§ 14. Свойства объёмных потенциалов

Потенциалы и силы притяжения представляются с помощью интегралов, у которых подынтегральные функции обращаются в бесконечность, если мы рассматриваем их значения в тех точках, где содержаться притягивающие массы.

Как известно, если подынтегральная функция обращается в некоторой точке области интегрирования в бесконечность, то интеграл нельзя определить как предел последовательности интегральных сумм. Действительно, в этом случае последовательность интегральных сумм не имеет предела, так как слагаемые, относящиеся к элементарному объёму, содержащему особую точку, могут как угодно сильно менять величину суммы в зависимости от выбора промежуточной точки. Интегралы от подобных функций определяются как несобственные интегралы.

1. Объёмный потенциал в физическом пространстве

Случай 1. Точечная масса.

Пусть в некоторой точке $M_o(\xi,\eta,\zeta)$ помещена масса m_o. По закону всемирного тяготения на массу m_o, помещённую в точку $M(x,y,z)$, действует сила притяжения (закон Ньютона)

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{m\,m_o}{R^2}\boldsymbol{r}, \tag{14.1}$$

где $\boldsymbol{r} = \dfrac{\boldsymbol{R}}{R}$ - единичный вектор в направлении $\overrightarrow{M_oM}$, $(\boldsymbol{R} = \overrightarrow{M_oM})$, и γ - гравитационная постоянная. Выберем систему единиц так, чтобы $\gamma = 1$, и полагая $m = 1$, получим

$$\boldsymbol{F} = -\frac{m_o}{R^2}\boldsymbol{r}.$$

Проекции этой силы на координатные оси равны

$$\left.\begin{aligned} X &= F\cos\alpha = -\frac{m_o}{R^3}(x-\xi),\\ Y &= F\cos\beta = -\frac{m_o}{R^3}(y-\eta),\\ Z &= F\cos\gamma = -\frac{m_o}{R^3}(z-\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

где α,β,γ - углы, образованные вектором $\boldsymbol{F}$ с координатными осями. Введём функцию u, называемую потенциалом силового поля и определяемую равенством

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} u,$$

а координаты силы $\boldsymbol{F}$ выражаются так:

$$X = \frac{\partial u}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial u}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

В нашем случае

$$u = \frac{m_o}{R}.$$

Потенциал поля n материальных точек вследствие суперпозиции силовых полей выражается формулой

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{R_i}.$$

Случай 2. Непрерывное распределение массы

Пусть дано тело T с плотностью $\rho(\xi,\eta,\zeta)$. Определим потенциал этого тела в точке $M(x,y,z)$. Для этого разобьем тело T на достаточно мелкие части $\Delta\tau$. Сделаем естественное предположение, что действие элемента $\Delta\tau$ *эквивалентно действию его массы*, сосредоточенной в некоторой «средней» точке объёма $\Delta\tau$ [1]. Тогда для составляющей силы, действующей на точку *M*, получим следующее выражение

$$\Delta X = F\cos\alpha = -\frac{\rho\Delta\tau}{R^3}(x-\xi),$$

где

$$R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \text{ и } \cos\alpha = \frac{x-\xi}{R}.$$

Интегрирование по всему объёму Т даёт составляющую полной силы притяжения точки М телом Т

$$X = -\iiint\limits_T \rho\frac{(x-\xi)}{R^3}d\tau. \tag{14.3}$$

Потенциал в точке М определяется формулой

$$u(M) = -\iiint\limits_T \frac{\rho}{R}d\tau. \tag{14.4}$$

Замечание 1. Если точка М лежит вне тела, то в этом можно убедиться, непосредственно дифференцируя под знаком интеграла[2]. Аналогично вычисляются и производные высших порядков. Очевидно, что потенциал $u(M)$ вне тела Т удовлетворяет уравнению Лапласа.

Замечание 2. Если точка М лежит внутри области Т, нельзя утверждать, что $X = \partial u/\partial x$ без дополнительного исследования.

2. Первые производные объёмного потенциала

Функции, стоящие под знаком интегралов

$$\begin{aligned} X(M) &= -\iiint\limits_T \rho(P)\frac{(x-\xi)}{R_{MP}^3}d\tau_P, \\ Y(M) &= -\iiint\limits_T \rho(P)\frac{(y-\eta)}{R_{MP}^3}d\tau_P, \\ Z(M) &= -\iiint\limits_T \rho(P)\frac{(z-\zeta)}{R_{MP}^3}d\tau_P. \end{aligned} \tag{14.5}$$

являются производными по соответствующим переменным от функции, стоящей под знаком интеграла

---

[1] Более точно при этом предполагается, что действие некоторого тела Т массы m на точку, лежащую вне выпуклого объёма $\overline{T}$, содержащего это тело, можно заменить действием некоторого эффективного центра той же массы m, лежащего внутри $\overline{T}$.

[2] Для возможности дифференцирования определённого интеграла вида $f(M) = \int\limits_T F(M,P)\varphi(P)\,d\tau_P$ по параметру под знаком интеграла достаточно непрерывности производной от функции $F(P,M)$ по параметру и абсолютной интегрируемости функции $\varphi(P)$. Обычно эта теорема формулируется при $\varphi(P) \equiv 1$.

$$V(M)=\iiint_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}}\,d\tau_P\,. \tag{14.6}$$

Замечание 3. Если для функции V законно дифференцирование под знаком интеграла, то

$$X=\frac{\partial V}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial V}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{14.7}$$

то есть V является *потенциалом поля*, компоненты которого равны X, Y, Z.

Если точка *M* лежит *вне области T*, то функция

$$-\frac{(x-\xi)}{R_{MP}^3}=\frac{(x-\xi)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{3/2}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R_{MP}}$$

непрерывна по всем аргументам $M(x,y,z)$ и $P(\xi,\eta,\zeta)$. Следовательно, в этом случае дифференцирование под знаком интеграла V законно.

Замечание 4. Производные более высокого порядка можно также вычислить при помощи дифференцирования под знаком интеграла всюду вне тела *T*. Отсюда следует, что потенциал вне притягивающих масс удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V=0 \text{ вне тела } T.$$

Докажем, что вычисление производных потенциала V можно производить путём дифференцирования под знаком интеграла и в том случае, *когда точка M лежит внутри тела T*.

При доказательстве мы будем пользоваться только ограниченностью функции $\rho(x,y,z)$ ($|\rho(x,y,z)|<C$), не предполагая её непрерывности, откуда будет следовать, что функция $V(x,y,z)$ дифференцируема и в точках границы, которые можно рассматривать как точки разрыва функции $\rho(x,y,z)$, равной нулю вне тела.

Покажем, что для любого ε можно найти такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$\left|\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x}-X\right|<\varepsilon,$$

если

$$|\Delta x|<\delta(\varepsilon)\,[3].$$

Заключим точку M_o в достаточно малый шар $K_{\delta'}^{M_o}$, размеры которого мы уточним в дальнейшем, и разобьём V на два слагаемых

$$V=V_1+V_2,$$

где V_1 и V_2 соответствуют интегрированию по объёму $T_1=K_{\delta'}^{M_o}$ и дополнительному объёму $T_2=T-K_{\delta'}^{M_o}$. Тогда

$$\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x}=\frac{V_1(x+\Delta x,y,z)-V_1(x,y,z)}{\Delta x}+\frac{V_2(x+\Delta x,y,z)-V_2(x,y,z)}{\Delta x}.$$

---

[3] Здесь используется определение предела и определение производной. Производная равна пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. В данном случае $\dfrac{dV}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta V}{\Delta x}$. И по определению предела для любого наперёд заданного сколь угодно малого положительного числа ε должно существовать такое положительное число δ, что при выполнении условия $|\Delta x|<\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\Delta V|<\varepsilon$.

При любых фиксированных размерах области T_1

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x,y,z)}{\Delta x} = X_2 = \iiint_{T_2} \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau, \qquad (*)$$

так как точка M_o лежит вне области T_2. Полагая $X = X_1 + X_2$, оценим его

$$\left| X - \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x,y,z)}{\Delta x} \right| \le \left| X_2 - \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x,y,z)}{\Delta x} \right| +$$

$$|X_1| + \left| \frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x,y,z)}{\Delta x} \right|$$

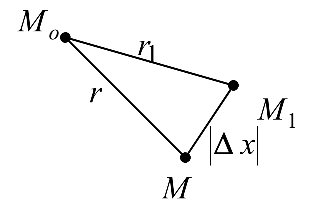


Рис. 14.

и покажем, что каждое из слагаемых можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{3}$.

В самом деле (рис. 14)

[4] $$|X_1| = \left| \iiint_{T_1} \rho \frac{x-\xi}{R^3} d\tau \right| < C \int_0^{\delta'} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr}{r^2} = 4\pi C \delta' < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (14.8)$$

так как $\left|\frac{x-\xi}{R}\right| < 1$ и $|\rho| < C$, рассмотрим последнее слагаемое

$$|S| = \left| \frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x,y,z)}{\Delta x} \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \iiint_{T_1} \rho \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) d\tau \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \iiint_{T_1} \rho \frac{R - R_1}{R_1 R} d\tau \right|,$$

где

$$R_1 = \sqrt{[(x+\Delta x) - \xi]^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$
$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Стороны треугольника $M_o M M_1$ равны r, r_1 и $|\Delta x|$. Отсюда следует[5], что

$$|R - R_1| < |\Delta x|.$$

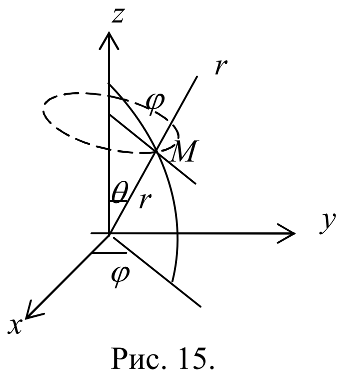


Рис. 15.

Поэтому [6]

$$|S| \le C \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R_1 R} \le C \frac{1}{2} \left\{ \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R_1^2} + \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} \right\},$$

где как для любых чисел a и b

$$ab \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\ [7]$$

(из условия $(a+b)^2 > 0$).

При этом

$$\iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} = 4\pi\delta' \text{ и } \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R_1^2} \le \iiint_{K_{2\delta'}^{M_1}} \frac{d\tau}{R_1^2} = 8\pi\delta',$$

---

[4] В сферической системе координат $d\tau = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$ (см. рис. 15.)

[5] Соответственно $R = r$, $R_1 = r_1$

[6] $\frac{R_1 R}{R_1^2 R^2} \le \frac{1}{2} \frac{R_1^2 + R^2}{R_1^2 R^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1^2} \right]$ на основании формулы $ab \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

[7] $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \ge 0$;

где $K_{2\delta'}^{M_1}$ - шар радиуса $2\delta'$ с центром в точке M_1.

При соответствующем выборе δ' можно обеспечить неравенство

$$|S| \le \frac{C}{2} 12\pi\delta' = 6\pi C\delta' < \frac{\varepsilon}{3} . \tag{14.9}$$

Выбирая δ' из условия (14.9), мы удовлетворим обоим неравенствам (14.8) и (14.9). Фиксируя область $T_1 = K_{\delta'}^{M_o}$, тем самым фиксируется и область $T_2 = T - T_1$.

Равенство (14.8) в применении к выбранной области T_2 означает, что для любого ε можно указать такое δ'', что

$$\left| \frac{V_2(x + \Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} - X_2 \right| < \frac{\varepsilon}{3} ,$$

коль скоро $|\Delta x| < \delta''$. Выбирая, наконец, $\delta = \min[\delta', \delta'']$, мы получим

$$\left| \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} - X \right| < \varepsilon , \text{ если } |\Delta x| < \delta .$$

Тем самым доказано, что существует производная $\dfrac{\partial V}{\partial x}$, равная

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X . \tag{14.10}$$

Формулы

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z$$

не требуют специального доказательства. Таким образом, доказано, что дифференцирование под знаком интеграла законно и что компоненты силового поля X, Y, Z являются компонентами $\operatorname{grad} V$.

