a^2 p^2 t} - C(t) \cdot a^2 p^2 e^{-a^2 p^2 t} + C(t) \cdot a^2 p^2 e^{-a^2 p^2 t} = a^2 p\,u_o \qquad (10.26)$$

и тогда

$$C_t'(t) \cdot = a^2 p\,u_o e^{a^2 p^2 t}, \qquad (10.27)$$

и после интегрирования по t получается

$$C(t) \cdot = a^2 p\,u_o \int e^{a^2 p^2 t} dt = u_o e^{a^2 p^2 t}. \qquad (10.28)$$

Откуда $\qquad U^* = u_o \qquad (10.29)$

Отсюда получено преобразование Фурье искомого решения. В виде

$$U(p,t) = C \cdot e^{-a^2 p^2 t} + u_o. \tag{10.30}$$

Для нахождения оригинала используем формулу обратного преобразования Фурье

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(p)\sin p\,x\,dp. \tag{10.31}$$

Отсюда

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(C \cdot e^{-a^2 p^2 t} + u_o\right)\sin p\,x\,dp. \tag{10.32}$$

ГЛАВА 5. ФУНКЦИЯ ГРИНА

§ 11. Вывод формулы Грина.

Джордж Грин

1793-1841

Определение 1. Функция Грина – функция, связанная с интегральным представлением решений краевых задач для дифференциальных уравнений.

Функция Грина краевой задачи для линейного дифференциального уравнения – это фундаментальное решение уравнения, удовлетворяющее однородным краевым условиям.

Замечание 1. Функция Грина позволяет найти решение неоднородного уравнения, удовлетворяющего однородным краевым условиям.

Формула Грина является прямым следствием формулы Гаусса – Остроградского

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iint_\Sigma \{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma, \tag{11.1}$$

где $dV = dx\,dy\,dz$ – элемент объёма, $\alpha = \angle(nx);\ \beta = \angle(ny);\ \gamma = \angle(nz)$ - углы внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности Σ с координатными осями, *P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)* – произвольные дифференцируемые функции (рис. 6).

Если функции *P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)* рассматривать как координаты некоторого вектора $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, то формулу Остроградского-Гаусса можно записать в виде

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV = \iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \quad \text{или} \quad \iiint_V \nabla\mathbf{F}\,dV = \iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma, \tag{11.2}$$

где $\mathrm{div}\mathbf{F} = \nabla\mathbf{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ и $F_n = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ - составляющая вектора **F** вдоль внешней нормали.

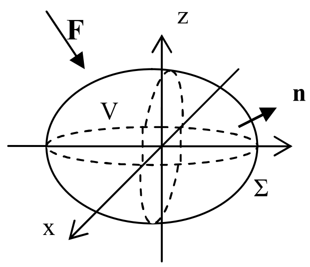


Рис. 6.

Пусть функции $u = u(x,y,z)$ и $\upsilon = \upsilon(x,y,z)$ - функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри

$V + \Sigma$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри V.

Полагая $P = u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x},\quad Q = u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y},\quad R = u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial z},$

и пользуясь формулой Остроградского – Гаусса (11.2), можно прийти к, так называемой, *первой формуле Грина.* Учитывая, что

$$\mathrm{div}\left[u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\mathbf{i}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\mathbf{j}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\mathbf{k}\right]=$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)+\ ,$$
$$+\left(u\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+u\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}+u\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2}\right),$$

получаем

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\mathbf{i}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\mathbf{j}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{n}=\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\mathbf{i}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\mathbf{j}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\cos\alpha\,\mathbf{i}+\cos\beta\,\mathbf{j}+\cos\gamma\,\mathbf{k}\right)=$$
$$=u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\cdot\cos\alpha+u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\cdot\cos\beta+u\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\cdot\cos\gamma=u\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial n}.$$

Первая формула Грина имеет вид

$$\iiint\limits_V u\,\Delta\upsilon\,dV=\iint\limits_\Sigma u\frac{\partial \upsilon}{\partial n}d\sigma-\iiint\limits_V\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)dV\,, \tag{11.3}$$

или

$$\iiint\limits_V u\,\Delta\upsilon\,dV=\iint\limits_\Sigma u\frac{\partial \upsilon}{\partial n}d\sigma-\iiint\limits_V\nabla u\cdot\nabla\upsilon\,dV\,,$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, $\frac{\partial}{\partial n}=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$ - производная по направлению внешней нормали (рис. 7).

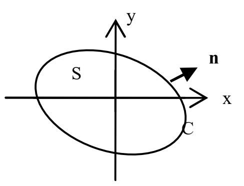


Рис. 7.

