ЧАСТЬ 2. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ВВЕДЕНИЕ

Математический анализ, без которого невозможно развитие механики и техники, основан на определениях функции и предела. Все основные понятия математического анализа являются пределами функций: непрерывность функции, производная, определённый интеграл, кратные и криволинейные интегралы, функция и плотность распределения случайной величины и т.д..

Точная формулировка предела и бесконечно малой величины принадлежат Огюстену Коши. Ещё пифагорейцы понимали, что существуют бесконечно малые величины, но в течение почти двух тысячелетий шли споры о сущности этого понятия (это нуль или не нуль?). И только точное определение понятия *предела* позволило, наконец, положить конец теологическим спорам по этому поводу.

Исаак Ньютон получал *производные* (он называл их флюксиями), не имея понятия производной как предела, поэтому у него был очень громоздкий алгоритм получения производной. И только, когда появилось обозначение производной не только в виде y', но и через дифференциалы dy/dx, появился современный математический аппарат для вывода формул и вычисления производных.

Для того, чтобы читать серьёзную техническую литературу, понимая структуру формул, необходимо знать, что такое *предел*.

Понятие *функции* тоже очень непростое. Существуют разные определения, но мы используем определение функции, данное Лобачевским.

Очень важным является вопрос о *непрерывности.* Чёткого определения и понимания непрерывности функции не существовало, пока не было чёткого определения предела.

Раздел математики, в котором излагаются все перечисленные понятия, обычно называется «*введением в математический анализ*».

В этом учебном пособии, в отличие от стандартного учебника, излагаются только фундаментальные понятия и их основные свойства. Математика – это не формулы, а методы решения физических или геометрических задач. Основные задачи для развития математики возникали и возникают при решении задач мореплавания, ядерной физики, радиотехники, судостроения и других технических дисциплин.

Одним из самых первых фундаментальных понятий высшей математики является понятие функции. Первая функциональная зависимость была введена вавилонянами 4-5 тысяч лет тому назад, когда была замечена связь между радиусом и длиной окружности. В 17 веке, когда появилось понятие переменной величины, точное определение функции стало особенно важным. Путь к определению функции заложили Ф.Виет и Р. Декарт. Определения функции давали Лейбниц, Бернулли, Лагранж, Фурье, Ньютон и др.. Все они понимали под функцией аналитическую зависимость. Более широкое понятие функции дал Л.Эйлер. Идея *соответствия* в определении функции была введена Н.И. Лобачевским в 1834 году. Именно его определение и используется в настоящее время.

Николай Иванович Лобачевский 1792 - 1856

Определение функции (по Лобачевскому)

Одним из самых первых фундаментальных понятий высшей математики является понятие функции. Логичное и строгое определение функции было дано Лобачевским.

Определение Лобачевского. Пусть даны два множества: множество $\{X\}$ и множество $\{Y\}$. И пусть задан закон, по которому каждому значению из множества $\{X\}$ соответствует одно и только одно значение множества $\{Y\}$. Тогда говорят, что y *является функцией* x, и записывают это в виде $y = f(x)$ (рис. 1).

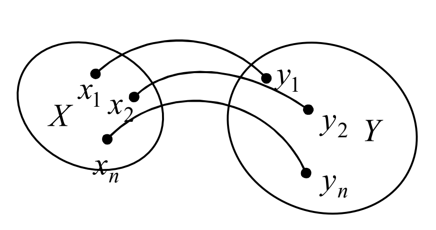

Рис. 1

Множество $\{X\}$ - это область *определения* функции. Множество $\{Y\}$ - это область *изменения* функции. f - *характеристика* функции. Например, $y = \sin x$.

Область *определения* $-\infty < x < \infty$. Область *изменения* $-1 \le y \le 1$. *Характеристика* - синусоидальный закон зависимости y от x.

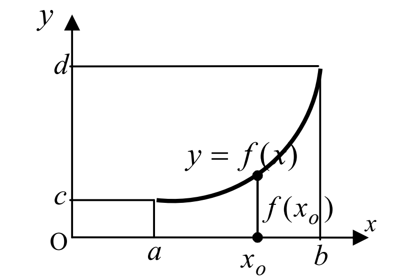

Рис. 2

Если пространство двумерное, то можно построить график функции $y = f(x)$, используя декартову систему координат[1]. *Область определения* функции представляет собой отрезок $[a,b]$ оси x, а *область изменения* функции – это отрезок $[c,d]$ на оси y.

Говорят, что функция *задана в точке* x_o, когда вычисляют её значение по формуле $y = f(x_o)$ (рис. 2)

Огюстен Луи Коши
1789 - 1857

§ 1. Предел функции

Предел функции может быть найден в точке x_o и на бесконечности $-\infty < x < \infty$. В этом случае определения предела имеют принципиальные отличия.

1. Предел функции в точке (по Коши)

Определение 1. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_o, если для любого наперёд заданного сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что при выполнении неравенства $|x - x_o| < \delta$ выполняется условие $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 3). Это записывается так:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = A. \tag{1.1}$$

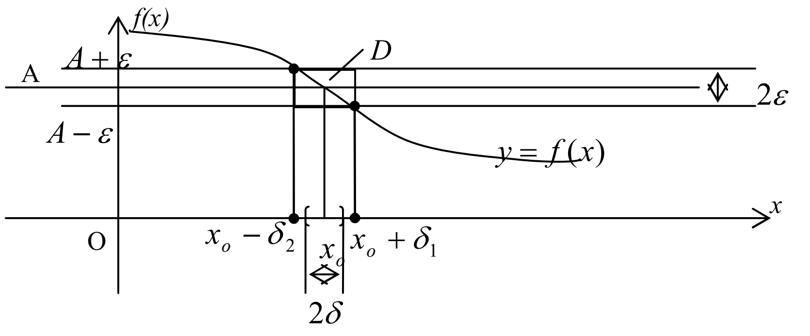

Рис. 3

[1] Система координат называется декартовой, потому что Декарт считается первым, кто связал число с точкой на прямой линии.

Замечание 1. Практически два условия $|x - x_o| < \delta$ и $|f(x) - A| < \varepsilon$ определяют стремление функции $f(x)$ к пределу A, когда x стремится к x_o (рис. 1.3). Если задать меньшее значение ε, то соответствующее δ тоже станет меньше, а, следовательно, прямоугольник D тоже станет меньше. И пределом уменьшения этого прямоугольника будет точка с координатами (x_o, A). Следует помнить, что при этом невозможно достичь этой предельной точки, потому что неравенства $|x - x_o| < \delta$ и $|f(x) - A| < \varepsilon$ должны выполняться, как бы ни уменьшались значения ε и δ.