3. Вторые производные объёмного интеграла

Несобственный интеграл

$$\iiint_T \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\tau_P = -\iiint_T \rho(P)\left(\frac{1}{R^3} - 3\frac{(x-\xi)^2}{R^5}\right) d\tau \tag{14.11}$$

не сходится абсолютно для внутренних точек *P* тела *T*. В этом случае мажоранта для подынтегральной функции имеет вид

$$\frac{C}{R^\alpha} \text{ при } \alpha = 3 .$$

Установим формулы, по которым вычисляются внутри T вторые производные потенциала V, в предположении непрерывности и непрерывной дифференцируемости плотности $\rho(x, y, z)$ в окрестности исследуемых точек. В частности, исследование, проводимое ниже, не будет применимо к граничным точкам, где, как правило, имеет место разрыв плотности.

Представим потенциал V в виде суммы двух слагаемых

$$V = V_1 + V_2 ,$$

относящихся к областям T_1 и T_2, где $T_1 = K_\delta^{M_o}$[8] - шар радиуса δ с центром в рассматриваемой точке M_o, внутри которого функция ρ дифференцируема.

Вторую производную от V_2 можно получить путём дифференцирования под знаком интеграла, так как точка M_o лежит вне области T_2

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right) = \iiint_{T_2} \rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau .$$

Первая производная V_1 по x равна

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \iiint_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = -\iiint_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau, \tag{14.12}$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Преобразуем интеграл (14.12), пользуясь формулой Остроградского – Гаусса

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\iiint_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = -\iiint_{T_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho \frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right] d\tau = -\iint_{\Sigma_\delta^{M_o}} \frac{\rho}{R}\cos\alpha \, d\sigma + \iiint_{T_1} \frac{1}{R}\frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\tau,$$

где $\Sigma_\delta^{M_o}$ - поверхность сферы, ограничивающая объём T_1, α - угол между внешней нормалью к поверхности $\Sigma_\delta^{M_o}$ и осью x. Первое слагаемое является дифференцируемой функцией в точке M_o, так как M_o лежит вне $\Sigma_\delta^{M_o}$. Второе слагаемое в окрестности точки M_o является также дифференцируемой функцией, так как функция ρ имеет производную в T_1. Отсюда следует, что в точке M_o существует вторая производная функции V_1. Перейдём к её вычислению (при переходе от ξ к x меняется знак в поверхностном интеграле)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right) = \iint_{\Sigma_\delta^{M_o}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha \, d\sigma + \iiint_{T_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\tau.$$

Для второго слагаемого в точке M_o имеет место следующая оценка:

$$\left| \iiint_{T_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\tau. \right| < C_1 \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} = C_1 4\pi\delta, \tag{14.13}$$

если

$$\left|\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right| < C_1 .$$

Применяя к поверхностному интегралу теорему о среднем, получим:(см. пункт 4. Вычисление интеграла $\iint_{\Sigma_\delta^{M_o}} \frac{\cos^2\alpha}{R^2} d\sigma$)

$$\iint_{\Sigma_\delta^{M_o}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha \, d\sigma = -\iint_{\Sigma_\delta^{M_o}} \rho \frac{\cos^2\alpha}{R^2} d\sigma = -\rho^* \frac{4\pi}{3}.$$

Здесь ρ^* - значение плотности в некоторой точке $\Sigma_\delta^{M_o}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{x-\xi}{R^3} = -\frac{1}{R^2}\cos\alpha$

[8] Точка M_o оказывается выколотой.

и, кроме того,

$$\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_o}} \frac{\cos^2\alpha}{R^2} d\,\sigma = \frac{1}{3} \iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_o}} \frac{1}{R^2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\, d\,\sigma = \frac{4\pi}{3}.$$

Переход к пределу при $\delta \to 0$ даёт: $\lim\limits_{\delta\to 0}\rho = \rho(M_o)$, т.е.

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left[-\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_o}} \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha\, d\,\sigma\right] = -\frac{4\pi}{3}.\rho(M_o). \qquad (14.14)$$

Равенство

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}$$

верно при всяком δ и левая часть его не зависит от δ, поэтому

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}\right) = -\frac{4\,\pi}{3}\rho(M) + \lim_{\delta\to 0}\iiint\limits_{T_2}\rho\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau\,. \qquad (14.15)$$

Из существования второй производной $\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}$, доказанного выше, следует существование

$$\lim_{\delta\to 0}\iiint\limits_{T_2}\rho\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau = \overline{\iiint\limits_{T}}\rho\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau\,. \qquad (14.16)$$

Последний интеграл получен при специальном способе предельного перехода, когда стягиваемые к точке M_o области являются шарами[9], что и отмечается чертой над интегралом в формуле (16). Изменение формы этих областей может менять значение предела; интеграл (16) следует рассматривать как условно – сходящийся. Таким образом,

Симеон Дени Пуассон
1781 -1840

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(M_o) = \overline{\iiint\limits_{T}}\rho\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau - \frac{4\pi}{3}\rho(M_o)\,. \qquad (14.17)$$

Замечание 5. Отсюда видно, что вычисление вторых производных потенциала при помощи формального дифференциального под знаком интеграла привело бы нас к **неверному** результату.

Замечание 6. Для производных $\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}$ и $\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}$ получаются аналогичные выражения. Подставляя значения всех трёх производных в выражение для оператора Лапласа, найдём

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} = \\ &= \overline{\iiint\limits_{T}}\rho\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right]d\tau - 4\pi\rho(M_o) = -4\pi\rho(M_o),\end{aligned} \qquad (14.18)$$

так как $\dfrac{1}{R}$ гармоническая функция[10].

[9] Предел (14.16) обычно называют *главным значением* интеграла.

[10] Формула (14.18) устанавливается в предположении дифференцируемости функции ρ, что является достаточным условием и может быть заменено менее стеснительными условиями. Однако условие непрерывности функции $\rho(M)$ для справедливости (14.18) недостаточно, так как существуют примеры таких непрерывных функций $\rho(M)$, для которых объёмный потенциал не имеет вторых производных.

Таким образом, объёмный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi\rho \quad \text{внутри тела}$$

и уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0 \qquad \text{вне тела}$$

Замечание 7. Неоднородное уравнение

$$\Delta u = -f \tag{14.18'}$$

при условии дифференцируемости f внутри некоторой области T имеет частное решение

$$u_o = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{T_2}\frac{f\,d\tau}{R}.$$

Замечание 8. Отсюда следует, в частности, что решение краевой задачи для неоднородного уравнения (18') **можно свести** к решению аналогичной краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta\upsilon = 0$, если искомую функцию представить в виде суммы $u = u_o + \upsilon$.

4. Вычисление интеграла $\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_o}}\frac{\cos^2\alpha}{R^2}d\,\sigma$ **(4.14).**

Вариант первый. Если принять $R = 1$, то при $x = R\cos\theta$ получается $x = \cos\theta$. В этом случае интеграл приводится к виду $I = \iint\limits_S x^2 d\sigma$. Уравнение поверхности сферы $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.Дифференциал $d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy$

Производные и их квадраты равны

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}; \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}; \quad z_x^2 = \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2}; \quad z_y^2 = \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}.$$

Отсюда

$$1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + \frac{x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2} = \frac{1}{1 - x^2 - y^2};$$

Дифференциал $d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy = \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$. При переводе в полярную систему координат $d\sigma = \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \dfrac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{1 - r^2}}$, и тогда интеграл равен

$$I = \iint\limits_S\frac{x^2 dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \iint\limits_S\frac{r^2\cos^2\theta\, r\,dr\,d\theta}{\sqrt{1 - r^2}} = \int\limits_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int\limits_0^1\frac{r^2\,r\,dr}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

Первый интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\frac{1 + \cos 2\theta}{2}d\theta = \left.\frac{\theta}{2}\right|_0^{2\pi} + \left.\frac{\sin 2\theta}{4}\right|_0^{2\pi} = \pi$.

Второй интеграл

$$\int\limits_0^1\frac{r^2\,r\,dr}{\sqrt{1 - r^2}} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\left(1 - r^2 + 1\right)d(1 - r^2)}{\sqrt{1 - r^2}} = -\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1\frac{\left(1 - r^2\right)d(1 - r^2)}{\sqrt{1 - r^2}} + \int\limits_0^1\frac{d(1 - r^2)}{\sqrt{1 - r^2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1\left(1 - r^2\right)^{1/2}d(1 - r^2) + \int\limits_0^1\left(1 - r^2\right)^{-1/2}d(1 - r^2)\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(1 - r^2\right)^{3/2}}{3/2} + \frac{\left(1 - r^2\right)^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3/2} - \frac{1}{1/2}\right] = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Окончательно получается $\sigma = \iint\limits_S \frac{x^2 dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{4\pi}{3}$.

Вариант второй (принятый в тексте)

Если принять поверхность сферы единичного радиуса, то интеграл при учёте того, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ приводится к виду

$$\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_o}} \frac{1}{R^2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\,d\,\sigma = \iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_o}} d\,\sigma = 4\pi\delta^2\Big|_{\delta=1} = 4\pi\,.$$

Тогда справедливо

$$\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_o}} \frac{\cos^2\alpha}{R^2}\,d\,\sigma = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_o}} \frac{1}{R^2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\,d\,\sigma = \frac{4\pi}{3}.$$

5. Вычисление несобственных интегралов

Пусть в области T задана функция $F(x,y,z)$, обращающаяся в бесконечность в некоторой точке $M_o(x_o, y_o, z_o)$. Рассмотрим определённый интеграл по области $T - K_\varepsilon$, где K_ε - некоторая окрестность точки M_o диаметра, не превосходящего ε.

Если при произвольном стягивании области K_{ε_n} к точке M_o последовательность интегралов

$$I_n = \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\,d\,\tau \quad (\varepsilon_n \to 0)$$

имеет предел, не зависящий от областей K_{ε_n}, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $F(x,y,z)$ по области Т и обозначается, как обычно,

$$\iiint\limits_T F\,d\,\tau\,.$$

Если существует хотя бы одна последовательность областей $\overline{K}_{\varepsilon_n}$ такая, что при $\varepsilon_n \to 0$ существует предел имеет другие значения, или даже вообще не существует, то предел $\overline{I}$ называется условно сходящимся несобственным интегралом. Ясно, что при рассмотрении условно сходящегося несобственного интеграла I нужно указывать ту последовательность областей $\overline{K}_{\varepsilon_n}$, по которой определяется этот интеграл.

Мы ограничимся здесь рассмотрением того случая, когда подынтегральная функция имеет особенность в изолированной точке. Исследуем сходимость интегралов типа

$$\iiint\limits_T \frac{C}{R^\alpha}\,d\,\tau_M\,, \tag{14.19}$$

где С и $\alpha > 0$ - некоторые постоянные,

$$R = R_{MM_o} = \sqrt{(x_o-\xi)^2 + (y_o-\eta)^2 + (z_o-\zeta)^2}\,,$$

M_o - точка области *T.* Не ограничивая общности, можно считать, что T есть шар радиуса R с центром в точке $M_o(x_o, y_o, z_o)$. Возьмём в качестве области K_{ε_n} шар радиуса ε_n с центром в точке M_o и будем искать предел последовательности интегралов

$$\iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} \frac{C}{R^\alpha}\, d\tau_M = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_{\varepsilon_n}^{R} \frac{C}{R^{\alpha-2}} = 2\pi\cdot 2C \int\limits_{\varepsilon_n}^{R} \frac{dr}{R^{\alpha-2}} = \begin{cases} 4\pi C\left[\dfrac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right], & \alpha \neq 3, \\ 4\pi C\left[\ln r\right]_{\varepsilon_n}^{R}, & \alpha = 3. \end{cases}$$

Переход к пределу при ε_n? стремящемся к нулю, показывает, что при $\alpha < 3$ предел существует, при $\alpha \geq 3$ предела не существует.