Если учесть отношение

$$\mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}\,\upsilon=\nabla u\cdot\nabla\upsilon=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \upsilon}{\partial z}, \tag{11.4}$$

то формулу Грина можно представить в виде

$$\iiint\limits_V u\Delta\upsilon\,dV=-\iiint\limits_V\nabla u\cdot\nabla\upsilon\,dV+\iint\limits_\Sigma u\frac{\partial \upsilon}{\partial n}d\sigma\,. \tag{11.5}$$

Меняя местами u и υ, получим *первую формулу Грина* в виде

$$\iiint\limits_V \upsilon\Delta u\,dV=-\iiint\limits_V\nabla\upsilon\cdot\nabla u\,dV+\iint\limits_\Sigma \upsilon\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma\,. \tag{11.6}$$

Вычитая из равенства (11.3) равенство (11.4), получим *вторую формулу Грина*

$$\iiint\limits_V(u\Delta\upsilon-\upsilon\Delta u)dV=\iint\limits_\Sigma\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial n}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma\,. \tag{11.7}$$

Замечание 2. Область интегрирования может быть ограничена несколькими поверхностями. Формула Грина может быть применима в этом случае тоже. Поверхностный интеграл в этом случае берётся по всем поверхностям.

Для двумерной задачи, когда $u=u(x,y)$ и $\upsilon=\upsilon(x,y)$ записывается *вторая формула Грина*

$$\iint\limits_S(u\,\Delta_2\upsilon-\upsilon\,\Delta_2 u)\,dS=\oint\limits_C\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial n}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl\,, \tag{11.8}$$

где $dS=dx\,dy$, dl – элемент длины дуги вдоль С,

$\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали **n** к контуру С.

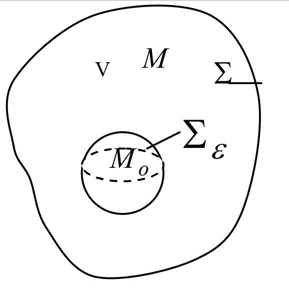


Рис. 8.

Вывод основной формулы Грина

Рассмотрим функцию $U_o(M) = \dfrac{1}{R}$, где

$$R = \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2}$$

- расстояние между точками $M(x,y,z)$ и $M_o(x_o,y_o,z_o)$. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа при $M \neq M_o$ (рис. 8).

Пусть $u(M)$ - гармоническая функция, непрерывная в области $V+\Sigma$ и имеющая вторые производные в V. Рассмотрим функцию $\upsilon = 1/R_{MM_o}$, где M_o – некоторая внутренняя точка области V. Поскольку эта функция имеет внутри V разрыв непрерывности в точке M_o, то непосредственно применить вторую формулу Грина в области V к функциям u и υ нельзя. Однако функция $\upsilon = 1/R_{MM_o}$ ограничена в области $V - V_\varepsilon$ с границей $\Sigma + \Sigma_\varepsilon$, где V_ε - шар радиуса ε с центром в точке M_o и поверхностью Σ_ε.

Применяя вторую формулу Грина (11.8) к функции u и принимая $\upsilon = 1/R_{MM_o}$ в области $V - V_\varepsilon$, получают

$$\iiint\limits_{V-V_\varepsilon} (u\Delta\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\Delta u)dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \left(u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R}) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R})d\sigma - \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma . \qquad (11.9)$$

В правой части этого равенства только последние два интеграла от ε. Вычисляя производную по внешней нормали к области $V - V_\varepsilon$ на Σ_ε, находят, что

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R})\right|_{\Sigma_\varepsilon} = \left.-\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{R})\right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

откуда

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R})d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} u\,d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2 u^* = 4\pi u^*, \qquad (11.10)$$

где u^* - среднее значение функции $u(M)$ на поверхности Σ_ε.

Преобразуем третий интеграл

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \frac{1}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*, \qquad (11.11)$$

где $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)^*$ - среднее значение нормальной производной $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ на сфере Σ_ε. Подставляя выражения (11.10) и (11.11) в формулу (11.9) и учитывая, что $\Delta\left(\dfrac{1}{R}\right) = 0$ в $V - V_\varepsilon$, получают

$$\iiint\limits_{V-V_\varepsilon} (-\frac{1}{R}\Delta u)dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \left(u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R}) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + 4\pi u^* - 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* . \qquad (11.12)$$

После того, как радиус ε устремляется к нулю, получают

1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^* = u(M_o)$, так как $u(M)$ - непрерывная функция, а u^* - её среднее значение по сфере радиуса ε с центром в точке M_o;

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 4\pi\varepsilon \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 0$, так как из непрерывности первых производных функции $u(M)$ внутри V сразу же вытекает ограниченность нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

в окрестности точки M_o;

3) по определению несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{V-V_\varepsilon} (-\frac{1}{R}\Delta u) dV = \iiint\limits_{V_\varepsilon} (-\frac{1}{R}\Delta u) dV$$

в результате указанного предельного перехода $\varepsilon \to 0$ приходят к *основной формуле* Грина

$$4\pi u(M_o) = -\oiint\limits_{\Sigma} \left[u(P)\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R_{M_oP}}) - \frac{1}{R_{M_oP}}\frac{\partial u}{\partial n}\right] d\sigma_P - \iiint\limits_{V} \frac{\Delta u(P)}{R_{M_oP}} dV, \quad (11.13)$$

где $P = P(\xi,\eta,\varsigma)$ - точка с координатами ξ,η,ς, лежащая на поверхности Σ.