Замечание 2. Определение 1 позволило, наконец, дать строгое и логичное определение *бесконечно малой функции.*

Определение 2. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой в точке* x_o, если для любого наперёд заданного сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что при выполнении неравенства $|x - x_o| < \delta$ выполняется условие $|\alpha(x)| < \varepsilon$ (рис. 4). Это записывается так:

$$\lim_{x \to x_o} \alpha(x) = 0 . \tag{1.2}$$

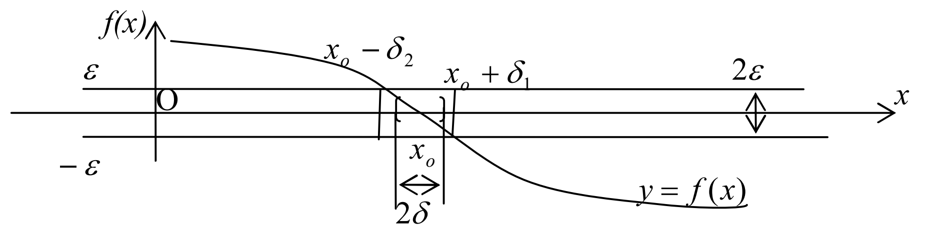

Рис.4

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой в точке* x_o, если для любого наперёд заданного сколь угодно большого положительного числа M можно указать такое положительное число δ, что при выполнении неравенства $|x - x_o| < \delta$ выполняется условие $|f(x)| > M$ (рис. 5). Это записывается так:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \infty . \tag{1.3}$$

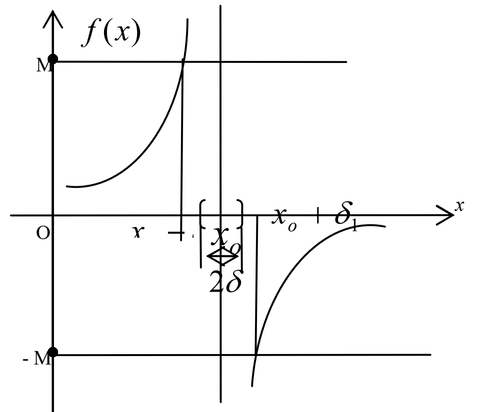

Рис. 5

2. Предел функции на бесконечности

Замечание 3. Как видно из определения пределов функции в точке, для существования предела необходимо выполнение двух неравенств. Но в зависимости от вида предела эти неравенства в каждом случае свои.

Если точка x_o уходит на бесконечность, то невозможно выделить её окрестность $(x_o - \delta, x_o - \delta)$, как в случае предела функции в точке. В связи с этим неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$, $|\alpha(x)| < \varepsilon$ и $|f(x)| > M$ сохраняются, но они все выполняется при условии $|x| > N$.

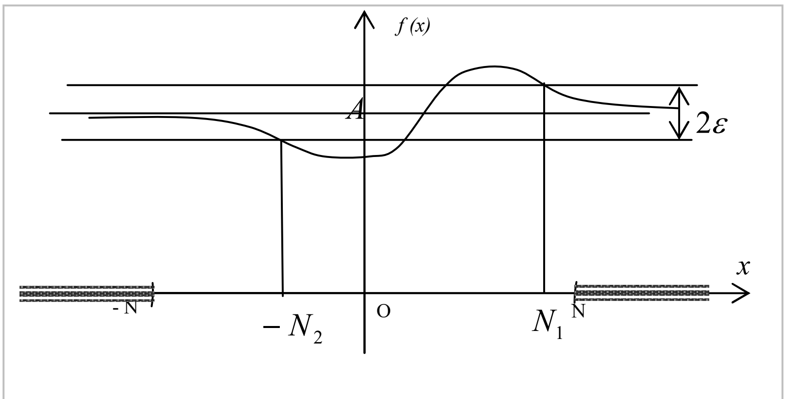

Рис. 6

Определение 4. Число А называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого наперёд заданного сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое положительное число N, что при выполнении неравенства $|x| > N$ выполняется условие $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис.6). Это записывается так:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A. \tag{1.4}$$

Определение 5. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to \infty$, если для любого наперёд заданного сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое положительное число N, что при выполнении неравенства $|x| > N$ выполняется условие $|\alpha(x)| < \varepsilon$ (рис. 7). Это записывается так:

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0. \tag{1.5}$$

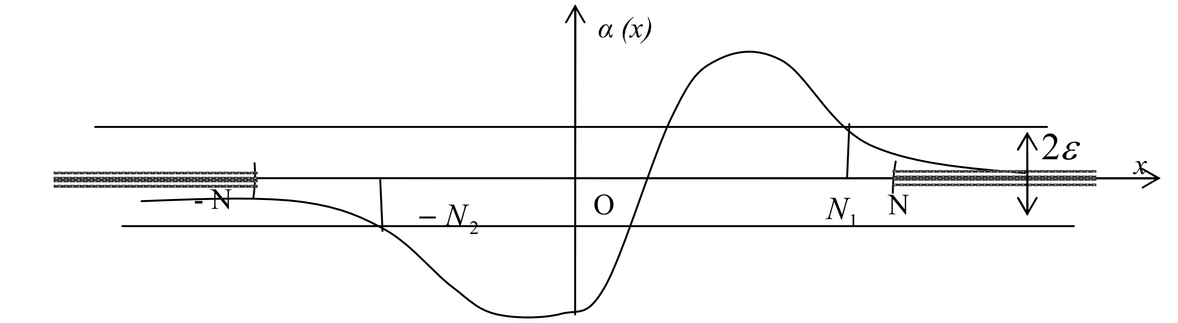

Рис. 7

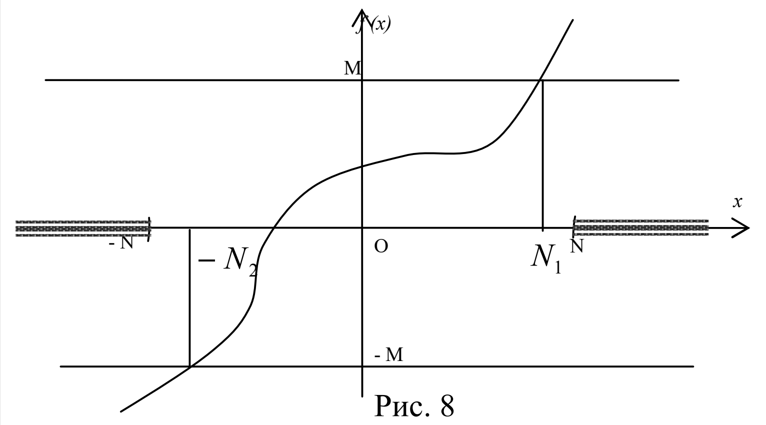

Рис. 8

Определение 6. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to \infty$, если для любого наперёд заданного сколь угодно большого положительного числа M можно указать такое положительное число N, что при выполнении неравенства $|x| > N$ выполняется условие $|f(x)| > M$ (рис. 8). Это записывается так:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty. \tag{1.6}$$

3. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Замечание 4. Отношение $\frac{\sin x}{x}$ при x = 0 даёт отношение $\frac{0}{0}$, которое представляет собой неопределённость. .Для того, чтобы найти предел этого отношения при $x\to 0$ рассмотрим окружность радиуса R (рис. 9) . Центральный угол MOB обозначим буквой x, который меняется при этом в диапазоне $0<x<\pi/2$. Из рисунка следует, что площадь ΔMOA меньше площади сектора MOA и меньше площади ΔCOA.

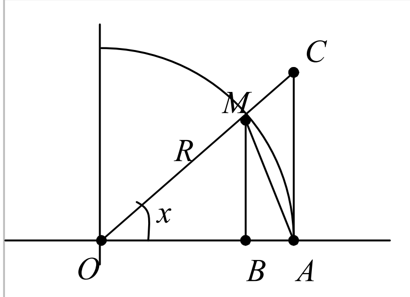

Рис. 9

Площадь треугольника ΔMOA равна

$$\frac{1}{2}OA\cdot MB=\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin x$$

Площадь сектора MOA равна $\frac{1}{2}R^2\cdot x$.