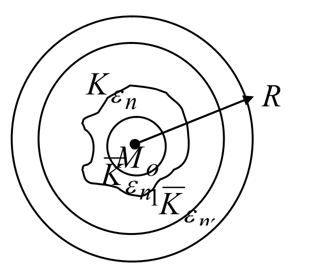


Рис. 16.

Покажем, что если функция $F(x,y,z)$ неотрицательна и существует предел

$$I_n = \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\, d\tau, \quad (\varepsilon_n \to 0),$$

где $\overline{K}_{\varepsilon_n}$ - шар радиуса ε_n с центром в точке M_o, то существует предел интегралов I при любом выборе последовательности областей $\overline{K}_{\varepsilon_n}$, стягивающихся к точке M_o, и значение этого предела не зависит от формы области $\overline{K}_{\varepsilon_n}$. Любую область $\overline{K}_{\varepsilon_n}$ можно заключить между двумя сферами $\overline{K}_{\varepsilon_{n1}}$ и $\overline{K}_{\varepsilon_{n2}}$, радиусы которых ε_{n1} и ε_{n2} стремятся к нулю вместе с ε_n (рис.16.). В силу положительной подынтегральной функции

$$\iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_{n1}}} F\, d\tau \geq \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\, d\tau \geq \iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_{n2}}} F\, d\tau\,.$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\, d\tau = \lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_n}} F\, d\tau = I,$$

так как пределы крайних интегралов существуют и равны этому числу. Таким образом, *в случае трёх независимых переменных несобственный интеграл*

$$\iiint\limits_{T} \frac{C}{R^\alpha}\, d\tau_M \tag{14.20}$$

существует, если $\alpha < 3$ *и не существует, если* $\alpha \geq 3$.

Для другого числа независимых переменных критическое значение α, определяющее границы сходимости интегралов типа (14.20), равно числу измерений; так, например, для двух независимых переменных интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{C}{\rho^\alpha} = \begin{cases} \text{ïðè} \quad \alpha < 2 \ \text{ñõîäèòñÿ}, \\ \text{ïðè} \quad \alpha \geq 2 \ \text{ðàñõîäèòñÿ}\,. \end{cases}$$

6. Признаки сходимости несобственных интегралов

Докажем, что *для сходимости несобственного интеграла*

$$\iiint\limits_{T} \overline{F}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \tag{14.21}$$

достаточно, чтобы существовала такая функция $F(x,y,z)$, *для которой несобственный интеграл по области* T *сходится, и чтобы имело место неравенство*

$$\left|F(x,y,z)\right| < \overline{F}(x,y,z)\,. \tag{14.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим некоторую последовательность областей K_ε, содержащих особую точку M_o. В силу сходимости последовательности интегралов $\bar{I}_n$, от функции $\overline{F}(x,y,z)$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что

$$\left|\bar{I}_{n_1} - \bar{I}_{n_2}\right| = \left|\iiint\limits_{K\varepsilon_{n_1} - K\varepsilon_{n_2}} \overline{F}\, d\tau\right| < \varepsilon ,$$

коль скоро $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. Так как $\overline{F}$ является мажорантной функцией для $F(x,y,z)$, то можно написать

$$\left|I_{n_1} - I_{n_2}\right| = \left|\iiint\limits_{K\varepsilon_{n_1} - K\varepsilon_{n_2}} F\, d\tau\right| \le \iiint\limits_{K\varepsilon_{n_1} - K\varepsilon_{n_2}} |F|\, d\tau \le \iiint\limits_{K\varepsilon_{n_1} - K\varepsilon_{n_2}} \overline{F}\, d\tau < \varepsilon, \tag{14.23}$$

если $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. Выполнение условия (14.22) в силу признака сходимости Коши является достаточным для сходимости последовательности

$$I_n = \iiint\limits_{T - \overline{K}_{\varepsilon_n}} F\, d\tau$$

к некоторому пределу

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \iiint\limits_{T} F\, d\tau .$$

Нетрудно видеть, что этот предел не будет зависеть от формы области K_{ε_n}. Тем самым существование несобственного интеграла (14.21) доказано.

Если же для некоторой функции $F(x,y,z)$ можно указать такую положительную функцию $\overline{F}(x,y,z)$, что $F(x,y,z) > \overline{F}$, причём несобственный интеграл от $\overline{F}$ по области T расходится , то несобственный интеграл (14.21) расходится.

Следствие: *если для некоторой функции $F(M,P)$, обращающийся в бесконечность при $P = M$, имеет место неравенство*

$$\left|F(M,P)\right| < \frac{C}{R_{MP}^{\alpha}}, \qquad \left.\begin{aligned} \alpha &= const < 3, \\ C &= const < \infty. \end{aligned}\right\}$$

то несобственный интеграл по области T, содержащей точку M,

$$\iiint\limits_{T} F(M,P)\, d\tau_P$$

сходится.

Из теории собственных интегралов, зависящих от параметров, известно, что непрерывность подынтегральной функции по параметрам и независимым переменным является достаточным условием непрерывности самого интеграла как функции параметров[11]. Для несобственных интегралов непрерывность подынтегральной функции не имеет места и поэтому указанный выше критерий неприменим. Установим критерий непрерывности несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Будем рассматривать несобственные интегралы

$$V(M) = \iiint\limits_{T} F(M,P)\, f(P)\, d\tau_P , \tag{14.24}$$

[11] Будак Б.М.., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. «Наука», 1985б стр. 442.

где $F(P,M)$ - функция, обращающаяся в бесконечность при совпадении аргументов и непрерывная по М, а $f(P)$ - ограниченная функция.

Определение 1. Интеграл (14.24) называется *равномерно сходящимся* в точке M_o, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что имеет место неравенство

$$\left|V_{\delta(\varepsilon)}(M)\right| = \left|\iiint\limits_{T_{\delta(\varepsilon)}} F(M,P)\ f(P)\, d\tau_P\right| \le \varepsilon$$

для любой точки М, расстояние которой от точки M_o меньше $\delta(\varepsilon)$, и для любой области $T_{\delta(\varepsilon)}$, содержащей точку M_o и имеющей диаметр $d \le \delta(\varepsilon)$.

Докажем, что интеграл

$$V(M) = \iiint\limits_{T} F(M,P)\ f(P)\, d\tau_P$$

равномерно сходящийся в точке M_o, *есть непрерывная функция в этой точке* M_o. Мы должны доказать, что для любого ε можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$\left|V(M_o) - V(M)\right| < \varepsilon \text{ при } \left|\overrightarrow{MM_o}\right| < \delta(\varepsilon).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем внутри области T некоторую область T_1, содержащую точку M_o (рис. 17), и разобьем интеграл на два слагаемых

$$V = V_1 + V_2,$$

где интеграл V_1 берётся по области T_1, а V_2 по области $T_2 = T - T_1$. В дальнейшем мы более точно определим размеры области T_1. Рассмотрим неравенство

$$\left|V(M_o) - V(M)\right| \le \left|V_2(M_o) - V_2(M)\right| + \left|V_1(M_o)\right| + \left|V(M)\right|$$

и покажем, что каждое слагаемое, стоящее справа, может быть сделано меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ при достаточно малом $\left|\overrightarrow{MM_o}\right|$.. Выбирая область T_1 внутри сферы радиуса $\delta(\frac{\varepsilon}{3})$, будем иметь:

$$\left|V_1(M_o)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } \left|V(M)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{если } \left|\overrightarrow{MM_o}\right| \le \delta'(\frac{\varepsilon}{3}) \qquad (14.25)$$

в точке M_o. Выбор области T_1 определяет область T_2. Так как точка M_o лежит вне области T_2, то интеграл V_2 является непрерывной функцией в этой точке.

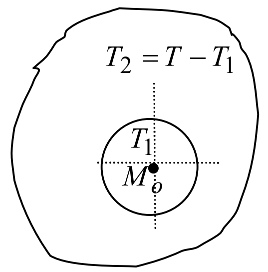


Рис. 17.

Отсюда следует существование такого $\delta''(\frac{\varepsilon}{3})$, что

$$\left|V_2(M_o) - V_2(M)\right| \le \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } \left|\overrightarrow{MM_o}\right| \le \delta''(\frac{\varepsilon}{3}).$$

Полагая $\delta(\varepsilon) = \min\left|\delta'(\varepsilon), \delta''(\varepsilon)\right|$, получим

$$\left|V(M_o) - V(M)\right| \le \varepsilon \text{ при } \left|\overrightarrow{MM_o}\right| \le \delta,$$

что и означает непрерывность равномерно сходящегося интеграла.

Замечание 1. Полученные результаты справедливы не только для интегралов по объёму, но также и для интегралов по поверхности и линиям.

Рассмотрим потенциал

$$V(M)=\iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}}\,d\tau_P \tag{14.26}$$

и компоненты силы притяжения

$$\left.\begin{aligned} X(M)&=-\iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3}(x-\xi)\,d\tau_P;\\ Y(M)&=-\iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3}(y-\eta)\,d\tau_P;\\ Z(M)&=-\iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}^3}(z-\zeta)\,d\tau_P.\end{aligned}\right\} \tag{14.27}$$

в точках, лежащих внутри притягивающего тела T. Несобственные интегралы (14.8) и (14.9) являются сходящимися, если плотность $\rho(M)$ ограничена $|\rho(M)|<C$. Для потенциала $V(M)$ это очевидно, так как

$$\frac{|\rho|}{R}<\frac{C}{R^{\alpha}} \quad (\alpha=1<3).$$

Для компонент силы притяжения это следует из неравенства

$$\frac{|\rho|}{R^2}\frac{x-\xi}{R}<\frac{C}{R^{\alpha}} \quad (\alpha=2<3),$$

так как $|x-\xi|<R$.

Для иллюстрации понятия равномерной сходимости несобственных интегралов покажем, что интегралы (14.8) и (14.9) являются непрерывными функциями.

Для этого надо доказать, что интегралы (14.8) и (14.9) равномерно сходятся во всякой точке M_o.

Вычислим модуль интеграла[12]

$$\left|\iiint\limits_{T_\delta} \frac{\rho(P)}{R_{MP}}\,d\tau_P\right| \le C\iiint\limits_{K_\delta^{M_o}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}},$$

где $K_\delta^{M_o}$ - шар радиуса δ с центром в точке M_o, содержащий область T_δ. Однако вычисление этого интеграла по области $K_\delta^{M_o}$ с центром в точке M_o - неудобно. Для вычисления последнего интеграла целесообразно перейти к сферической системе координат с центром в точке *M*. Очевидно, что

$$\left|C\iiint\limits_{K_\delta^{M_o}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}}\right| \le C\left|\iiint\limits_{K_{2\delta}^{M_o}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}}\right| C\cdot 8\pi\delta^2,$$

где $K_{2\delta}^{M}$ - шар радиуса 2δ с центром в точке M. Если нам задано некоторое $\varepsilon>0$, то выбрав

[12] Отметим, что интеграл (27.9) получается из интеграла (27.8) при $F(M,P)=\dfrac{1}{R_{MP}}$, $f(P)=\rho(P)$.

$$\delta(\varepsilon)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi C}},$$

мы убедимся, в равномерной сходимости интеграла V.