Замечание 3. Если точка M_o находится вне области V, то $\upsilon = \dfrac{1}{R_{MP}}$ непрерывна и гармонична во всех точках области V. Поэтому слева в формуле (11.13) получается нуль.

Рассмотрим случай, когда M_o принадлежит поверхности Σ.

Предположим, что Σ имеет в M_o касательную плоскость с непрерывными угловыми коэффициентами. Сфера Σ_ε радиуса ε с центром в точке M_o пересекает поверхность Σ и делит её на две части Σ_1 и Σ_2. Часть Σ_1 лежит внутри шара V_ε. Формулу Грина (11.8) применим к u и $\upsilon = \dfrac{1}{R}$ в области $V - V_1$, где V_1 - область, ограниченная Σ_1 и частью сферы $\Sigma_\varepsilon^{'}$, лежащей внутри V. Общая схема рассуждений, приводящих к (11.11) , остаётся неизменной. При этом следует лишь учесть, что интеграл по $\Sigma + \Sigma_\varepsilon^{'}$ стремится к $2\pi u(M_o)$, и внести соответствующие изменения в (11.10), (11.11) и (11.9). В результате приходят к формуле , получающейся из (11.13) при замене 4π на 2π.

Объединяя все случаи, запишем *основную формулу Грина* в виде

$$\Omega \cdot u(M_o) = \oiint\limits_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_oP}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_oP}}\right)\right] d\sigma_P - \iiint\limits_{V} \frac{\Delta u(P)}{R_{M_oP}} dV_P, \quad (11.14)$$

где Ω принимает значения

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{если точка } \mathrm{M_o} \text{ лежит внутри } V, \\ 2\pi, & \text{если точка } \mathrm{M_o} \text{ лежит на границе } \Sigma, \\ 0, & \text{если точка } \mathrm{M_o} \text{ лежит вне } V. \end{cases}$$

Замечание 4. Для гармонической функции $\Delta u = 0$ и формула (11.13) принимает вид

$$u(M_o) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_oP}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_oP}}\right)\right] d\sigma_P, \quad (11.15)$$

где $\mathrm{M_o}$ – внутри Р.

Таким образом, значение гармонической функции в любой внутренней точке области выражается через значение этой функции и её нормальной производной на поверхности области. При этом предполагается непрерывность функции u и её первой производной вплоть до границы.

Замечание 5. Каждый из интегралов

$$\oiint\limits_{\Sigma} \frac{\mu(P)}{R_{MP}} d\sigma_P \quad \text{и} \quad \oiint\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\nu(P)\, d\sigma_P\,, \tag{11.16}$$

где μ и ν - непрерывные функции, является гармонической функцией вне поверхности Σ. В самом деле, так как подынтегральные функции и все их производные непрерывны вне поверхности Σ, то производные функций (11.15) любого порядка можно вычислить при помощи дифференцирования под знаком интеграла. Так как, функции

$$\frac{1}{R_{MP}} \text{ и } \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha_P + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\beta_P + \frac{\partial}{\partial \varsigma}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\gamma_P$$

удовлетворяют уравнению Лапласа по переменным M(x,y,z), то в силу обобщённого принципа суперпозиции, функции (11.15) тоже удовлетворяют уравнению Лапласа по переменным x,y,z.

Следствие 1: Всякая гармоническая функция внутри области гармоничности дифференцируема бесконечное число раз;

Следствие 2: Всякая гармоническая функция аналитична (раскладывается в степенной ряд) во всякой точке M_o области V. В этом можно убедиться с помощью рассуждений, основанных на том же интегральном представлении (11.14).

ГЛАВА 6. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

§ 12. Гармонические функции.

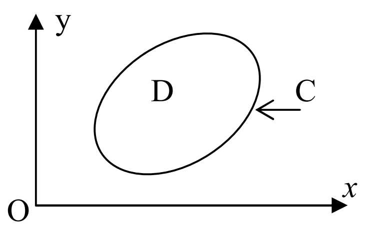


Рис. 9

Рассмотрим свойства дважды дифференцируемых функций. Пусть делается вывод функции Грина для двумерного пространства 2 D (Dimension) . Пусть D конечная область плоскости.(x,y), а C – её граница (непрерывная, гладкая). Пусть $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ - две функции, непрерывные и имеющие в D непрерывные первые и вторые производные.(рис. 9). Рассмотрим симметричное выражение

$$\upsilon\Delta u - u\Delta\upsilon$$

и преобразуем его к сумме частных производных первого порядка путём прибавления и вычитания функции $u_x\upsilon_x + u_y\upsilon_y$. Тогда

$$\begin{aligned}&\upsilon u_{xx} + \upsilon u_{yy} + u\upsilon_{xx} + \upsilon u_{yy} + u_x\upsilon_x + u_y\upsilon_y - u_x\upsilon_x - u_y\upsilon_y = \\ &= \left(\upsilon u_x - u\upsilon_x\right)_x + \left(\upsilon u_y - u\upsilon_y\right)_y = P_x + Q_y,\end{aligned}$$

где $P = \left(\upsilon u_x - u\upsilon_x\right)$, $Q = (\upsilon u_y - u\upsilon_y)$.