Площадь треугольника ΔCOA равна $\frac{1}{2}OA\cdot AC=\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\operatorname{tg}x$

Отсюда получается известное важное соотношение

$$\frac{R^2}{2}\sin x<\frac{R^2}{2}x<\frac{R^2}{2}\operatorname{tg}x$$

Отсюда мы получаем очень важное неравенство

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x \tag{1.7}$$

Преобразуем это неравенство, разделив на $\sin x$ и получим

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

Отсюда можно получить

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

Принимая пределы

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1 \text{ и } \lim_{x\to 0}1=1$$

По теореме Гурьева о двух милиционерах: *если между тремя функциями справедливо неравенство*

$$u(x)<\varphi(x)<\upsilon(x)$$

и при $x\to x_o$ функции $u(x)$ и $\upsilon(x)$ стремятся к одному и тому же пределу A, то и $\varphi(x)$ стремится к A. То есть, если $\lim\limits_{x\to x_o}u(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_o}\upsilon(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to x_o}\varphi(x)=A$

получим, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\text{, ч.т.д.} \tag{1.8}$$

Замечание 5. Это равенство справедливо для непрерывной функции $u(x)$. Можно записать первый замечательный предел в виде

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1 \tag{1.9}$$

Пример 1 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

Для решения нужно привести это выражение к формуле (3), приняв за $u(x)=3x$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cdot\sin 3x}{3x} = 3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3$, откуда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x} = 3$.

Джон Непер
1550 - 1617

4. Второй замечательный предел

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left[1+\frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)} (1^{\infty}) = e. \qquad (1.10)$$

Замечание 6. Совершенно очевидно, что здесь под знаком предела имеется неопределённость вида 1^{∞}.

Здесь не приводится вывод второго замечательного предела, но следует вспомнить, что по определению число e (неперово число) является основанием натуральных логарифмов и по определению равно пределу вида

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^{n} = e.$$

Второй замечательный предел можно записать в более удобном для вычисления пределов виде

$$\lim_{\varphi(x)\to 0}\left[1+\varphi(x)\right]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e. \qquad (1.11)$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cos x\right]^{\frac{1}{\sin x}}$.

Решение. Сделаем преобразование

$$\lim_{x\to 0}\left[\cos x\right]^{\frac{1}{\sin x}} \left(1^{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\left[1+\cos x-1\right]^{\frac{1}{\sin x}}.$$

Учтём, что $\left[\cos x-1\right] = -\left[1-\cos x\right] = -2\sin^2\dfrac{x}{2}$, вспомнив формулы косинуса двойного угла $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ и $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\left[\cos x\right]^{\frac{1}{\sin x}}\left(1^{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\left[1-2\sin^2\frac{x}{2}\right]^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left[1-2\sin^2\frac{x}{2}\right]^{\left(\frac{-1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)\cdot\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sin x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\left[1-2\sin^2\frac{x}{2}\right]^{\left(\frac{-1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)}\right\}^{-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sin x}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0} 2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sin x}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = e^{0} = 1,$$

где учтено, что $2\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin x} = 2\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}[1+x]^{\frac{2}{x}}$. Ответ: e^2.

Замечание 7. Так как предел является числом, то для него справедливы все арифметические действия. Например, предел суммы равен сумме пределов, постоянный множитель можно выносить за знак предела и т.д.
Из всех теорем о пределах здесь приводится, так называемая, «*теорема о связи*».

5. Теорема о связи предела и бесконечно малой функции

Для того, чтобы число А было переделом функции $f(x)$ в точке x_o, необходимо и достаточно, чтобы эту функцию можно было представить в виде суммы предела А и бесконечно малой функции $\alpha(x)$ *в этой точке* (рис. 10).

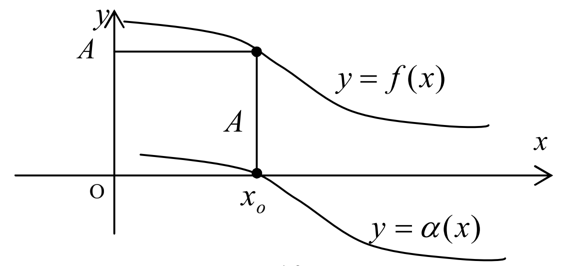

Рис. 10

Д о к а з а т е л ь с т в о *необходимости***:** пусть число А является пределом функции $f(x)$ в точке x_o, то есть, дано, что $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = A$. В этом случае по *определению* 1 конечного предела в точке x_o справедливы два неравенства

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$
$$|x - x_o| < \delta.$$

Введём обозначение $f(x) - A = \alpha(x)$. Тогда получаются такие неравенства:

$$|\alpha(x)| < \varepsilon,$$
$$|x - x_o| < \delta.$$

По *определению предела* 2 выполнение этих двух неравенств доказывает, что $\alpha(x)$ является *бесконечно малой функцией в точке* x_o. Однако из введённого нами равенства $f(x) - A = \alpha(x)$ следует, что

$$f(x) = A + \alpha(x), \tag{1.12}$$

то есть, если А является пределом функции $f(x)$ в точке x_o, тогда эта функция равна *сумме предела и бесконечно малой, ч.т.д.*
Д о к а з а т е л ь с т в о *достаточности*: Пусть дано, что функция равна сумме предела А и бесконечно малой $\alpha(x)$, то есть выполняется равенство $f(x) = A + \alpha(x)$ в точке x_o.
По определению бесконечно малой функции должны выполняться два неравенства

$$|\alpha(x)| < \varepsilon,$$
$$|x - x_o| < \delta.$$

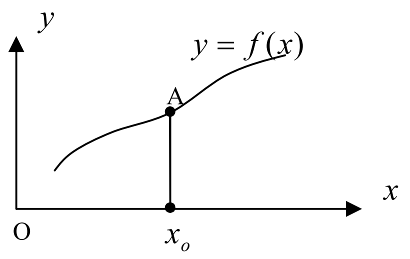

Рис. 11

Но $\alpha(x) = f(x) - A$. Отсюда следует, что выполняются два неравенства

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$
$$|x - x_o| < \delta.$$

Однако по *определению предела* 1 при выполнении таких двух неравенств число А является пределом функции $f(x)$ в точке x_o, ч.т.д.

Замечание 8. Имея определение предела функции в точке и определение бесконечно малой, можно сформулировать определение непрерывности функции в точке и на отрезке.

§ 2. Непрерывность функции в точке

Из рисунка 2.1 видно, что график функции проходит через точку А непрерывным образом. (нет скачка и нет бесконечного разрыва). Стоит вопрос: «Как математически отразить непрерывность функции в точке x_o?»
Существуют три определения непрерывности функции в точке.

1. Первое определение непрерывности: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_o, если она отвечает следующим трём условиям:

1. Функция $f(x_o)\ \exists, <\infty$, то есть функция в этой точке существует $(\exists)$ и конечна $(<\infty)$,
2. Предел функции $y = f(x)$ в точке x_o существует и конечен, то есть $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\ \exists, <\infty$,
3. Предел функции в точке x_o равен значению функции в этой точке
   $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$

2. Определение приращения функции Δy.
Приращением Δy функции $y = f(x)$ в точке x_o называется выражение

$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o). \qquad (1.13)$$

Приращение функции показано на рис.12.