Повторяя аналогичное рассуждение для интеграла

$$X(M)=-\iiint\limits_{T}\rho(P)\frac{x-\xi}{R^3{}_{MP}}d\tau_P,$$

получим:

$$\left|\iiint\limits_{T_\delta}\rho(P)\frac{x-\xi}{R^3{}_{MP}}d\tau_P\right|\le C\left|\iiint\limits_{K^{M_o}_{\delta}}\frac{d\tau_P}{R^2{}_{MP}}\right|\le C\left|\iiint\limits_{K^{M_o}_{2\delta}}\frac{d\tau_P}{R^2{}_{MP}}\right|=8\pi\delta C\le\varepsilon,$$

если $\delta\le\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{8\pi C}$.

Таким образом, потенциал V и компоненты силы притяжения X, Y, Z являются непрерывными функциями во всём пространстве.[13]

§ 15. Поверхностные потенциалы[14]

1. Потенциал простого слоя

Любая функция Грина может быть представлена в виде поверхностного интеграла вида

$$u(M)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n}(P)-u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right]d\sigma_P. \tag{15.1}$$

Рассмотрим поле, создаваемое массами, распределёнными по поверхности, и определим потенциал этого поля.

Замечание 1. Если массы с объёмной плотностью ρ расположены в некотором слое толщины h около поверхности Σ и поле изучается на расстояниях, больших по сравнению с h ($\frac{h}{R}<<1$), то учёт толщины поверхности, вообще говоря, не имеет смысла. Поэтому вместо объёмного потенциала с плотностью ρ целесообразно рассматривать поверхностный потенциал с поверхностной плотностью $\mu=\rho h$.

Определение 1. Поверхностной плотностью $\mu(P)$ в точке P поверхности Σ называют предел отношения массы, находящейся на некотором элементе $d\sigma$ поверхности Σ, содержащем точку P, к его площади при стягивании $d\sigma$ к точке P.. Потенциал этих масс представляется поверхностным интегралом

$$V(M)=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mu(P)}{R_{MP}}d\sigma_P, \tag{15.2}$$

называется *потенциалом простого слоя.*

---

[13] Равномерная сходимость интегралов $V(M)$ и $X(M)$ доказана в предположении ограниченности плотности $|\rho|<C$. Следовательно, эти интегралы непрерывны также и в точках разрыва функции ρ; например, на границе области, заполненной массами.

[14] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский 1966 Уравнения математической физики. М. Наука (стр. 342)

2. Потенциал двойного слоя

Другим типом поверхностного потенциала является потенциал двойного слоя. Рассмотрим диполь, образованный двумя массами $-m$ и $+m$, расположенными в точках P_1 и P_2 на расстоянии Δl (рис. 18.).

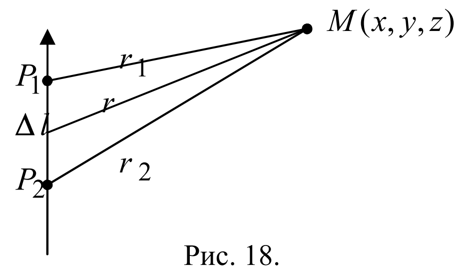


Рис. 18.

Определение 2. *Моментом диполя* называется произведение $m \cdot \Delta l = N$.

Потенциал диполя в некоторой точке $M(x,y,z)$ равен

$$V = \frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1} = m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = N\frac{1}{\Delta l}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right), \qquad (15.3)$$

где r_1 и r_2 - расстояния точки M от точек P_1 и P_2.

Если Δl мало по сравнению с расстоянием до точки M $\left(\frac{\Delta l}{r_1} << 1\right)$, то пользуясь теоремой о конечных приращениях, можно написать

$$V = N\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{R}\right), \quad R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

где производная берётся по направлению от отталкивающей массы к притягивающей и R - расстояние от точки $M(x,y,z)$ до некоторой средней точки $P(\xi,\eta,\zeta)$ отрезка Δl.

Вычислим производную по направлению l

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R^2}\cos(r,l) = \frac{\cos\varphi}{R^2},$$

где вектор $\boldsymbol{r}$ направлен от диполя к фиксированной точке M, а φ есть угол между вектором $\boldsymbol{l}$ и вектором $\boldsymbol{r}$. Таким образом, потенциал диполя равен

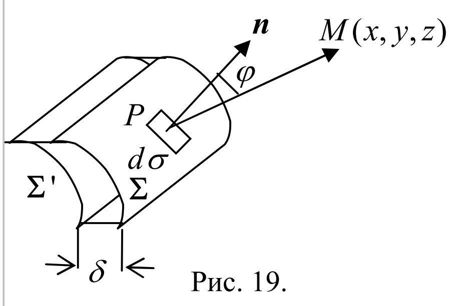


Рис. 19.

$$V(M) = N\frac{\cos\varphi}{R^2}, \qquad (15.4)$$

где N - момент диполя.

Пусть на двух поверхностях Σ и Σ' (рис. 19.), находящихся друг от друга на малом расстоянии δ, распределены массы таким образом, что масса каждого элемента поверхности Σ' равна по величине и противоположна по знаку массе соответствующего элемента поверхности Σ при $\delta \to 0$. Обозначим через **n** общую нормаль к поверхностям Σ и Σ', направленную от отталкивающих масс к притягивающим. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим *двойной слой* как совокупность двух простых слоёв с взаимно противоположными плотностями, находящимися друг от друга на малом расстоянии. Если v - поверхностная плотность момента, то момент элемента поверхности $d\sigma_P$ равен

$$dN = v\,d\sigma_p$$

для потенциала элемента $d\sigma$ в точке $M(x,y,z)$ мы имеем

$$v\frac{d}{dn_p}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)d\sigma_P = v(P)\frac{\cos\varphi_1}{R_{MP}^2}d\sigma_P,$$

где $\varphi_1 = (\boldsymbol{n}, \overrightarrow{PM})$.

Определение 3. Потенциалом двойного слоя называется интеграл

$$W(M) = -\iint_{\Sigma} \frac{d}{d n_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) \nu(P)\, d\sigma_P . \qquad (15.5)$$

Замечание 2. Это определение соответствует такому случаю, когда внешняя сторона поверхности является отталкивающей, а внутренняя – притягивающей.

Очевидно, что

$$W(M) = -\iint_{\Sigma} \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} \nu(P)\, d\sigma_P ,$$

где φ - угол между внутренней нормалью и направлением из точки поверхности P на фиксированную точку M. Если поверхность незамкнута, то мы должны считать её двусторонней, так как потенциал двойного слоя определяется только для таких поверхностей.

Потенциалы простого и двойного слоя в случае двух независимых переменных (плоская задача) имеют вид

$$V = \int_C \mu(P) \ln \frac{1}{R_{MP}} ds , \qquad (15.6)$$

$$W = -\int_C \nu\,(P) \frac{d}{d n_P}\left(\ln \frac{1}{R_{MP}}\right) ds = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu\,(P)\; ds , \qquad (15.7)$$

C – некоторая кривая; μ - линейная плотность простого слоя; ν - плотность момента линейного двойного слоя; φ - угол между внутренней нормалью к линии C и направлением на фиксированную точку.

Если точка наблюдения $M(x, y, z)$ находится вне поверхности (вне притягивающих масс рис. 20), то подынтегральные функции и их производные по x, y, z любого порядка в формулах

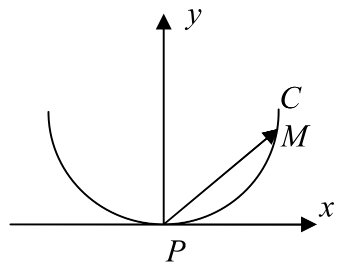


Рис. 20.

$$V = \iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P ,$$

$$W = -\iint_{\Sigma} \nu(P) \frac{d}{d n_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P$$

непрерывны по переменным x, y, z. Поэтому в точках, лежащих вне поверхности Σ, производные поверхностных потенциалов можно вычислить при помощи дифференцирования под знаком интеграла. Отсюда в силу принципа суперпозиции следует, что поверхностные потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа всюду вне притягивающих масс. Функции (15.6) и (15.7), очевидно, удовлетворяют уравнению Лапласа с двумя независимыми переменными.

Поверхностные потенциалы в точках поверхности Σ представляются несобственными интегралами. Покажем, что если поверхность имеет непрерывную кривизну, то потенциал двойного слоя в точках этой поверхности существует. Проведём доказательство для случая двух независимых переменных:

$$W = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu\; ds .$$

Рассмотрим кривую на плоскости (x, y) и выберем начало координат в точке P, ось x направим по касательной, а ось y- по нормали к поверхности в этой точке (рис.20). Уравнение кривой в некоторой окрестности точки P запишется в виде

$$y = y(x).$$

Кривая имеет, по предположению, непрерывную кривизну, то есть кривая $y = y(x)$ имеет непрерывную вторую производную. Поэтому

$$y(x) = y(0) + x\,y'(0) + \frac{x^2}{2}\,y''(\theta x)...(0 \le \theta \le 1),$$

откуда вследствие выбора координатных осей

$$y(x) = \frac{x^2}{2}\,y''(\theta x).$$

Отсюда будем иметь

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^4\left[\frac{y''(\theta x)}{2}\right]^2} = x\sqrt{1 + x^2\left[\frac{y''(\theta x)}{2}\right]^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{y}{R} = \frac{x\,y''(\theta x)}{2\sqrt{1 + x^2\left[\frac{y''(\theta x)}{2}\right]^2}}$$

и

$$\frac{\cos\varphi}{R} = \frac{y''(\theta x)}{2\left\{1 + x^2\left[\frac{y''(\theta x)}{2}\right]^2\right\}}.$$

Из выражений кривизны

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

следует

$$y''(0) = K(P).$$

Поэтому

$$\lim_{MP \to 0} \frac{\cos\varphi}{R} = \frac{1}{2}K(P),$$

что доказывает непрерывность $\dfrac{\cos\varphi}{R}$ вдоль дуги, а тем самым и существование потенциала двойного слоя в точках кривой C для ограниченной функции v.

Потенциал двойного слоя в случае трёх независимых переменных также существует в точках поверхности, имеющей непрерывную кривизну, потому что функция $\dfrac{\cos\varphi}{R^2}$ имеет интегрируемую особенность порядка $1/R$. Следовательно, *существование потенциала простого слоя не вызывает сомнений.*

3. Разрыв потенциала двойного слоя

Покажем, что потенциал двойного слоя в некоторой точке P_o, лежащей на поверхности Σ, является разрывной функцией, для которой имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} W_B(P_o) &= W(P_o) + 2\pi v(P_o), \\ W_H(P_o) &= W(P_o) - 2\pi v(P_o), \end{aligned}\right\} \qquad (15.8)$$

где $W_B(P_o)$ - предельное значение потенциала двойного слоя при подходе к точке P_o с внутренней стороны, а $W_H(P_o)$ - предельное значение с наружной стороны поверхности.[15] В случае двух независимых переменных соответствующие формулы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} W_B(P_o) &= W(P_o) + \pi\nu(P_o), \\ W_H(P_o) &= W(P_o) - \pi\nu(P_o). \end{aligned}\right\} \tag{15.9}$$

Потенциал двойного слоя для двух независимых переменных выражается интегралом

$$W(M) = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\, ds_P.$$

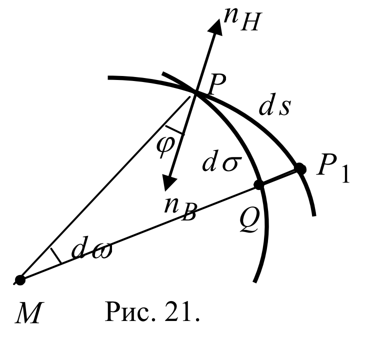


Рис. 21.