Применяя формулу Остроградского – Гаусса к плоской замкнутой области, получим

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint\limits_C \big(P\cos(n,x) - Q\cos(n,y)\big) dS\,.$$

Учитывая, что производная по направлению имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)\,,$$

запишем следующие выражения:

$$u_x \cos(n,x) + u_y \cos(n,y) = \frac{\partial u}{\partial n},$$

$$\upsilon_x \cos(n,x) + \upsilon_y \cos(n,y) = \frac{\partial \upsilon}{\partial n}.$$

Тогда формула Остроградского – Гаусса приобретает вид

$$\iint_D (\upsilon \Delta u - u \Delta \upsilon) dx\, dy = \oint_C \left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial n} \right) dS. \tag{12.1}$$

Это и есть *формула Грина для плоской области* 2D. Для *пространственной области* V с границей Σ эта формула записывается так:

$$\iiint_V (\upsilon \Delta u - u \Delta \upsilon) dxdydz = \oiint_{\Sigma} \left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial n} \right) dxdy \tag{12.2}$$

или

$$\iiint_V (\upsilon \Delta u - u \Delta \upsilon) dV = \iint_{\Sigma} \left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial n} \right) dS. \tag{12.3}$$

Определение 1. Функция $u(x)$ называется *гармонической* в точке *x,* если в этой точке она имеет непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Определение 2. Функция $u(x)$ является *гармонической* в замкнутой области V, если она

1) непрерывна в этой области,
2) гармонична во всех внутренних точках области,
3) стремится к нулю при стремлении x к ∞ вдоль любого луча, принадлежащего области.

Определение 3. Решения уравнения Лапласа, имеющие в области G непрерывные производные вплоть до 2 – го порядка, называются *регулярными* (в комплексной области).

Замечание 1. Регулярные решения уравнения Лапласа являются *гармоническими функциями* (в комплексной области).

Примеры.

1) В 3D функция $u(r) = \frac{1}{r}$ является гармонической всюду, за исключением точки $r = 0$.

2) В 2D функция $u(r) = \ln\frac{1}{r}$ тоже является гармонической всюду, кроме $r = 0$.

3) В пространстве nD функция $u(r) = \frac{1}{r^{n-2}}$ является гармонической всюду, кроме $r = 0$.

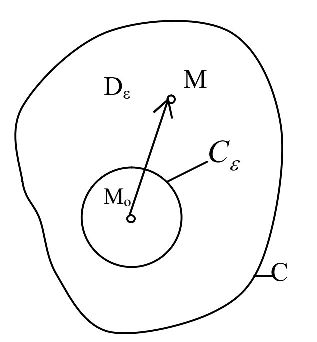


Рис. 10.

Теорема 1. *(Интегральная теорема Гаусса)*

Если $u(x, y)$ *- гармоническая в D и ограниченная функция, то*

$$\oint_{C_D} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0, \tag{12.4}$$

т.е. криволинейный интеграл от нормальной производной гармонической функции по замкнутой кривой C равен нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\upsilon = 1$, а u - гармоническая в D функция, тогда по формуле Грина (12.3) с учётом того, что $\Delta u = 0$, как функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа,

$\Delta \upsilon = 0, \quad \dfrac{\partial \upsilon}{\partial n} = 0,$ так как все производные от единицы равны нулю, получается

$$\iint\limits_D (\upsilon \cdot 0 - u \cdot 0)\,dx\,dy = \oint\limits_C \left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial n} - u \cdot 0 \right) dS$$

и остаётся только $\oint\limits_C \dfrac{\partial u}{\partial n} dS = 0$, ч.т.д.

Аналогично для трёхмерного пространства 3D справедлива теорема 1 в вид

$$\oiint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0. \tag{12.5}$$

Замечание 1. Из формулы (12.5) следует, что вторая краевая задача $\left(\Delta u = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial n} = f\big|_{\Sigma} \right)$ может иметь решение только в случае, если $\oiint\limits_{\Sigma} f\, d\sigma = 0$.

Замечание 2. Свойства (12.4) и (12.5) гармонических функций выражают отсутствие источников внутри области D или V.