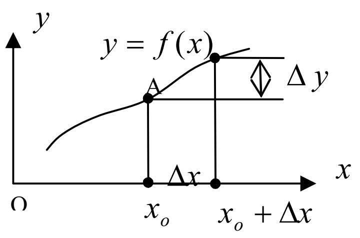

Рис. 12

3. Второе определение непрерывности: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_o, если *бесконечно малому приращению аргумента x отвечает бесконечно малое приращение функции*, то есть

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0. \qquad (1.14)$$

Легко видеть, что на рис. 11 в точке x_o второе определение непрерывности выполняется. а на рис. 13 показан случай, когда условие непрерывности не выполняется, то есть, видно, что приращение $\Delta y \neq 0$, а равно скачку $\Delta y = h$, то есть, второе определение непрерывности нарушается. Второе определение непрерывности нарушается также, когда на кривой есть бесконечный разрыв (рис. 14).

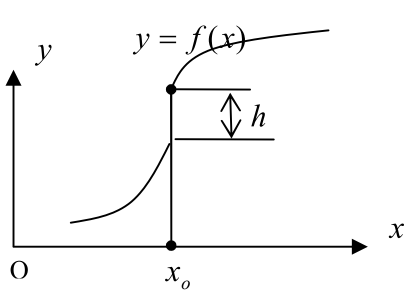

Рис. 13

4. Третье определение непрерывности функции в точке x_o

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_o, если она отвечает следующим четырём условиям:

1 Функция $f(x_o)\ \exists, <\infty$, то есть функция в этой точке существует $(\exists)$ и конечна $(<\infty)$,

2 Предел функции $y = f(x)$ слева от точки x_o существует и конечен, то есть
$\lim\limits_{x\to x_o - 0} f(x)\quad \exists, <\infty$,

3 Предел функции $y = f(x)$ справа от точки x_o существует и конечен, то есть
$\lim\limits_{x\to x_o + 0} f(x)\quad \exists, <\infty$,

4 Предел функции слева равен пределу функции справа от точки x_o и ни равны значению функции в этой точке
$\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x) = f(x_o)$

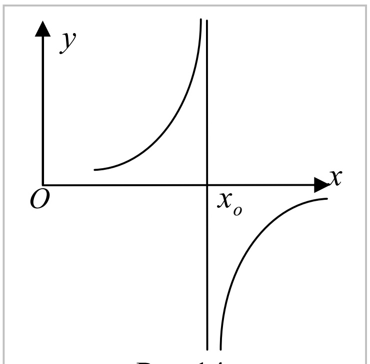

Рис.14

5. Виды нарушения непрерывности функции в точке (типы разрывов)

1 тип – это разрыв типа *скачка* (рис. 12). В случае скачка *не выполняются первое* и *четвёртое* условия непрерывности в определении 3, а также *не выполняется второе определение* непрерывности.
2 тип – это *бесконечный разрыв* (рис. 14). В случае бесконечного разрыва *нарушаются все* пункты первого, второго и третьего определений непрерывности.
Определение 4 Функция $f(x)$ называется *непрерывной на заданном отрезке*, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка. Это значит, что в каждой точке отрезка выполняются все условия, перечисленные в определениях непрерывности.

ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 1. Вывод основных формул дифференцирования

Определение 1. *Производной функции* $y = f(x)$ называется *предел отношения приращения функции* Δy *к приращению аргумента* Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1.1)$$

По формуле (1.1) получается производная любой функции $y = f(x)$**.** Это выполняется по общему правилу дифференцирования.

Общее правило дифференцирования:

1. даётся приращение аргументу Δx,
2. выводится приращение функции по формуле
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$
3. составляется отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,
4. находится предел этого отношения при $\Delta x \to 0$.

Вывод основных производных

1) Производная константы C
Уравнение функции $y = f(x)$ записывается в виде $y = C$, где $C = const$.
График этой функции показан на рис.15.

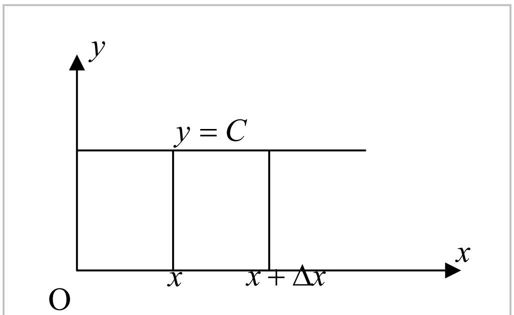

Рис. 15

Совершенно очевидно, что $\Delta y = 0$, отсюда отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.
Известно, что предел постоянного числа равен самому числу, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$, поэтому

производная константы равна нулю

$$C' = 0. \qquad (1.2)$$

2) **Производная независимой переменной**

Уравнение функции в данном случае имеет вид $y = x$. График показан на рис.16.

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$. Следовательно $\lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$, а это значит, что *производная независимой переменной всегда равна единице*

$$x' = 1. \qquad (1.3)$$

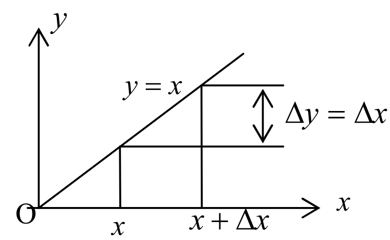

Рис. 16

3) **Производная произведения** двух функций $y = u(x) \cdot \upsilon(x)$

Пусть даны две непрерывные функции от x: $u = u(x)$, $\upsilon = \upsilon(x)$. После того, как дано приращение Δx, получаем приращение каждой функции по формуле $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, то есть в виде $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ и $\Delta \upsilon = \upsilon(x + \Delta x) - \upsilon(x)$. Однако в общем виде эти приращения получить невозможно, но каждую функцию $u(x + \Delta x)$ и $\upsilon(x + \Delta x)$ можно из этих формул представить в виде

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u, \quad \upsilon(x + \Delta x) = \upsilon(x) + \Delta \upsilon.$$

Тогда приращение произведения двух функций можно записать в виде:

$$\Delta y = u(x + \Delta x) \cdot \upsilon(x + \Delta x) - u(x) \cdot \upsilon(x) = \left[(u(x) + \Delta u) \cdot (\upsilon(x) + \Delta \upsilon)\right] - u(x) \cdot \upsilon(x) =$$

$$= u(x) \cdot \upsilon(x) + u(x) \cdot \Delta\upsilon + \upsilon(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta \upsilon - u(x) \cdot \upsilon(x) = u(x) \cdot \Delta \upsilon + \upsilon(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta \upsilon.$$

Отсюда отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ получается в виде:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x) \cdot \Delta \upsilon + \upsilon(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta \upsilon}{\Delta x} = u(x) \cdot \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} + \upsilon(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u \cdot \Delta \upsilon}{\Delta x}.$$

При переходе к пределу получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) \cdot \Delta \upsilon + \upsilon(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta \upsilon}{\Delta x} =$$

$$= u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} + \upsilon(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} =$$

$$= u(x) \cdot \upsilon'(x) + \upsilon(x) \cdot u'(x).$$

Следует учесть, что по второму определению непрерывности $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$, так как функции $u = u(x)$, $\upsilon = \upsilon(x)$ непрерывны вместе со своими производными.

Окончательно получается формула *производной произведения*

$$\left[u(x) \cdot \upsilon(x)\right]' = u'(x) \cdot \upsilon(x) + \upsilon'(x) \cdot u(x). \qquad (1.4)$$

Производная произведения двух непрерывных функций равна произведению производной первой функции на вторую плюс произведение производной второй функции на первую.

5. **Производная частного** двух непрерывных функций $\dfrac{u(x)}{\upsilon(x)}$.