Рассмотрим некоторый элемент дуги ds, концами которого являются точки P и P_1. Проведём через точку P дугу окружного радиуса MP с центром в точке М до пересечения её с отрезком MP_1 в точке Q, тогда с точностью до бесконечно малых высшего порядка можно написать (рис. 21)

$$ds = \cos\varphi\, d\sigma, \quad \frac{d\sigma}{R} = d\omega, \tag{15.10}$$

где $ds = \overset{\cup}{PP_1}$, $d\sigma = \overset{\cup}{PQ}$, $d\omega$ - угол видимости, под которым видна дуга ds из точки М. Знак $d\omega$ совпадает со знаком $\cos\varphi$, так что $d\omega > 0$, если φ - угол между внутренней нормалью в точке P и вектором $\overrightarrow{PM}$) меньше $\frac{\pi}{2}$, и $d\omega < 0$, если $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Если $d\omega > 0$, то есть, $\varphi < \frac{\pi}{2}$, то из точки M видна «внутренняя» сторона кривой С, при $d\omega < 0$ ($\varphi > \frac{\pi}{2}$) из точки M видна «наружная» сторона кривой. Отсюда следует, что угол видимости некоторой дуги $\overset{\cup}{P_1P_2}$ равен углу P_1MP_2, который описывает луч MP, когда точка Р пробегает дугу P_1P_2.

Рассмотрим потенциал двойного слоя W^o на замкнутой кривой С с постоянной плотностью $\nu = \nu_o = const$. Луч MP (рис. 28.4) описывает угол

$\Omega = 2\pi$, если точка M лежит внутри кривой С,

$\Omega = \pi$, если точка M лежит на кривой С,

$\Omega = 0$, если точка M лежит вне кривой С, когда точка P пробегает всю кривую С.

Отсюда для потенциала W^o получаем

$W^o = \nu_o\Omega = 2\pi\nu_o$, если точка M лежит внутри кривой C,

$W^o = \nu_o\Omega = \pi\nu_o$, если точка M лежит на кривой C,

$W^o = \nu_o\Omega = 0$, если точка M лежит вне кривой C (рис. 22).

Таким образом, потенциал с постоянной плотностью является функцией кусочно-постоянной, причём

[15] Если Σ - незамкнутая поверхность, то внутренняя сторона может быть условно определена соглашением о том, какая нормаль в точке P_o называется «внутренней» и какая «внешней». Следует иметь в виду, что в случае незамкнутой поверхности потенциал двойного слоя определяется только для двусторонних поверхностей.

$$\left.\begin{aligned} W_B^o &= W_C^o + \pi v_o, \\ W_H^o &= W_C^o - \pi v_o, \end{aligned}\right\} \qquad (15.11)$$

где W_B^o, W_C^o, W_H^o - значение потенциала внутри, на и вне кривой С.

Аналогично в случае трёх независимых переменных имеем

$$\frac{d\sigma \cos\varphi}{R^2} = d\omega, \qquad (15.12)$$

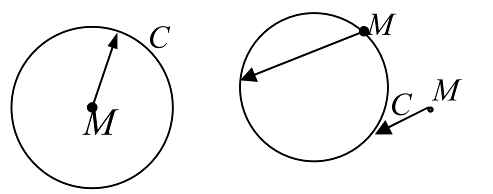


Рис. 22.

где $d\omega$ - телесный угол, под которым виден элемент $d\sigma$ поверхности Σ. Пусть $d\sigma'$ - элемент сферической поверхности, получающейся при пересечении сферы, описанной радиусом *MP* из точки *M*, с конусом, имеющим вершину в точке М и опирающимся на элемент поверхности $d\sigma$ (рис. 23). Элемент поверхности $d\sigma' = d\sigma\cos\varphi$. Отсюда следует формула (15.12). Замечание, сделанное выше относительно знака $d\omega$, остаётся в силе, что приводит к формуле

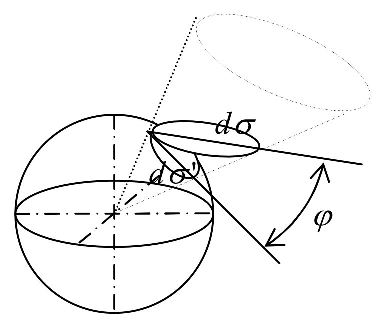


Рис. 23.

$W^o = v_o\Omega = 4\pi v_o$, если точка *M* лежит внутри поверхности Σ,

$W^o = v_o\Omega = 2\pi v_o$, если точка *M* лежит на поверхности Σ,

$W^o = v_o\Omega = 0$, если точка *M* лежит вне поверхности Σ,

характеризующим кусочное постоянство функции W^o, а также к формулам

$$\left.\begin{aligned} W_B^o &= W_\Sigma^o + 2\pi v_o, \\ W_H^o &= W_\Sigma^o - 2\pi v_o, \end{aligned}\right\} \qquad (15.13)$$

где W_B^o, W_H^o - значение потенциала W^o внутри и снаружи поверхности Σ, а W_Σ^o - на поверхности Σ.

Рассмотрим теперь потенциал двойного слоя с переменной плотностью и докажем, что в точках непрерывной плотности имеют место формулы, аналогичные формулам (15.11) и (15.12). Пусть P_o - точка поверхности Σ, в которой функция $v(P)$ непрерывна. Введём потенциал двойного слоя W^o с постоянной плотностью $v_o = v(P_o)$ и рассмотрим функцию

$$I(M) = W(M) - W^o(M) = \iint_\Sigma [v(P) - v_o]\frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} d\sigma_P .$$

Докажем, что функция $I(M)$ непрерывна в точке P_o. Для этого достаточно доказать, равномерную сходимость интеграла $I(M)$ в точке P_o. Зададимся некоторым числом $\varepsilon > 0$. Из непрерывности функции $v(P)$ в точке P_o следует, что для любого наперёд заданного числа $\varepsilon > 0$ можно найти Σ_1 - окрестность точки P_o на поверхности Σ - такую, что

$$|v(P) - v_o| < \varepsilon,$$

если $P \in \Sigma_1$. Представим интеграл I в виде суммы

$$I = I_1 + I_2,$$

где интеграл I_1 берётся по поверхности Σ_1, а I_2 - по поверхности $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$. Из определения Σ_1 следует, что

$$|I_1| < \eta B_\Sigma,$$

где B_Σ - постоянная, определяемая условием

$$\iint_{\Sigma} \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} d\sigma_P \le B_\Sigma \tag{15.14}$$

при всевозможных положениях точки M, не зависящая от выбора поверхности Σ_1. Выбирая $\eta = \frac{1}{B_\Sigma}$, мы убеждаемся в том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое Σ_1, содержащее P_o, что

$$|I_1(M)| < \varepsilon$$

при любом положении точки M. Отсюда и следует равномерная сходимость интеграла $I(M)$ в точке P_o, а также его непрерывность в этой точке.

Если $W_B(P_o)$ и $W_H(P_o)$ - пределы потенциала $W(M)$ при $M \to P_o$ с внутренней и наружной сторон поверхности Σ, то

$$W_B(P_o) = W_H^o(P_o) + I(P_o) = W^o(P_o) + I(P_o) + 2\pi v_o = W(P_o) + 2\pi v(P_o)$$

и аналогично

$$W_H(P_o) = W(P_o) - 2\pi v(P_o).$$

Справедливость формул (15.13) установлена.

Замечание 3. Приведенное выше доказательство справедливо для поверхностей, удовлетворяющих условию ограниченности (15.14). Для выпуклой поверхности, которую всякий луч из точки М пересекает не более двух раз, $B_\Sigma \le 8\pi$. ; для поверхностей, состоящих из конечного числа выпуклых частей, B_Σ тоже ограничено. Таким образом, наше доказательство относится к весьма широкому классу поверхностей.

Все приведенные выше рассуждения остаются в силе и для двух независимых переменных. В этом случае формулы (15.11) принимают вид

$$W_B(P_o) = W(P_o) + \pi v(P_o),$$
$$W_H(P_o) = W(P_o) - \pi v(P_o).$$

Свойства потенциала простого слоя.

В отличие от потенциала двойного слоя потенциал простого слоя

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma_P \tag{15.15}$$

непрерывен в точках поверхности Σ. Убедимся в этом для случая гладкой поверхности Σ. Для этого достаточно установить равномерную сходимость интеграла $V(M)$ в точке поверхности Σ.

Действительно, пусть P_o - некоторая точка поверхности Σ. Представим потенциал V в виде суммы

$$V(M) = \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma_P + \iint_{\Sigma_2} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P) d\sigma_P = V_1 + V_2,$$

где Σ_1 - достаточно малая часть поверхности Σ, содержащаяся в сфере радиуса δ с центром в точке P_o. Величину δ мы более точно определим в дальнейшем.

Рассмотрим систему координат с началом в точке P_o, ось z которой направлена по внешней нормали в P_o. Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка, отстающая от $P(0,0,0)$ на расстояние $MP_o < \delta$. Обозначим через Σ_1' проекцию Σ_1 на плоскость (x, y), а через $K_{2\delta}^{M'}$ круг радиуса 2δ с центром в точке $M(x, y, 0)$, целиком содержащий область Σ_1. Предполагая ограниченность функции

$$|\mu(P)| < A$$

и, принимая во внимание, что

$$d\sigma = \frac{d\sigma'}{\cos\gamma} = \frac{d\xi d\eta}{\cos\gamma}$$

и

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \geq \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \rho,$$

получим:

$$|V_1(M)| =< A\iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma}{R_{MP}} = A\iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma'/\cos\gamma}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \leq$$

$$\leq 2A\iint_{\Sigma_1} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \leq 2A \iint_{K_{2\delta}^{M'}} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

если δ настолько мало, что $\cos\gamma > \frac{1}{2}$.

Введём в плоскости (x, y) полярную систему координат (ρ, φ) с началом в точке M'. Тогда можно написать

$$|V_1(M)| \leq 2A \iint_{K_{2\delta}^{M'}} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\rho} = 8A\pi\delta.$$

Выбирая $\delta = \frac{1}{8\pi A}$, будем иметь

$$|V_1(M)| < \varepsilon,$$

если $MP_o < \delta$. Следовательно, $V(M)$ равномерно сходится во всякой точке $P_o \in \Sigma$ и является непрерывной функцией в этой точке.

Обратимся теперь к изучению поведения нормальных производных потенциала простого слоя на поверхности. Покажем, что они имеют на Σ разрыв такого же типа, как и потенциал двойного слоя. Внешняя и внутренняя нормальные производные функции V: $\frac{dV}{dn_H}$ и $\frac{dV}{dn_B}$ определяются следующим образом. Пусть P_o - некоторая точка Σ. Из точки P_o проведём ось z, которую можно направить либо вдоль внешней, либо вдоль внутренней нормали. Рассмотрим производную $\frac{dV}{dz}$ в некоторой точке M оси z. Обозначим $\left(\frac{dV}{dz}\right)_B$ и $\left(\frac{dV}{dz}\right)_H$ пределы производной $\frac{dV}{dz}$ при стремлении точки M к точке P_o с внутренней или внешней стороны поверхности Σ. Если ось z направлена по внешней (внутренней) нормали, то эти значения называются внутренними и внешними предельными значениями производной по внешней (внутренней) нормали к точке P_o[16].

[16] Предел разностного отношения $\frac{V(M)-V(P_o)}{MP_o}$ при $M \to P_o$ равен пределу извне для производной по внешней нормали или пределу внутри по внутренней нормали, в зависимости от того, с какой стороны точка M приближается к точке P_o.