Теорема 2. *(о среднем арифметическом) Значение гармонической в любой точке внутри некоторого круга (шара) и непрерывной вплоть до границы этого круга (этого шара) функции $u(x, y)$ равно среднему арифметическому её значений на окружности (сфере)*

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{C_R} u\, dS \tag{12.6}$$

Для доказательства рассмотрим *интегральное представление гармонической функции.*

Пусть $u(x, y)$ - любая функция, непрерывная вместе со своими производными 1 –го порядка в $D + C$ и имеющая непрерывные производные в D. Пусть M_o - произвольная точка в области D (рис. 10). Вырежем в области D круг малого радиуса ε с центром в точке M_o и обозначим оставшуюся часть области D через D_ε, а через C_ε - окружность с центром в точке M_o. Запишем формулу Грина для области D, где примем $\upsilon(r) = \ln \dfrac{1}{r_{MM_o}}$. В области D_ε функция υ обладает всеми необходимыми свойствами, такими, что в D_ε $\Delta \ln \dfrac{1}{r_{MM_o}} \equiv 0 \quad r_{MM_o} = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$, тогда получим

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} (\upsilon \Delta u - u \Delta \upsilon)\,dx\,dy = \oint\limits_C \left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial n} \right) dS + \oint\limits_{C_\varepsilon} \left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial n} \right) dS.$$

Учитывая, что $\Delta \upsilon = 0$, получим

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} \ln \frac{1}{r} \Delta u\, dx\, dy = \oint\limits_C \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS + \oint\limits_{C_\varepsilon} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS. \tag{12.7}$$

где $r = r_{MM_o}$. Когда $\varepsilon \to 0$, стоящие справа интегралы распространяются на всю область. Первый интеграл справа не зависит от ε.

Докажем, что интеграл

$$\oint_{C_\varepsilon} \left(\ln\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS = -2\pi u(x_o, y_o).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На окружности C_ε направление нормали противоположно радиусу $\overline{MM_o}$, а $r \equiv \varepsilon$ (рис. 11), поэтому

$$\left.\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n}\right|_{C_\varepsilon} = -\left.\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial r}\right|_{C_\varepsilon} = \left.\frac{1}{r}\right|_{C_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

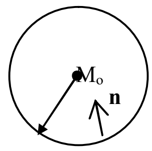


Рис. 11.

Следовательно, интеграл I_1 тождественно равен

$$I_1 \equiv \oint_{C_\varepsilon} u\,\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS = \frac{1}{\varepsilon}\oint_{C_\varepsilon} u\;dS.$$

Тогда, применяя к правой части теорему о среднем, получим

$$I_1 = \frac{1}{\varepsilon}\oint_{C_\varepsilon} u\;dS = \frac{1}{\varepsilon}2\pi\varepsilon\,u(P) = 2\pi\,u(P).$$

Когда $\varepsilon \to 0$, точка $P \to M_o$, тогда

$$I_1 \to 2\pi\,u(M_o) = 2\pi\,u(x_o, y_o).$$

Учтём, что первые производные $u(x, y)$ существуют и непрерывны, а, следовательно, они ограничены $\left]\frac{\partial u}{\partial n}\right[\le A$ в $D + C$, где A - некоторая постоянная. Тогда

$$\left|\oint_{C_\varepsilon} \ln\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\right| \le A\ln\frac{1}{\varepsilon}\oint_{C_\varepsilon} dS = 2\pi\,A\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon} = 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Докажем последнее равенство

$$\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = 0 \right).$$

Таким образом, получаем при $\varepsilon \to 0$

$$\iint_{D_\varepsilon} \ln\frac{1}{r}\,\Delta u\,dx\,dy = \oint_{C} \left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS - 2\pi\,u(x_O, y_O).$$

Тогда

$$u(M_o) = \frac{1}{2\pi}\oint_{C} \left(\ln\frac{1}{r_{PM_o}}\,\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u\,\frac{\partial \ln\frac{1}{r_{PM_o}}}{\partial n_P} \right) dS_P - \frac{1}{2\pi}\iint_{D} \ln\frac{1}{r_{PM_o}}\,\Delta u\,dxdy. \quad (12.8)$$

Если u - гармоническая функция, тогда из (12.8) получается

$$u(M_o)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(\ln\frac{1}{r_{PM_o}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u\frac{\partial\ln\dfrac{1}{r_{PM_o}}}{\partial n_P}\right)dS_P. \qquad (12.9)$$

Таким образом, значения гармонической функции в любой точке конечной области выражаются через значения этой функции и её нормальной производной на границе области.