Используем приращения предыдущего примера и получаем приращение функции в виде

$$\Delta y=\frac{u(x)+\Delta u}{\upsilon(x)+\Delta\upsilon}-\frac{u(x)}{\upsilon(x)}=\frac{u(x)\cdot\upsilon(x)+\upsilon(x)\cdot\Delta u-u(x)\cdot\upsilon(x)-u(x)\Delta\upsilon}{\left(\upsilon(x)+\Delta\upsilon\right)\cdot\upsilon(x)}=\frac{\upsilon(x)\cdot\Delta u-u(x)\Delta\upsilon}{\left(\upsilon(x)+\Delta\upsilon\right)\cdot\upsilon(x)}.$$

После деления на приращение аргумента получается

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\upsilon(x)\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta x}}{\left(\upsilon(x)+\Delta\upsilon\right)\cdot\upsilon(x)}.$$

Переход к пределу даёт

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\upsilon(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta x}}{\upsilon(x)\lim\limits_{\Delta x\to0}\left(\upsilon(x)+\Delta\upsilon\right)}=\frac{u'(x)\cdot\upsilon(x)-\upsilon'(x)\cdot u(x)}{\upsilon^2(x)}.$$

Формула *производной частного* имеет вид

$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)'=\frac{u'\cdot\upsilon-\upsilon'\cdot u}{\upsilon^2}. \qquad (1.5)$$

Производная частного равна дроби, в числителе которой стоит произведение производной числителя на знаменатель минус произведение производной знаменателя на числитель, а в знаменателе стоит квадрат знаменателя.

6. Производная сложной функции

Определение 2. Функция $f(u)$ называется *сложной* функцией от независимой переменной *x*, если внутренняя функция $u=u(x)$ (можно сказать, что сложная функция – это функция от функции).

Для того. чтобы продифференцировать сложную функцию, представим её производную в виде

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=y_u'\cdot u_x',$$

$$f'(x)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=y_u'\cdot u_x'. \qquad (1.6)$$

Производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточной переменной на производную промежуточной переменной по независимой переменной.

6. Производная логарифмической функции $y=\ln u$, где $u=u(x)$

Сначала получаем производную логарифмической функции по промежуточной переменной u, а затем полученное выражение помножим на u_x'.

По общему правилу дифференцирования даём приращение Δu.

1) Затем получаем приращение функции,

2) $\Delta y=\ln(u+\Delta u)-\ln(u)=\ln\left(\dfrac{u+\Delta u}{u}\right)=\ln\left(1+\dfrac{\Delta u}{u}\right)$,

3) Получаем отношение приращения функции к приращению аргумента, а затем делим и умножаем на переменную u,

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{1}{\Delta u}\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)=\frac{1}{u}\frac{u}{\Delta u}\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)=\frac{1}{u}\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}.$$

4) Для перехода к пределу необходимо вспомнить формулу второго замечательного предела

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}\left(1^{\infty}\right)=e,$$ где e – основание натуральных логарифмов.

Этот предел можно представить иначе $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\left(1+\varphi(x)\right)^{\frac{1}{\varphi(x)}}\left(1^{\infty}\right)=e$. Такая форма удобнее для нашей цели.

$$\frac{d\ln u}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{1}{u}\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}=\frac{1}{u}\lim_{\Delta u\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}\left(1^{\infty}\right)=\frac{1}{u}\ln e=\frac{1}{u}\cdot 1=\frac{1}{u},$$

Полученную производную нужно умножить на u'. Отсюда получается

$$\left(\ln u\right)'=\frac{u'}{u}. \qquad (1.7)$$

Производная логарифмической функции равна дроби в числителе которой стоит производная аргумента, а в знаменателе сам аргумент .

Метод логарифмического дифференцирования

Замечание 1. Дифференцирование произведения нескольких функций, частного большого количества функций, степенных, показательных и степенно-показательных функций легче выполнять методом логарифмического дифференцирования.

Сущность метода логарифмического дифференцирования состоит в том, что сначала выполняется логарифмирование выражения, а потом выполняется дифференцирование полученных логарифмических функций по формуле (1.7).

7. Производная степенной функции $y=u^{n}$

Дана *степенная* функция $y=u^{n}$, $u=u(x)$.

Логарифмируем выражение $y=u^{n}$, получаем

$$\ln y=n\ln u \qquad (1.8)$$

Дифференцируем выражение (1.8) по формуле (1.7)

$$\frac{y'}{y}=n\frac{u'}{u},$$ отсюда $$y'=y\cdot n\frac{u'}{u}=u^{n}n\frac{u'}{u}=nu^{n-1}u'.$$

Тогда искомая *производная степенной функции* равна

$$\left(u^{n}\right)'=nu^{n-1}u'. \qquad (1.9)$$

8. **Производная показательной функции** $y=a^{\upsilon}$

Пусть дана *показательная* функция $y=a^{\upsilon}$, $\upsilon=\upsilon(x)$.

Логарифмируем $y=a^{\upsilon}$ и получаем

$$\ln y=\upsilon\ln a. \qquad (1.10)$$

Дифференцируем выражение (1.10) по формуле (1.19)

$$\frac{y'}{y}=\upsilon'\ln a.$$

Отсюда $y' = y\upsilon' \ln a = a^{\upsilon} \ln a \upsilon'$.

Тогда *производная показательной функции* равна

$$\left(a^{\upsilon}\right)' = a^{\upsilon} \ln a \upsilon' .. \qquad (1.11)$$

9. Производная степенно – показательной функции $y = u^{\upsilon}$

Пусть дана **степенно – показательная** функция $y = u^{\upsilon}, \quad u = u(x), \quad \upsilon = \upsilon(x)$.

Выполняем логарифмирование функции $y = u^{\upsilon}$

$$\ln y = \upsilon \ln u .$$

Дифференцируем это выражение по формуле (1.7) и получим:

$$\frac{y'}{y} = \upsilon' \ln u + \upsilon \cdot \frac{u'}{u}.$$

Отсюда $$y' = y \cdot \upsilon' \ln u + y \cdot \upsilon \cdot \frac{u'}{u} = u^{\upsilon} \cdot \upsilon' \ln u + u^{\upsilon} \cdot \upsilon \cdot \frac{u'}{u} = \upsilon u^{\upsilon-1} u' + u^{\upsilon} \cdot \ln u \cdot \upsilon'.$$

Отсюда *производная степенно-показательной функции* равна

$$\left(u^{\upsilon}\right)' = \upsilon u^{\upsilon-1} u' + u^{\upsilon} \cdot \ln u \cdot \upsilon'. \qquad (1.12)$$

Дифференцирование тригонометрических функций

10. **Производная функции** $y = \sin u$, где $u = u(x)$.

Получение приращения функции

$$\Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin u = 2\cos\frac{2u + \Delta u}{2} \cdot \sin\frac{\Delta u}{2}.$$

Отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta u}{2}\right)}{\Delta u} \cdot \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right).$$

Для перехода к пределу необходимо использовать формулу первого замечательного предела

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

$$\left(\sin u\right)'_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta u}{2}\right)}{\frac{\Delta u}{2}} \cdot \lim_{\Delta u \to 0} \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) = 1 \cdot \cos u = \cos u.$$

Отсюда *производная синуса* равна

$$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'. \qquad (1.13)$$

11. Производная функции $y = \cos u$, где $u = u(x)$.