Исследуем разрывы внутренней нормальной производной потенциала простого слоя на Σ. Производная $\frac{dV}{dz}$ в точке М оси z, направленной по внутренней нормали, равна

$$\frac{dV}{dz}(M) = \iint\limits_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\cos\psi}{R_{MP}^2}\mu(P)\, d\sigma_P, \qquad (15.16)$$

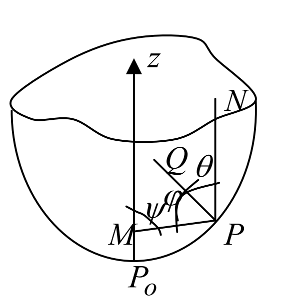


Рис. 24.

где ψ - угол между осью z и вектором $\overrightarrow{MP}$. Проведём из точки P (рис. 24.) нормаль PQ и прямую PN, параллельную оси z (нормали к точке P_o) и обозначим через θ угол NPQ, равный углу между нормалями в точках P и P_o [17]. Выражение для потенциала двойного слоя $W(M)$ содержит множитель $\frac{\cos\varphi}{R^2}$, где $\varphi = \angle MPQ$. так как угол MPN равен $\pi - \psi$, то $\cos(\pi-\psi) = \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta\cos\boldsymbol{\Omega} = -\cos\psi$, где $\boldsymbol{\Omega}$ - двугранный угол с ребром PQ. Отсюда следует, что

$$\frac{dV}{dz}(M) = -\iint\limits_{\Sigma}(\mu\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{R^2}d\sigma - \iint\limits_{\Sigma}(\mu\sin\theta\cos\Omega)\frac{\sin\varphi}{R^2}d\sigma = -W_1 - I(M), \qquad (15.17)$$

где $W_1(M)$ - потенциал двойного слоя с плотностью $\mu_1 = \mu\cos\theta$, имеющий разрыв на поверхности $\boldsymbol{\Sigma}$. Очевидно, что интеграл $I(M)$ является функцией, непрерывной в точке P_o, так как $I(M)$ сходится равномерно в этой точке. Возвращаясь к формуле (15.16), видим:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dz}\right)_B &= -W_1(P_o) - 2\pi\mu_1(P_o) - I(P_o), \\ \left(\frac{dV}{dz}\right)_H &= -W_1(P_o) + 2\pi\mu_1(P_o) - I(P_o). \end{aligned}\right\} \qquad (15.18)$$

Обозначим

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)_0 = -W_1(P_o) - I(P_o) =$$

$$= \left[-\iint\limits_{\Sigma}(\mu\cos\theta\ )\frac{\cos\varphi}{R^2}d\sigma - \iint\limits_{\Sigma}(\mu\sin\theta\cos\Omega)\frac{\sin\varphi}{R^2}d\sigma\right]_{M=P_o} = \iint\limits_{\Sigma}\mu\frac{\cos\psi_o}{R_{P_oP}^2}d\sigma,$$

где ψ_o - угол между осью z и вектором $\overrightarrow{P_oP}$. Замечая, что $\mu_1(P_o) = \mu(P_o)$, находим:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dn_B}\right)_B &= \left(\frac{dV}{dn_B}\right)_0 - 2\pi\mu(P_o), \\ \left(\frac{dV}{dn_B}\right)_H &= \left(\frac{dV}{dn_B}\right)_0 + 2\pi\mu(P_o), \end{aligned}\right\} \qquad (15.19)$$

---

[17] Очевидно, что θ и $\sin\theta$ стремятся к нулю, когда P стремится к P_o. Если поверхность обладает конечной кривизной в окрестности точки P_o, то есть, уравнение можно записать в виде $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ имеет вторые производные, то $\sin\theta$ будет дифференцируемой функцией x, y и , следовательно, $\sin\theta < Ar$ (для поверхностей Ляпунова $\sin\theta < Ar^{\delta}$).

так как по условию ось z направлена по внутренней нормали. Если ось z направлена по внешней нормали, то знак $\cos\psi$ изменяется, и мы получим:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dV}{dn_H}\right)_B &= \left(\frac{dV}{dn_H}\right)_0 + 2\pi\mu(P_o),\\ \left(\frac{dV}{dn_H}\right)_H &= \left(\frac{dV}{dn_H}\right)_0 - 2\pi\mu(P_o).\end{aligned}\right\} \qquad (15.20)$$

Для двух независимых переменных имеют место аналогичные формулы с заменой 2π на π.

4. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач

Метод разделения переменных и метод функции источника позволяет получить явное выражение для решения краевых задач только в случае областей простейшего вида. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа (или Пуассона) при помощи поверхностных потенциалов к интегральным уравнениям, с одной стороны, удобно для теоретических исследований вопроса о разрешимости и единственности краевых задач, с другой стороны, даёт возможность эффективного численного решения краевых задач для областей сложной формы.

Первая краевая задача для полупространства.

Найти гармоническую функцию, непрерывную всюду в области $z \ge 0$, принимающую на границе $z = 0$ заданное значение $f(x, y)$.

Будем искать решение этой задачи в виде потенциала двойного слоя

$$W(x,y,z) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} v(\xi,\eta)\, d\xi d\eta, \quad R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2.$$

В данном случае

$$\frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} = \frac{z}{R^3} = \frac{z}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

и ядро интегрального уравнения

$$v(P) = \frac{1}{2\pi} f(P),$$

и искомая функция равна

$$u(x,y,z) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2\right]^{3/2}} f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta.$$

Нетрудно показать, что $u(x, y, z)$ равномерно стремится к нулю при $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$, если этим свойством обладает функция f.

Замечание 1. При решении краевых задач для уравнения Лапласа с помощью потенциалов простого и двойного слоя мы пришли к *интегральным уравнениям* Фредгольма второго рода.(50). Условия разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и ограниченной (интегрируемой) правой частью сходны с условиями разрешимости систем линейных алгебраических уравнений (к которым они сводятся, если интеграл заменить интегральной суммой).

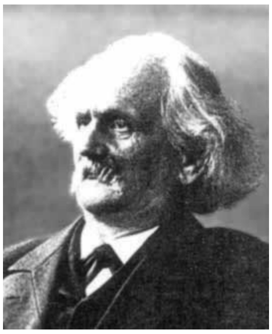
Первая теорема Фредгольма заключается в следующем: неоднородное интегральное уравнение второго рода имеет решение, и притом единственное, если соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение[18].

§ 16. Плоская задача Неймана.

Пусть внутри бесконечного кругового цилиндра радиуса a, ось которого направлена по оси Oz, происходит безвихревое движение несжимаемой жидкости. В этом случае скорость $\mathbf{v}$ является градиентом некоторой скалярной функции u, являющейся потенциалом, которая удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 .$$

Для однозначного определения этой функции с точностью до постоянного слагаемого на поверхности S цилиндра должно быть задано граничное условие



Карл Готфрид Не́йман
1832 - 1925

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\text{íà } S} = f ,$$

где f - функция, заданная во вех точках поверхности S. Эта функция является проекцией скорости $\mathbf{v}$ на внешнюю нормаль к поверхности цилиндра. Рассмотрим случай плоскопараллельного движения жидкости, то есть f не зависит от аппликаты z. Тогда от z не будут зависеть ни скорость $\mathbf{v}$, ни её потенциал u, и уравнение Лапласа запишется в полярной системе координат в виде:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 , \tag{16.1}$$

а граничное условие, наложенное на искомую функцию $u(r,\varphi)$ запишется так:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{r=a} = f(\varphi) , \tag{16.2}$$

где $f(\varphi)$ - заданная кусочно-непрерывная функция от $\varphi(-\pi \le \varphi < \pi)$. Известно, что эта задача может иметь решение только тогда, когда $f(\varphi)$ удовлетворяет следующему дополнительному условию

$$\int_l f(\varphi)\, dl = 0 ,$$

где интеграл берётся по контуру l того круга, по которому цилиндр пересекает плоскость Oxy. Так как элемент дуги круга

$$dl = a \cdot d\varphi ,$$

то последнее условие может быть записано следующим образом:

---

[18] Для кривых с ограниченной кривизной теория Фредгольма применима непосредственно, так как ядро интегрального уравнения непрерывно.

Теория Фредгольма применима также в том случае, когда непрерывно одно из повторных ядер

$$K^{(n+1)}(P_1,P_2) = \iint_{\Sigma} K^{(1)}(P_1,M)K^{(n)}(M,P_2)\, d\sigma_M \, , K^{(1)}(P,M) = K(P,M)$$

Докажем, что если Σ - поверхность Ляпунова, то повторные ядра нашего уравнения, начиная с некоторого номера, непрерывны. Как мы знаем для поверхности Ляпунова $\left|\dfrac{\cos\varphi}{r^2}\right| < \dfrac{C}{r^{2-\delta}}$.

Повторные ядра могут быть представлены в виде

$$\int_l f(\varphi)\cdot a\, d\varphi = 0,$$

но в силу постоянства a получается

$$\int_l f(\varphi)\ d\varphi = 0. \tag{16.3}$$

Если учесть, что искомое решение $u(r,\varphi)$ должно быть 1) ограниченной функцией, 2) периодической функцией от φ:

$$u(r,\varphi + 2\,\pi) = u(r,\varphi),$$

то ясно, что можно получить решение уравнения (16.1) в виде суммы ряда следующего вида:

$$u(r,\varphi) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k \cos k\varphi + B_k r^k \sin k\varphi). \tag{16.4}$$

Остаётся подобрать коэффициенты A_o, A_k, B_k так, чтобы удовлетворить граничному условию (16.2). Для этого требуется найти нормальную производную $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$. Понятно, что в каждой точке на поверхности цилиндра внешняя нормаль направлена по координатной $r-$линии в сторону возрастания r. Поэтому производная по направлению n во всех точках этой поверхности равна частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial r}$. Учитывая это, дифференцируют по r обе части равенства (16.4):

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k\, k\, r^{k-1} \cos k\varphi + B_k k\, r^{k-1} \sin k\varphi),$$

и подставляя $r = a$, получается:

$$f(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k\, k\, a^{k-1} \cos k\varphi + B_k k\, a^{k-1} \sin k\varphi).$$

Получено разложение функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье по общей тригонометрической системе на участке $[-\pi;\pi]$. В этом разложении отсутствует свободный член, так как свободный член вычисляется по формуле $\dfrac{a_o}{2} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\, d\varphi$, а он равен нулю в силу условия (16.3). Остальные коэффициенты легко найти по формулам Фурье:

$$A_k k a^{k-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos k\varphi\, d\varphi,$$

$$B_k k a^{k-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin k\varphi\, d\varphi,$$

откуда получают (заменяя обозначение переменной интегрирования на τ):

$$A_k = \frac{1}{\pi k a^{k-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos k\tau\, d\tau,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi k a^{k-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin k\tau\, d\tau.$$

(16.5)

Подставляя коэффициенты A_k и B_k $(k > 1)$ в равенство (16.4), получают решение в форме суммы ряда. Постоянное слагаемое A_o не определено. Это объясняется самим существом задачи: потенциал $u(r,\varphi)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Ряд (16.4) даёт решение *плоской задачи Неймана* для круга, так как плоскопараллельное течение внутри кругового цилиндра вполне определяется, если известен закон этого течения в каком-либо горизонтальном сечении цилиндра, то есть в круге радиуса a.

Решение задачи Неймана для круга также может быть описано с помощью интеграла, аналогичного интегралу Пуассона. Для этого надо подставить A_k и B_k из формул (16.5) в ряд (16.4):

$$u(r,\varphi) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{r^k\cos k\varphi}{k\,\pi\,a^{k-1}}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos k\tau\,d\tau + \frac{r^k\sin k\varphi}{k\,\pi\,a^{k-1}}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin k\tau\,d\tau\right].$$

Если внести $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ под знак интеграла, объединить подынтегральные выражения и использовать известную тригонометрическую формулу $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$, то можно полученное выражение привести к виду

$$u(r,\varphi) = A_o + \frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{r}{a}\right)^k\cos k(\tau-\varphi)\right]d\tau. \tag{16.6}$$

Обозначим сумму ряда, стоящего в квадратных скобках, через S, отношение $\frac{r}{a}$ - через q, разность $\tau-\varphi$ - через θ. Тогда

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}q^k\cos k\theta. \tag{16.7}$$

Для вычисления суммы этого ряда предварительно продифференцируем его почленно по θ, считая число q постоянным и имеющим значения в пределах $0 \le q < 1$. Такое дифференцирование допустимо, так как ряд, получившийся после почленного дифференцирования, равномерно сходится на любом интервале изменения θ (все его члены по модулю не превосходят членов числового сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$).