Для пространственной области совершенно аналогично получают

$$u(M_O)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{r_{PM_O}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u\frac{\partial\dfrac{1}{r_{PM_O}}}{\partial n_P}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{1}{r_{PM_O}}\Delta u\,dV\,.$$

Если $u(x,y,z)$ - гармоническая функция, то второй интеграл обращается в ноль и тогда

$$u(M_O)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{r_{PM_O}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u\frac{\partial\dfrac{1}{r_{PM_O}}}{\partial n_P}\right)dS\,. \qquad (12.10)$$

Теперь применим формулу (12.9) к кругу для точки M_o (P – переменная точка на контуре C). На окружности C_R направление внешней нормали совпадает с направлением радиуса, а $r_{PM_o}\equiv R$, поэтому

$$\left.\frac{\partial\ln\frac{1}{r}}{\partial n}\right|_{C_R}=\left.\frac{\partial\ln\frac{1}{r}}{\partial r}\right|_{C_R}=-\left.\frac{1}{r}\right|_{C_R}=-\frac{1}{R}\quad (\text{так как}\quad r=r_{PM_o})$$

и тогда

$$u(x_o,y_o)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R}\oint_{C_R}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS_P+\frac{1}{2\pi R}\ln\frac{1}{R}\oint_{C_R}u\,dS\,.$$

Но по теореме 1 производная $\dfrac{\partial u}{\partial n}=0$, а это означает, что

$$u(x_O,y_O)=\frac{1}{2\pi R}\oint_{C_R}u\,dS\,,\ \text{ч.т.д.}$$

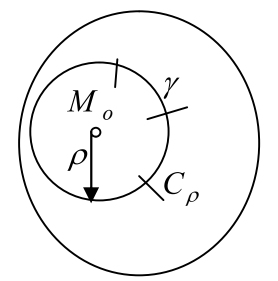


Рис.12.

Теорема 3. *(принцип максимального значения)*

Функция $u(x,y)$, гармоническая внутри ограниченной области D и непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$, достигает своего наибольшего (наименьшего) значения только на границе области, за исключением случая, когда она $u(x,y)=const$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (от противного). Пусть функция $u(x,y)$ принимает наибольшее значение во внутренней точке M_o области D, то есть для всех точек $M\in D$ (рис. 12) можно записать

$$u(M)<u(M_o)=u_o\,. \qquad (12.11)$$

Покажем, что в этом случае функция $u(M) \equiv u_o$. Действительно, проведём окружность C_ρ с центром в точке M_o и с радиусом ρ, целиком принадлежащую области D. Утверждаем, что $u\big|_{C_\rho} \equiv u_o$. Пусть это не так, то есть найдётся по крайней мере одна точка $P_o \in C_\rho$ такая, что

$$u(P_o) < u_o. \tag{12.12}$$

В силу непрерывности функции это неравенство будет иметь место на некоторой дуге γ окружности C_ρ, то есть

$$u\big|_\gamma < u_o.$$

По теореме 2 имеем

$$u_o = u(M_o) = \frac{1}{2\pi\,\rho}\oint\limits_{C_R} u\,dS, \tag{12.13}$$

а с другой стороны в силу (12.12) и (12.13) имеет место неравенство

$$\frac{1}{2\pi\,\rho}\oint\limits_{C_R} u\,dS < \frac{1}{2\pi\,\rho}\oint\limits_{C_R} u_o\,dS = u_o\,\frac{2\pi\,\rho}{2\pi\,\rho} = u_o. \tag{12.14}$$

Первое неравенство справедливо, так как на γ $u(x,y)$ строго меньше u_o.

Соотношения (12.13) и (12.14) противоречивы, следовательно, предположение (12.9) неверно.

Из произвольности радиуса ρ следует, что функция $u(M)$ тождественно постоянна внутри и на границе всякого круга с центром в точке M_o, целиком принадлежащего области D. Смещая центр круга из M_o в M_1 и т.д., можно показать, что $u(M)$ постоянна во всей области D. Таким образом, если $u(M)$ не тождественно постоянна, то её наибольшее (наименьшее) значения достигается на границе области.

Следствие 1. Если функция $u(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$, гармонична в D и равна нулю на границе С, то она тождественно равна нулю в $\overline{D}$.

(Доказывается по теореме 2)

Следствие 2. Если u и υ непрерывны в $\overline{D}$, гармоничны в D и если $u \le \upsilon$ на С, то $u \le \upsilon$ всюду в $\overline{D}$.

Следствие 3. Если u и υ ($\upsilon \le 0$) непрерывны в $\overline{D}$, гармонические в D и если $|u| \le \upsilon$ на границе С, то $|u| \le \upsilon$ всюду в $\overline{D}$.

Замечание 2. Совершенно аналогичные свойства имеют гармонические функции в случае трёх переменных. Следует только помнить, что

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0 \text{ и } u(x_o, y_o, z_o) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{S_R} u\,d\sigma, \tag{12.15}$$

где Σ_R - поверхность шара.

1. Гармоническая функция двух независимых переменных

Пусть S - некоторая область на плоскости (x, y) , ограниченная контуром С, а ***n*** – направление нормали к этому контуру, внешнее по отношению к области S.