Для получения производной синуса воспользуемся равенствами

$$\cos u = \sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \sin u = -\cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда производная косинуса равна

$$\left(\cos u\right)' = \left[\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(u + \frac{\pi}{2}\right)' = -\sin u \cdot u'.$$

Отсюда *производная косинуса* равна:

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'. \qquad (1.14)$$

12. **Производная функции** $y = \operatorname{tg} u$

Получим производную, учитывая, что тангенс равен частному двух функций

$$y' = (\operatorname{tg} u)' = \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)' = \frac{(\sin u)'\cos u - (\cos u)'\sin u}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{\cos u \cdot u' \cos u - (-\sin u)\cdot u' \sin u}{\cos^2 u} = \frac{(\cos^2 u + \sin^2 u)\cdot u'}{\cos^2 u} = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

Отсюда *производная тангенса* равна

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = \sec^2 u \cdot u'. \qquad (1.15)$$

13. **Производная функции** $y = \operatorname{ctg} u$, где $u = u(x)$.

Получим производную , учитывая, что тангенс равен частному двух функций

$$y' = (\operatorname{ctg} u)' = \left(\frac{\cos u}{\sin u}\right)' = \frac{(\cos u)'\sin u - (\sin u)'\cos u}{\sin^2 u} =$$

$$= \frac{-\sin u \cdot u' \sin u - \cos u \cdot u' \cos u}{\cos^2 u} = \frac{-(\sin^2 u + \cos^2 u)\cdot u'}{\cos^2 u} = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Отсюда *производная котангенса* равна

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u' \qquad (1.16)$$

Обратные функции

Определение 3 (обратной функции)**.** Пусть дана функция $y = f(x)$. Если найти выражение x через y, то получится другая функция $x = g(y)$. И та и другая функции выражаются одним и тем же графиком (рис.17). Следует учесть, что g является обратной характеристикой к характеристике функции f. Функция $y = g(x)$ является обратной к функции $y = f(x)$.

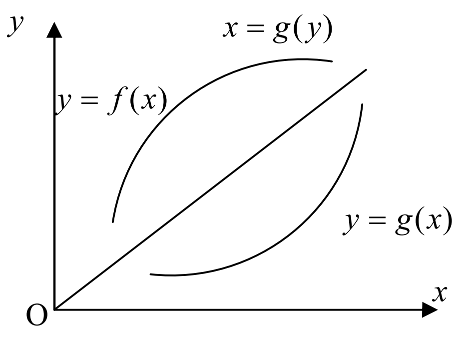

Рис. 17

14. Дифференцирование обратных функций

Рассмотрим выражение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Найдём пределы в левой и правой части равенства

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Следует учесть, что y - непрерывная функция, а следовательно, отвечает условию $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а это значит, что когда $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'} .$$

Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} . \qquad (1.17)$$

Производная обратной функции равна единице, делённой на производную прямой функции.

15. **Производная функции** $y = \arcsin u$, где $u = u(x)$.

Дана функция $y = \arcsin u$. Обратная функция $u = \sin y$, тогда по формуле (1.17)

$$y'_u = \frac{1}{u'} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} .$$

Получена производная по u, следовательно, окончательно получается, что *производная арксинуса* равна

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} . \qquad (1.18)$$

16. **Производная функции** $y = \arccos u$

Дана функция $y = \arccos u$. Обратная функция $u = \cos y$, тогда по формуле (1.17)

$$y'_u = \frac{1}{u'} = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} .$$

Получена производная по u, следовательно, окончательно производная арккосинуса с учётом формулы (1.6) получается в виде

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} . \qquad (1.19)$$

17. **Производная функции** $y = \operatorname{arctg} u$, $u = u(x)$.

Дана функция $y = \operatorname{arctg} u$. Обратная функция $u = \operatorname{tg} y$. Следует учесть формулу $1 + tg^2\varphi = \sec^2 \varphi$. Тогда получается

$$y'_u = \frac{1}{u'} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = -\frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+u^2} .$$

Получена производная по u. Домножая на производную u' по формуле (1.6), окончательно производную арктангенса получим в виде

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2} . \qquad (1.20)$$

18. **Производная функции** $y = \operatorname{arcctg} u$, где $u = u(x)$

Дана функция $y = \operatorname{arcctg} u$. Обратная функция $u = \operatorname{ctg} y$. Следует учесть формулу $1 + \operatorname{ctg}^2\varphi = \operatorname{cosec}^2\varphi$

$$y'_u = \frac{1}{u'} = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = \frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = \frac{-1}{1+u^2} .$$

Получена производная по u, следовательно, производная арккотангенса окончательно получается в виде

$$\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\frac{u'}{1+u^2}. \qquad (1.21)$$

§ 2. Дифференциал функции

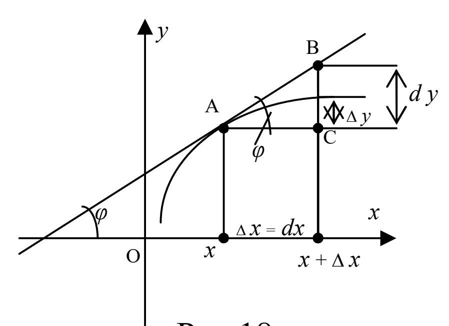

Рис.18

Дифференциал функции играет очень важную роль в дифференциальном исчислении. Он позволяет свести все вычисления криволинейных элементов к вычислению прямых, квадратов, прямоугольников и трапеций. Сущность его роли заключается в том, что дифференциал заменяет часто неопределимое аналитически приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ дифференциалом (рис. 18).

Для определения дифференциала в точке x проводится касательная к кривой $y = f(x)$ и строится треугольник АВС. Из треугольника АВС видно, что дифференциал dy равен произведению дифференциала независимой переменной $\Delta x = dx$ на тангенс угла наклона касательной к кривой в точке А Тангенс угла наклона касательной в точке А равен производной функции в этой точке. Производная по определению равна $y' = \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.. С другой стороны, из определения производной $y' = \dfrac{dy}{dx}$ видно, что дифференциал равен $dy = y'dx$, т.е. дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению производной функции y' в точке x на дифференциал независимой переменной dx:

$$dy = y'dx. \qquad (2.\ 1)$$

Геометрический смысл дифференциала функции: дифференциал равен *приращению ординаты касательной* к функции, проведенной в точке А.

Замечание 1. Из формулы (4.23) можно показать, что производную можно обозначать двумя способами, Так как справедливо равенство $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то обозначение производной y' равнозначно обозначению через дифференциалы $\dfrac{dy}{dx}$. Следует отметить, что в этом обозначении дифференциалы можно разделять как dx и dy.

Замечание 2. Дифференциал функции двух переменных $z = f(x, y)$ соответственно равен

$$dz = f_x' \, dx + f_y' \, dy \qquad (2.2)$$

или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

где
$$f_x' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } f_y' = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Первообразная функция

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка имеют место равенства

$$F'(x) = f(x)\,, \tag{1.1}$$
$$dF'(x) = f(x)dx\,. \tag{1.2}$$

Следовательно, *первообразной функции* $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна данной функции (1.1).

Замечание 1. Следует учесть, что *первообразная* берётся в виде $F(x)+C$, потому что

$(F(x)+C)' = f(x)$, так как $C' = 0$

Лемма 1. *Непрерывная функция, имеющая производную, равную нулю, может быть только величиной постоянной*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(x)$ - непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $\varphi'(x)=0$ для любых x этого отрезка. Предположим, что $\varphi(x)$ не постоянная величина. В этом случае существуют точки x_1 и x_2, в которых $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Применим формулу Лагранжа о конечных приращениях $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\varphi'(\xi)(x_2-x_1)$, где $x_1 < \xi < x_2$.