Итак,

$$S'_{\theta} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k}\cdot k\cdot\sin k\theta = -\sum_{k=1}^{\infty} q^k\cdot\sin k\theta.$$

Для вычисления суммы последнего ряда достаточно, используя известную формулу Эйлера $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, и замечая что $q^k\cdot\sin k\theta = \mathrm{Im}(q^k\cdot e^{ik\theta})$, представить правую часть в виде:

$$\sum_k q^k\cdot\sin k\theta = \mathrm{Im}\left[\sum_k q^k\cdot e^{ik\theta}\right].$$

В квадратных скобках получилась геометрическая прогрессия, знаменатель которой q меньше единицы, поэтому ряд сходится и его сумма равна $\frac{q\cdot e^{i\theta}}{1-q\cdot e^{i\theta}}$.

Тогда

$$\sum_k q^k\cdot\sin k\theta = \mathrm{Im}\left[\sum_k q^k\cdot e^{ik\theta}\right] = \mathrm{Im}\frac{q\cdot e^{i\theta}}{1-q\cdot e^{i\theta}}.$$

Выполняя преобразование дроби, получают

$$\frac{q\cdot e^{i\theta}\left(1-q\cdot e^{-i\theta}\right)}{\left(1-q\cdot e^{i\theta}\right)\left(1-q\cdot e^{-i\theta}\right)} = \frac{q\cdot e^{i\theta}-q^2}{\left(1-q\cdot(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+q^2\right)} = \frac{q\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)-q^2}{\left(1-2q\cdot\cos\theta+q^2\right)}.$$

Мнимая часть полученного выражения равна

$$\mathrm{Im}\frac{q\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)-q^2}{\left(1-2q\cdot\cos\theta+q^2\right)} = \frac{q\cdot\sin\theta}{\left(1-2q\cdot\cos\theta+q^2\right)}.$$

В результате

$$S'_\theta = -\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot \sin k\theta = -\frac{q \cdot \sin\theta}{\left(1 - 2q \cdot \cos\theta + q^2\right)}.$$

Беря неопределённые интегралы от обеих частей этого равенства, получим

$$S = -\int \frac{q \cdot \sin\theta \, d\,\theta}{\left(1 - 2q \cdot \cos\theta + q^2\right)}. + C = \frac{1}{2}\ln\left(1 - 2q \cdot \cos\theta + q^2\right) + C\,,$$

где произвольная постоянная C не зависит от θ. Возвращаясь к старым обозначениям $q = \frac{r}{a}$ и $\theta = \tau - \varphi$, получим

$$S = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2r}{a} \cdot \cos\theta + \left(\frac{q}{a}\right)^2\right) + C$$

или

$$S = -\frac{1}{2}\ln[a^2 - 2ra\cos(\tau - \varphi) + r^2] + \ln a + C.$$

Подставив это выражение в (16.6), получим функцию $u(r, \varphi)$ в виде интеграла

$$u(r, \varphi) = A_o - \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln[a^2 - 2ra\cos(\tau - \varphi) + r^2]\,d\tau + \frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)(C + \ln a)\,d\tau.$$

Последнее слагаемое равно нулю в силу условия (16.3) . Поэтому окончательно получается

$$u(r, \varphi) = A_o - \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln[a^2 - 2ra\cos(\tau - \varphi) + r^2]\,d\tau. \tag{16.8}$$

Эта формула даёт решение *плоской задачи Неймана* в форме интеграла, зависящего от параметров r и φ. Взяв градиент найденного скалярного поля $u(r, \varphi)$, получим скорость частиц жидкости в каждой точке. Для этого используется формула градиента в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z\,.$$

Производные получаются дифференцированием интеграла(16.8) по параметрам r и φ.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{-2r + 2ra\cos(\tau - \varphi)}{a^2 - 2ra\cos(\tau - \varphi) + r^2}]\,d\tau;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{2ra\cos(\tau - \varphi)}{a^2 - 2ra\cos(\tau - \varphi) + r^2}]\,d\tau.$$

Учитывая, что в плоской задаче производная по z равна нулю, окончательно получаем выражение

$$v = \operatorname{grad} u = \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{-2r + 2ra\cos(\tau - \varphi)}{a^2 - 2ra\cos(\tau - \varphi) + r^2}]\,d\tau \cdot \mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{2ra\cos(\tau - \varphi)}{a^2 - 2ra\cos(\tau - \varphi) + r^2}]\,d\tau \cdot \mathbf{e}_\varphi,$$

и окончательный ответ получается в виде:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} u = \frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{[-r + ra\cos(\tau - \varphi)] \cdot \mathbf{e}_r + ra\cos(\tau - \varphi) \cdot \mathbf{e}_\varphi}{a^2 - 2ra\cos(\tau - \varphi) + r^2}]\,d\tau \cdot \tag{16.9}$$

§ 17. Метод Даламбера

Решение уравнения колебаний бесконечной струны методом характеристик. Пусть дана струна столь длинная, что её практически можно считать бесконечной. Пусть на эту струну не действуют никакие внешние силы. В этом случае закон колебаний струны задаётся уравнением:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{17.1}$$

Жан Лерон Д'Аламбер
1717 - 1783

и начальными условиями

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{17.2}$$

$$u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x), \tag{17.3}$$

где $\varphi(x)$ - начальное отклонение, а $\psi(x)$ - начальная скорость. Эти функции должны быть заданы для всех x на интервале $-\infty < x < \infty$. Задавать граничные условия здесь не имеет смысла, так как струна безгранична.

Уравнение колебаний струны называется уравнением гиперболического типа. Составим его характеристическое уравнение

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0.$$

Следовательно, для приведения уравнения колебаний струны к каноническому виду необходимо сделать замену переменных:

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Для того, чтобы осуществить эту замену, надо выразить u_{xx} и u_{tt} через производные от u по ξ и η:

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_t = -a u_\xi + a u_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xtt} = a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta}.$$

Подставляя в уравнение (17.1), после сокращения получим:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Таким образом, уравнение (17.1) приведено к каноническому виду. Для решения этого канонического уравнения перепишем его следующим образом:

$$(u_\xi)_\eta = 0.$$

Так как производная по η равна нулю, то u_ξ не зависит от η, и, следовательно, u_ξ зависит только от ξ. Интегрируя по ξ, получим:

$$u = \int f(\xi)\, d\xi + C,$$

где C – величина не зависящая от ξ. Однако C может зависеть от η, поэтому её можно обозначить как $C = F(\eta)$, где $F(\eta)$ совершенно произвольная функция одного переменного. С другой стороны в силу произвольности функции $f(\xi)$ её неопределённый интеграл также является произвольной функцией от ξ. Обозначим его $\Phi(\xi)$. Тогда

$$u = \Phi(\xi) + F(\eta) \tag{17.4}$$

или, если вернуться к старым обозначениям, то

$$u = \Phi(x - at) + F(x + at). \tag{17.5}$$

Это общее решение колебаний струны. Для того, чтобы найти функции Φ и F и тем самым найти закон колебаний длинной струны, необходимо использовать начальные условия. Из условия (17.2) следует

$$\Phi(\xi) + F(\eta) = \varphi(x). \tag{17.6}$$

Для применения условий (17.2) и (17.3), продифференцируем обе части равенства (17.4) по t. Тогда получим

$$u_t(x,t) == \Phi'(x - at)\cdot(-a) + F'(x + at)\cdot a.$$

Здесь получаются производные F' и Φ' как производные сложных функций одного переменного по своему аргументу. Подставив теперь $t = 0$ в полученное равенство, получим по условию (17.3):

$$-a\,\Phi' + a\,F' = \psi(x).$$

Это равенство справедливо для всех x. Интегрируя его в пределах от 0 до x, получим:

$$-a[\Phi(x) - \Phi(0)] + a[F(x) - F(0) = \int_0^x \psi(x)\,dx$$

или, если обозначить $F(0) + \Phi(0)$ через C, то

$$-a\ \Phi(x) + a\ F(x) = \int_0^x \psi(x)\,dx + a\,C.$$

Решая полученное уравнение совместно с ранее найденным уравнением (17.6), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi(\xi) + F(\eta) = \varphi(x), \\ -a\ \Phi(x) + a\ F(x) = \int_0^x \psi(x)\,dx + a\,C. \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz - \frac{C}{2}, \\ F(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz + \frac{C}{2}. \end{aligned} \right\} \tag{17.7}$$

Хотя здесь имеется некоторая неопределённость с константой C, это не помешает найти функцию $u(x,t)$. Равенства (17.7) справедливы каким бы ни было вещественное число x. Они остаются в силе и в том случае, если вместо x подставить, например, $(x - at)$ или $(x + at)$, так как $(x \pm at)$ тоже является вещественным числом при любых x и t. Поэтому можно записать

$$\Phi(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(z)dz - \frac{C}{2}, \tag{17.8}$$

$$F(x + at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(z)dz + \frac{C}{2}. \tag{17.9}$$

Складывая почленно равенства (17.8) и (17.9), получим искомую функцию $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(z)dz - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(z)dz$$

и запишем закон колебаний бесконечной струны в виде

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz. \tag{17.10}$$

Геометрический смысл выражения $u(x,t) = \Phi(x - at) + F(x + at)$

Функция рассматриваемая как функция двух переменных x и t, имеет в качестве линий уровня на плоскости Oxy прямые линии $x - at = Const$. Иными словами линии равного уровня являются **характеристики** данного уравнения. Для того, чтобы найти значение функции $\Phi(x - at)$ в точке (x_o, t_o) достаточно провести линию уровня

$$x - a\,t = Const$$

через эту точку и найти пересечение этой линии с осью $t=0$. Пусть это будет точка $(x_1,0)$ на рисунке 25. Тогда

$$\Phi(x_o - a\,t_o) = \Phi(x_1 - a\cdot 0) = \Phi(x_1).$$

Итак, значение функции $\Phi(x,t)$ в точке (x_o,t_o) равно $\Phi(x_1)$. Аналогичные рассуждения применимы и к функции $F(x+at)$. Её линиями уровня служат характеристики - уравнения прямых $x + a\,t = Const$. Значение функции $F(x+at)$ в точке (x_o,t_o) равно значению этой же функции в точке $(x_2,0)$, где $(x_2,0)$ - точка пересечения линии уровня, проходящей через точку (x_o,t_o) с осью Ox. Поэтому

$$F(x_o + a\,t_o) = F(x_2 + a\cdot 0) = F(x_2).$$

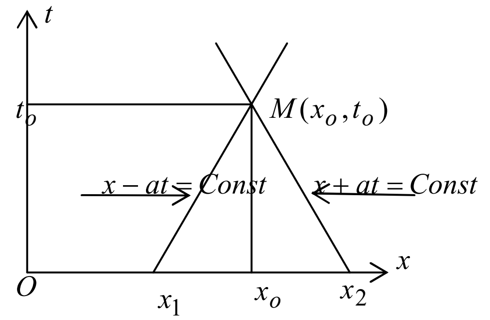


Рис. 25.