Полагая во второй формуле Грина $\upsilon = \ln(1/R_{M_oP})$, где $R_{M_oP} = \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}$ - расстояние P(x,y) от фиксированной точки $M_o(x_o, y_o)$, и приводя рассуждения, подобные тем, которые были проведены для трёхмерного случая, получим основную формулу Грина на плоскости

$$\Omega \cdot u(M_o) = \oint_C \left[\ln\frac{1}{R_{M_oP}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{M_oP}} \right) \right] d\,l_P - \oint_C \Delta u(P) \ln\frac{1}{R_{M_oP}} d\,S_P,$$

где

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi, & \text{если точка } \mathrm{M_o} \text{ лежит внутри } S, \\ \pi, & \text{если точка } \mathrm{M_o} \text{ лежит на границе } C, \\ 0, & \text{если точка } \mathrm{M_o} \text{ лежит вне } S. \end{cases}$$

Если $u(M)$ - гармоническая внутри S функция и $\mathrm{M_o}$ лежит внутри S, то

$$u(M_o) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left[\ln\frac{1}{R_{M_oP}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{M_oP}} \right) \right] d\,l_P. \tag{12.16}$$

§ 13. Основные свойства гармонических функций

Теорема 1. *Если υ - функция, гармоническая в области V, ограниченной поверхностью Σ, то*

$$\iint_S \frac{\partial \upsilon}{\partial n} d\,\sigma = 0, \tag{13.1}$$

где S - любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области V.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Подставляя в первую формулу Грина (11.3) какую-либо гармоническую функцию $\upsilon\,(\Delta\,\upsilon = 0)$ и функцию $u = 1$, сразу же получим формулу (13.1). Из формулы (13.1) следует, что вторая краевая задача $(\Delta u = 0, \dfrac{\partial u}{\partial n} = f\big|_\Sigma)$ может иметь решение только при условии

$$\iint_\Sigma f\,d\,\sigma = 0.$$

Замечание 1. Это свойство гармонических функций можно интерпретировать как условие отсутствия источников внутри области V.

Теорема 2. *Если функция $u(M)$ гармонична в некоторой области V, а M_o - какая-нибудь точка, лежащая внутри области V, то имеет место формула*

$$u(M_o) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u\,d\,\sigma, \tag{13.2}$$

где Σ_a - сфера радиуса a с центром в точке M_o, целиком лежащая в области V (теорема среднего значения).

Д о к а з а т е л ь с т в о: Теорема утверждает, что значение гармонической функции в некоторой точке M_o равно среднему значению этой функции на любой сфере Σ_a с центром в точке M_o, если сфера Σ_a не выходит из области гармоничности функции $u(M)$.

Применяя формулу (13.2) к шару K_a с центром в точке M_o и поверхностью Σ_a:

$$4\pi u(M_o) = -\iint_{\Sigma_a} \left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} \right] d\,\sigma.$$

Принимая во внимание, что $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{a}$ на Σ_a и $\iint\limits_{\Sigma_a}\dfrac{\partial u}{\partial n}d\sigma=0,$

получают
$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\Bigg|_{\Sigma_a}=\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right)\Bigg|_{R=a}=-\frac{1}{a^2},$$

(направление внешней нормали к Σ_a совпадает с направлением радиуса), сразу же получают (13.2).

Замечание 2. При доказательстве этой теоремы пользуются равенством (13.1), предполагающим существование производных на поверхности сферы. Если функция $u(M)$, непрерывная в замкнутой области $V+\Sigma$, удовлетворяет уравнению $\Delta u=0$ только для внутренних точек V, то предшествующее заключение для сферы Σ_a, касающейся Σ, было бы необоснованным. Однако теорема верна для любого $a<a_o$, и, переходя к пределу при $a\to a_o$, получают:
$$u(M_o)=\frac{1}{4\pi a_o^2}\iint\limits_{\Sigma_{a_o}}u(M)\,d\sigma.$$

Записывая (13.2) в виде
$$4\pi\rho^2u(M_o)=\iint\limits_{\Sigma_\rho}u(P)\,d\sigma_P.$$

и интегрируя по ρ от 0 до a левую и правую части этого равенства, получают:
$$u(M_o)=\frac{1}{V_a}\iiint\limits_{K_a}u\,d\tau_P,\quad .V_a=\frac{4}{3}\pi a^3,$$

т.е. $u(M_o)$ есть среднее по объёму шара K_a с границей Σ_a.

Для случая двух независимых переменных имеет место аналогичная теорема о среднем значении:
$$u(M_o)=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{C_a}u\,ds, \tag{13.3}$$

где C_a – окружность радиуса a с центром в точке M_o, лежащая в области гармоничности u.