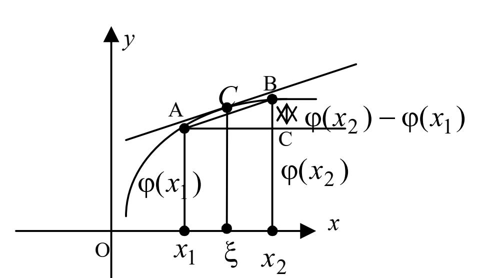

Рис.19

Замечание 2. Формулу Лагранжа легко понять из геометрии рисунка 19. Разность $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)$ равна произведению длины отрезка $[x_1,x_2]$ на тангенс угла наклона секущей AB, который равен тангенсу угла наклона касательной в точке С, а этот тангенс равен производной кривой в точке ξ, то есть $\varphi'(\xi)$. Отсюда получается формула Лагранжа.

Но по условию леммы $\varphi'(x)=0$, то есть $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=0$, а следовательно, $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$, что противоречит предположению. Следовательно, если $\varphi'(x)=0$, то функция может быть только постоянной $\varphi(x)=Const$, ч.т.д.

Теорема. *Если непрерывная функция $f(x)$ имеет хотя бы одну первообразную, то для неё существует бесконечное множество первообразных, отличающихся друг от друга только постоянными слагаемыми.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F(x)$ - первообразная функции для $f(x)$, то есть $F'(x)=f(x)$, тогда $F(x)+C$ при любом С тоже первообразная $f(x)$, то есть требуется доказать, что $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$. Пусть $\Phi(x)$ и $F(x)$ - две первообразные функции $f(x)$, то есть тоже удовлетворяет условию $\Phi'(x)=f(x)$, тогда разность $\Phi'(x)-F'(x)=0$ или $[\Phi(x)-F(x)]'=0$. Но на основании леммы эта разность равна константе. Отсюда $[\Phi(x)-F(x)]=Const$, то есть, $\Phi(x)=F(x)+C$, ч.т.д.

§ 2. Понятие неопределённого интеграла

Определение 2. Отыскание *первообразных* называется *неопределённым интегрированием*, а выражение, охватывающее множество всех первообразных, называется неопределённым интегралом функции $f(x)$ и записывается так:

$$\int f(x)dx\,, \tag{2.1}$$

где x - *переменная интегрирования,* $f(x)$ - *подынтегральная функция*, $f(x)dx$ - *подынтегральное выражение.*

Неопределённое интегрирование – это действие обратное дифференцированию, следовательно, для того, чтобы проверить правильность найденного неопределённого интеграла, достаточно продифференцировать получено выражение.

Замечание 3. Геометрически неопределённый интеграл представляет собой множество кривых, получающихся передвижением кривой $y = F(x)$ вдоль оси y от $-\infty$ до $+\infty$.

Свойства неопределённых интегралов

Свойство 1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \tag{2.2}$$

Свойство 2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, если

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{2.3}$$

$$d\int f(x)dx = d[F(x) + C] = [F(x) + C]' dx = f(x)dx. \tag{2.4}$$

Свойство 3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, то есть,

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Свойство 4. Постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла

$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx \tag{2.5}$$

Свойство 5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен сумме интегралов от этих функций

$$\int [f(x) \pm g(x) \pm \ldots \pm q(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \pm \ldots \pm \int q(x)dx. \tag{2.6}$$

§ 3. Основные методы интегрирования

Теорема (об инвариантности формул интегрирования): *Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной интегрирования любой дифференцируемой функции от неё, то есть, если*

$\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ - любая дифференцируемая функция от x..

Д о к а з а т е л ь с т в о: Из того, что

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

следует, что $F'(x) = f(x)$. Возьмём функцию $F(u) = F[\varphi(x)]$ для её дифференциала в силу теоремы об инвариантности вида первого дифференциала функции имеем

$$d\int f(u)dx = d[F(x) + C] = F'(u)du = f(u)du.$$

Отсюда

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C.$$

Замечание 4. Это правило значительно расширяет возможности использования таблицы интегралов.

$$\int f(u)du = F(u) + C\ . \tag{3.1}$$

1. Метод замены переменной

С помощью замены переменной можно заданный интеграл заменить другим.

В интеграле $\int f(x)dx$ можно заменить переменную x функцией от t в виде $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию.

Теорема. *Любая формула интегрирования* $\int f(x)dx = F(x)+C$ *сохраняет силу, если как в подынтегральном выражении, так и правой части заменить переменную интегрирования* x *через любую функцию* $x=\varphi(t)$, *которая является дифференцируемой и имеет непрерывную дифференцируемую обратную функцию.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим $dx=\varphi'(t)\,dt$. Тогда

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt. \tag{3.2}$$

Замена справедлива, если

$$\left[\int f(x)dx\right]_x' = f(x)$$

В интеграле $\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$ $\dfrac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ и отсюда $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\varphi'(t)}$. Тогда

$$\frac{d}{dx}\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt = \frac{d}{dt}\left[\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt\right]\cdot\frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)\text{, ч.т.д.}$$

Замечание 5. В окончательном результате необходимо вернуться от t снова к x, то есть подставить $t=\psi(x)$, которую необходимо найти заранее.

2. Интегрирование выражений, содержащих в знаменателе непосредственно или под корнем квадратный трёхчлен

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+px+q},\quad I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}},\quad I_3=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx,\quad I_3=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}dx.$$

Замечание 6. Выделение полного квадрата производится по известной формуле $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Тогда получается так:

$$x^2+px+q = x^2+2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right].$$

Если принять полученное выражение в виде

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right]\Rightarrow\left(x+\frac{p}{2}\right)=u^2,\quad\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=a^2,$$

то первый и второй интеграл приведутся к табличным интегралам вида

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{du}{u^2\pm a^2},\quad I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}. \tag{3.3}$$

Третий и четвёртый интегралы требуют дополнительных преобразований. Для того, чтобы их привести к табличным, необходимо в числителе выделить производную знаменателя и разделить интеграл на два интеграла, из которых второй будет иметь одного из (3.11).

В общем виде преобразования громоздки, поэтому рассматривается пример.

Пример 1 .