Теперь для того, чтобы найти значение функции $u(x,t)$ в точке (x_o,t_o), то есть, для того, чтобы найти величину отклонения струны в точке x_o в момент t_o достаточно провести через точку (x_o,t_o) на плоскости Oxt две характеристики $x - a\,t = Const$ и $x + a\,t = Const$. Если они пересекают ось Ox соответственно в точках x_1 и x_2, то значение $u(x_o,t_o)$ равно сумме значений функции Φ в точке x_1 и функции F в точке x_2 (рис. 25).

Пример. Рассмотрим бесконечную струну, у которой начальное отклонение равно нулю, а начальная скорость равна υ_o на участке $\alpha < x < \beta$ и нулю вне этого участка. Тогда решение запишется следующим образом:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz,$$

где

$$\psi(z) = \begin{cases} \upsilon_o & \alpha < z < \beta, \\ 0 & z \le \alpha, \quad z \ge \beta. \end{cases}$$

Если через $\Psi(z)$ обозначить какую-нибудь первообразную от функции $\dfrac{\psi(z)}{2a}$, то отклонение $u(x,t)$ можно представить следующим образом:

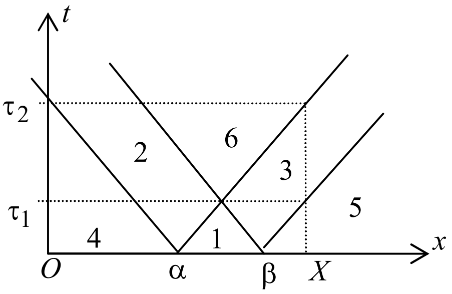


Рис. 26.

$$u(x,t) = \Psi(x+at) - \Psi(x-at).$$

В данном случае верхняя полуплоскость плоскости Oxt снова естественным образом разбивается на 6 областей (рис. 26). При этом четвёртая и пятая области соответствуют точкам, для которых отклонение равно нулю; в шестой области отклонение также постоянно, но отлично от нуля. Оно равно

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \upsilon_o\,d\,t = \frac{\upsilon_o(\beta-\alpha)}{2a}.$$

Если проследить, чему равно отклонение в различные моменты времени, например в точке X (рис. 30.2), то можно заметить, что на участке $0 < t < \tau_1$, отклонение в точке X равно нулю за период времени от τ_1 до τ_2 отклонение будет нарастать и, начиная с времени τ_2 отклонение в точке X остаётся неизменным, равным

$$\frac{\upsilon_o(\beta-\alpha)}{2a}.$$

Это, так называемая, *остаточная деформация* струны в точке X.

§ 31. Энергия электростатического поля

Электрическое поле определяется потенциальным вектором

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{18.1}$$

Если поле происходит от одного заряда $\boldsymbol{e}$, находящегося в начале координат, то

$$\varphi = \frac{e}{r}. \tag{18.2}$$

Сила, действующая на заряд e_1, равна

$$\mathbf{F} = e_1\mathbf{E} = -e_1 \operatorname{grad}\frac{e}{r}. \tag{18.3}$$

Подсчитаем ту работу, которую надо затратить, чтобы перенести заряд e_1 из бесконечности в данное положение $M(\mathbf{r})$. Эта работа будет равна той работе, которую совершает сила $\mathbf{F}$ на перемещение заряда из точки M в бесконечность:

$$W = \int_M^\infty \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_M^\infty \operatorname{grad}\frac{e}{r}\cdot d\mathbf{r} = -e_1\int_M^\infty d\left(\frac{e}{r}\right) = -\frac{e_1 e}{r}. \tag{18.4}$$

Полученную величину можно назвать *потенциальной энергией системы двух зарядов.*

Пусть теперь имеем систему n зарядов $e_1, e_2, ..., e_n$, находящихся в точках $M_1, M_2, ..., M_n$, и пусть r_{ik} означает расстояние между точками M_i и M_k. Тогда мы получим потенциальную энергию системы этих зарядов, образовав всевозможные произведения

$$\frac{e_i e_k}{r_{\mathrm{ik}}},$$

и, взяв их сумму, получим:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{e_i e_k}{r_{\mathrm{ik}}}, \tag{18.5}$$

причём коэффициент $\frac{1}{2}$ нужно взять потому, что каждая комбинация значков i и k встречается дважды. В рассматриваемом случае мы имеем для потенциала выражение

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n}\frac{e_k}{r_{\mathrm{k}}}, \tag{18.6}$$

где r_k - расстояние переменной точки M_k до точки M. В частности мы имеем, что

$$\varphi_i = \varphi(M_i) = \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{e_k}{r_{\mathrm{ik}}} \tag{18.7}$$

- значение в точке M_i потенциала, происходящего от всех остальных зарядов (штрих у суммы показывает, что нужно пропустить при суммировании значение $i = k$). Так как

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i\left(\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{e_k}{r_{\mathrm{ik}}}\right),$$

то получаем, что

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i\varphi_i. \tag{18.8}$$

Допустим теперь, что мы имеем непрерывное распределение зарядов по некоторому объёму V. Если объёмная плотность зарядов есть ρ, то в элементе объёма dV будет находиться заряд $\rho\, dV$. Обозначая соответствующее значение потенциала через φ, получим вместо (18.8) формулу

$$W=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V}\rho\varphi\, dV\,, \tag{18.9}$$

определяющую потенциальную энергию заданного поля зарядов.

Так как вне объёма V плотность электрических зарядов $\rho=0$, то можно также записать

$$W=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V_1}\rho\varphi\, dV\,, \tag{18.10}$$

где V_1 - любой объём, охватывающий V.

Вычислим поток вектора $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$ через некоторую замкнутую поверхность S. По теореме Гаусса – Остроградского этот поток равен

$$\oiint\limits_{S} E_n dS=\iiint\limits_{V}\operatorname{div}\mathbf{E}\, dV\,. \tag{18.11}$$

В случае электростатического поля, создаваемого зарядами $e_1, e_2, ..., e_n$, находящимися в точках $M_1, M_2, ..., M_n$, потенциал имеет выражение (18.6)

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n}\frac{e_k}{r_\text{k}}=\frac{e_1}{r_1}+\frac{e_2}{r_2}+...+\frac{e_n}{r_\text{n}}\,.$$

Следовательно, в этом случае

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\left(\frac{e_1}{r_1}+\frac{e_2}{r_2}+...+\frac{e_n}{r_\text{n}}\right). \tag{18.12}$$

Сравним это выражение с выражением для потенциального поля источников

$$\mathbf{a}(\mathbf{r})=\operatorname{grad}\left(-\frac{e_1}{4\pi r_1}-\frac{e_2}{4\pi r_2}-...-\frac{e_n}{4\pi r_\text{n}}\right) \tag{18.13}$$

($\mathbf{r}$ - радиус –вектор каждой точки) и примем во внимание, что поток вектора $\mathbf{a}$ через S равен сумме обильностей всех источников, которые лежат внутри S

$$\oiint\limits_{S} a_n dS=\sum{}' e_i\,, \tag{18.14}$$

где сумма распространяется на те источники, которые лежат внутри S. Тогда можно написать, что

$$\oiint\limits_{S} E_n dS=4\pi\sum{}' e_i\,, \tag{18.15}$$

где сумма распространяется на те заряды, которые лежат внутри S. Представим теперь себе заряды, непрерывно распределённые в пространстве, и пусть ρ означает плотность этих зарядов, тогда в элементе dV будет находиться $\rho\, dV$ зарядов, а внутри поверхности S будет иметься

$$\iiint\limits_{V}\rho\, dV$$

зарядов. В этом случае формула (14) должна быть заменена следующей

$$\oiint\limits_{S} E_n dS=4\pi\iiint\limits_{V}\rho\, dV\,. \tag{18.16}$$

Сравнивая её с формулой $\oiint\limits_{S} E_n dS=\iiint\limits_{V}\operatorname{div}\mathbf{E}\, dV$, мы видим, что можно принять

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \mathbf{4}\pi\rho, \tag{18.17}$$

т. е. расхождение вектора электрической силы можно трактовать как умноженную на 4π *плотность зарядов, непрерывно распределённых в пространстве.* Так как

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\Delta\varphi, \tag{18.18}$$

то

$$\Delta\varphi = -\mathbf{4}\pi\rho. \tag{18.19}$$

Это *уравнение Пуассона.* Отсюда плотность электрических зарядов определяется равенством $\Delta\varphi = -\mathbf{4}\pi\rho$, поэтому, выражая потенциальную энергию W через значение φ, будем иметь в силу формулы (18.10)

$$W = -\frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{V_1}\varphi\Delta\varphi\, dV. \tag{18.20}$$

Теперь воспользуемся выражением

$$\iiint\limits_{V}\left(\varphi\,\Delta\varphi + (\operatorname{grad}\varphi)^2\right)dV = \oiint\limits_{S}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS\ [19], \tag{18.21}$$

в результате чего получим

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{V_1}(\operatorname{grad}\varphi)^2\, dV = \frac{1}{8\pi}\oiint\limits_{S_1}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS, \tag{18.22}$$

где S_1 - поверхность, ограничивающая V_1. Возьмём за S_1 сферу весьма большого радиуса R, который мы будем затем стремить к бесконечности, и заметим, что если все заряды находятся на конечном расстоянии, то для φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ мы получаем оценки (показано в книге Кочина)

$$|\varphi| < \frac{A}{R}, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| < \frac{B}{R^2},$$

где A и B - постоянные числа. Поэтому, так как величина сферы S_1 равна $4\pi R^2$, мы имеем

$$\left|\oiint\limits_{S_1}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS\right| < \frac{A}{R}\cdot\frac{B}{R^2}4\pi R^2 = \frac{4\pi AB}{R}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\oiint\limits_{S_1}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS = 0.$$

И тогда из формулы (18.22) вытекает, что

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{V_1}(\operatorname{grad}\varphi)^2\, dV = \frac{1}{8\pi}\oiint\limits_{S_1}E^2\, dS, \tag{18.23}$$

где интегралы берутся по всему бесконечному пространству.

Полученный результат мы можем истолковать следующим образом: **в** *электростатическом поле энергия распространяется по всему пространству, причём на каждую единицу объёма приходится количество энергии, равное*

$$\frac{1}{8\pi}E^2 = \frac{1}{8\pi}(\operatorname{grad}\varphi)^2. \tag{18.24}$$

---

[19] Вывод см. в Приложениях 1 и 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. Наука. 1972.
2. Джеффрис Г., Свирлс Б Методы математической физики. Вып. 1, 2, 3, М. Мир. 1960 - 1970. 424+352+344 с.
3. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М. Наука. 1971.
4. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. М. Наука. 1973.
5. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М. Высшая школа. 1972.
6. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М. Наука. 1969.
7. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М. Наука, 1984.
8. Сборник задач по уравнениям математической физики. Под ред. В.С. Владимирова. М. Наука. 1982.
9. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М. Наука. 1972.
10. Белов В.В., Воробьев Е.М. Сборник задач по дополнительным главам математической физики. М. Высшая школа. 1978.
11. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. Наука. 1977.
12. Михлин С.Г. Курс математической физики. М. Наука. 1968.
12. Очан Ю.С. Методы математической физики.- Изд. Высшая школа.- 1965 г.- 384 с.
13. Michell, J.H. 1898 The wave resistance of a ship. *Philosophical Magazine.-Ser. 5*, **45**, 106-123. (http://www.shipdesign.ru/Gotman).
14. Готман А.Ш. История определения сопротивления воды движению судов.- http://www.shipdesign.ru/Gotman .
15. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1881. – 512 с.
16. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. – М.: ГИТТЛ, 1951.- 476 +544 с.
17. Будак Б.М.., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. «Наука», 1985б стр. 442.
18. Кочин, Н.Е., Кибель, И.А., Розе, Н.В. 1963 Теоретическая гидромеханика. ГИФ-МЛ, Часть 1 584 стр. и часть 2. 728 стр.