Теорема 3. *Если функция $u(M)$, определённая и непрерывная в замкнутой области $V+\Sigma$, удовлетворяет уравнению $\Delta u=0$ внутри V, то максимальные и минимальные значения функции $u(M)$ достигаются на поверхности Σ (принцип максимального значения)*

Д о к а з а т е л ь с т в о: Допустим, что функция $u(M)$ достигает максимального значения в некоторой внутренней точке M_o области V, так что $u_o=u(M_o)\ge u(M),$ где M – любая точка области V. Окружим точку M_o сферой Σ_ρ радиуса ρ, целиком лежащей в области V. Поскольку по предположению $u(M_o)$ есть наибольшее значение функции $u(M)$ в $V+\Sigma$, то $u|_\Sigma\le u(M_o)$. Пользуясь формулой среднего значения (13.2) и заменяя под интегралом всюду $u(M)$ значением $u(M_o)$, получим:
$$u(M_o)=\frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{\Sigma_\rho}u(M)\,d\sigma_M\le\frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{\Sigma_\rho}u(M_o)\,d\sigma=u(M_o). \tag{13.4}$$

Если предположить, что хотя бы в одной точке M сферы Σ_ρ $u(M)<u(M_o)$, то, очевидно, что вместо знака $\le$ будем иметь знак $<$, что приводит к противоречию. Таким образом, на всей поверхности Σ_ρ $u(M)\equiv u(M_o)$.

Если ρ_o^m - минимальное расстояние от M_o до поверхности Σ, то $u(M) \equiv u(M_o)$. для всех точек , лежащих внутри $\Sigma_{\rho_o^m}$. Отсюда следует, что в точках *M**, принадлежащих общей части $\Sigma_{\rho_o^m}$ и Σ, по условию непрерывности $u(M^*) \equiv u(M_o)$. Это и доказывает теорему, поскольку мы убедились, что максимальное значение $u(M_o)$ достигается в точках границы *M**.

Нетрудно убедиться, что если область V связная и максимальное значение достигается хотя бы в одной внутренней точке M_o, то $u(M) \equiv u(M_o)$. во всей области.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $M^{(o)}$ - какая–либо другая точка области V. Соединим точку $M^{(o)}$ с точкой M_o ломаной линией L (рис. 13), длину которой обозначим l. Пусть M_l есть последняя точка выхода линии L на $\Sigma_{\rho_o^m}$. В этой точке $u(M_l) \equiv u(M_o)$.. Опишем из этой точки сферу $\Sigma_{\rho_o^m}$ радиуса ρ_l^m, касающуюся Σ, и пусть M_2 - последняя точка выхода L из $\Sigma_{\rho_o^m}$; в этой точке $u(M_2) = u(M_o)$. Продолжая этот процесс далее, получим, что не более чем через $p = l/\rho^{(m)}$ шагов, где $\rho^{(m)}$- минимальное расстояние L до Σ, одна из этих сфер захватит точку $M^{(o)}$, откуда следует, что $u(M^{(o)}) = u(M_o)$.. В силу произвольности $M^{(o)}$ и непрерывности $u(M)$ в замкнутой области $V + \Sigma$, заключаем, что $u(M) \equiv u(M_o)$.всюду, включая точки границы. Таким образом, из всех гармонических функций только постоянная может достигать своего максимального значения во всех внутренних точках области.

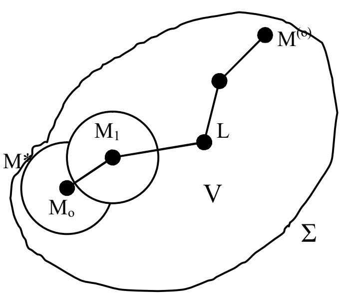


Рис. 13.

Аналогичную теорему можно доказать и относительно *минимального значения*.

Следствие 1. *Если функции u и U непрерывны в области $V + \Sigma$, гармоничны в V и если $u \le U$ на Σ, то и $u \le U$ всюду внутри V.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, функция U - u непрерывна в $V + \Sigma$, гармонична в V и $U - u \ge 0$ на Σ. В силу принципа максимального значения $U - u \ge 0$ всюду внутри V, откуда и следует наше утверждение.

Следствие 2. Если функции u и U непрерывны в области $V + \Sigma$, гармоничны в V и если $|u| \le U$ на Σ, то и $|u| \le U$ всюду внутри V. Из условий теоремы следует, что три гармонические функции $-U, u$ и U удовлетворяют условиям $-U \le u \le U$ на Σ.

Применяя дважды следствие 1, получим, что

$$-U \le u \le U \text{ всюду внутри } V$$

или

$$|u| \le U \quad \text{внутри } V.$$

Следствие 3. Для гармоничны в V и непрерывной в $V + \Sigma$ функции $u(M)$, выполняется неравенство $|u| \le \max|u|_\Sigma$ всюду в $V + \Sigma$. Для доказательства положим $U = \max|u|_\Sigma$ и воспользуемся следствием 2.

Замечание 3. Приведенное для трёх измерений доказательство пригодно для любого числа измерений.