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx \sim \begin{bmatrix} (x^2+4x+10)'=2x+4 \\ =\frac{5}{2}(2x+4)-10+3 \end{bmatrix} \sim \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+3-10}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+4x+10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} =$$

$$\sim \left\{ \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C \right\} \sim$$

$$= \frac{5}{2}\left[2\sqrt{x^2+4x+10}\right] - 7\left|\ln x + 2 + \sqrt{x^2+4x+10}\right| + C =$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\left|\ln x + 2 + \sqrt{x^2+4x+10}\right| + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} \sim \left\{ \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C \right\} \sim \frac{1}{2} arctg \frac{x+2}{2} + C .$$

Замечание 7. Если квадратный трёхчлен неполный, то есть, имеет вид cx^2+m, то получаются такие интегралы:

$$I_5 = \int \frac{ax+b}{cx^2+m}dx, \quad I_6 = \int \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+m}}dx, \tag{3.4}$$

такие интегралы разбиваются на два табличных

$$I_5 = \int \frac{ax+b}{x^2+m}dx = \frac{a}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+m} + b\int \frac{dx}{x^2+m} = \frac{a}{2}\int \frac{d(x^2+m)}{x^2+m} + b\int \frac{dx}{x^2+m} =$$

$$= \frac{a}{2}\ln\left|cx^2+m\right| + \frac{b}{\sqrt{m}} arctg \frac{x}{\sqrt{m}} + C = \frac{a}{2}\ln\left|x^2+m\right| + \frac{b}{\sqrt{m}} arctg \frac{x}{\sqrt{m}} + C.$$

$$I_6 = \int \frac{ax+b}{\sqrt{x^2+m}}dx = \frac{a}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+m}} + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \frac{a}{2}\int \frac{d(x^2+m)}{\sqrt{x^2+m}} + b\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| =$$

$$= \frac{a}{2}2\sqrt{x^2+m} + b\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C = a\sqrt{x^2+m} + b\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C.$$

3. Интегрирование тригонометрических дифференциалов

I. Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx \tag{3.5}$$

При этом возможны 3 случая:

а) m и n таковы, что одно из них нечётное

б) m и n - неотрицательные чётные,

в) m и n - чётные, но хотя бы одно из них отрицательное.

Случай а) Допустим, что n нечётное число $n = 2p+1$, тогда

$$\int \sin^m x \cdot \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x \cdot \cos^{2p} x \cos x\, dx = \int \sin^m x \cdot (1-\sin^2 x)^p x \cos x\, dx \sim$$

$$\sim \{\sin x = t, \quad \cos x dx = d\sin x = dt\} \sim \int t^m \cdot (1-t^2)^p\, dt.$$

Таким образом, интеграл сводится к первым табличным $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$.

Случай б) Положим $m = 2p, \quad n = 2q$ и используем известные тригонометрические формулы

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{3.6}$$

Тогда

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)^q dx. \tag{3.7}$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим члены, содержащие $\cos 2x$ в чётных и нечётных степенях. Члены с нечётными степенями интегрируются, как в случае а), а чётные степени снова понижаются по формулам (3.6). Это продолжается до интегралов вида $\int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$.

Случай в) если m и n - чётные, но хотя бы одно из них отрицательное, то выполняется замена. $\frac{\sin x}{\cos x} = tgx = t$ или $\frac{\cos x}{\sin x} = ctgx = t$.

Тогда $x = arctg\,t, \quad x = arcctg\,t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Пример 1. $\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx = \int \sin^2 x \cdot d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

Пример 2.

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \cdot dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}(x - \sin 2x) + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) \cdot dx = \frac{1}{4}(x - \sin 2x) + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x}dx = \int tg^2 x(1 + tg^2 x)^2\,dx =$$

$$. = \int t^2(1+t^2)^2\,\frac{dt}{1+t^2} = \int t^2(1+t^2)dt = \int (t^2 + t^4)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C.$$

4. Рассмотрим интегралы вида

$$\int tg^n x\,dx \text{ и } \int ctg^n x\,dx \tag{3.8}$$

Если n - целое число, то эти интегралы приводятся к табличным, при этом выделяется квадрат тангенса или котангенса, а затем делается замена по формулам

$$\begin{aligned} &1 + tg^2 x = \sec^2 x \quad \Rightarrow \quad tg^2 x = \sec^2 x - 1 \\ &1 + ctg^2 x = \cos ec^2 x \Rightarrow \quad ctg^2 x = \cos ec^2 x - 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Пример 4. $\int tg^3 x\,dx = \int tgx(\sec^2 x - 1)dx = \int tgx\,dtgx - \int tgx = \frac{tg^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$.

а) Интегралы вида

$$\int \sec^n x\,dx, \quad \int \cos ec^n x\,dx, \tag{3.10}$$

при n - целом положительном и чётном приводятся к табличным с помощью замены по формулам (3.9).

Пример 5. $\int tg^3 x \sec^2 x\,dx = \int tg^3 x\,dtgx = \dfrac{tg4x}{4} + C$.

б) Интегралы вида

$$\int tg^m x \cdot \sec^n x\,dx, \quad \int ctg^m x \cdot \cos ec^n x\,dx, \tag{3.11}$$

при n чётном интегрируются с помощью такой же замены, как в случае **а**.

Пример 6. $\int \sec^4 x\,dx = \int (tg^2 x + 1)\sec^2 x\,dx = \int (tg^2 x + 1)\,dtg\,x = \dfrac{tg^3 x}{3} + tgx + C.$

в) Интегралы вида $\int \cos mx \cdot \cos nx\,dx, \quad \int \sin mx \cdot \cos nx\,dx, \quad \int \sin mx \cdot \sin nx\,dx$ (3.12)

берутся с помощью подстановок

$$\begin{aligned} \cos mx \cdot \cos nx &= \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right], \\ \sin mx \cdot \cos nx &= \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right], \\ \sin mx \cdot \sin nx &= \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

После подстановки и интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \int \cos mx \cdot \cos nx\,dx &= \frac{1}{2}\int \left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C, \\ \int \sin mx \cdot \cos nx\,dx &= \frac{1}{2}\int \left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C, \\ \int \sin mx \cdot \sin nx dx &= \frac{1}{2}\int \left[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right]dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C. \end{aligned} \tag{3.14}$$

4. Интегрирование по частям

Для вывода формулы интегрирования по частям рассмотрим дифференциал произведения двух функций

$$d(u \cdot \upsilon) = \upsilon \cdot du + u \cdot d\upsilon. \tag{3.15}$$

Интеграл от этого выражения равен

$$\int d(u \cdot \upsilon) = \int \upsilon \cdot du + \int u \cdot d\upsilon. \tag{3.16}$$

Отсюда получаем **формулу интегрирования по частям** для **неопределённых** интегралов

$$\int u \cdot d\upsilon = u \cdot \upsilon - \int \upsilon \cdot du \tag{3.17}$$

Для **определённых** интегралов эта формула записывается в виде

$$\int_a^b u \cdot d\upsilon = \left(u \cdot \upsilon\right)\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon \cdot du. \tag{3.18}$$

Замечание 8. Метод интегрирования по частям используется для интегрирования произведения любых непрерывных функций, но чаще всего он используется для интегрирования произведения многочленов на разные элементарные функции вида

$$\int P_n(x) \cdot u(x)\,dx,$$

где *многочлен* $P_n(x)$ имеет вид $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a^2 x^2 + a_1 x + a_o$, n - порядок многочлена.

Функции можно разделить на два вида: первый, когда многочлен умножается на прямую функцию типа $\sin ax$, e^{ax} и т.д., а второй, когда многочлен умножается на обратную функцию типа $\ln x$, $\arcsin ax$ и т.д.

$$1)\ f(x) = \begin{cases} \sin ax \\ \cos ax \\ \operatorname{tg} ax \\ \operatorname{ctg} ax \\ e^{ax} \end{cases} \text{ - прямые функции,} \qquad (3.19)$$

$$2)\ f(x) = \begin{cases} \arcsin ax \\ \arccos ax \\ \operatorname{arctg} ax \\ \operatorname{arcctg} ax \\ \ln x \end{cases} \text{ - обратные функции.} \qquad (3.20)$$

Важная рекомендация:

1) *Если многочлен умножается на прямую функцию* (3.19)**,** то в формулах (3.17) и (3.18) *за* $u(x)$ *принимается многочлен* $u(x) = P_n(x)$**.**
2) *Если многочлен умножается на обратную функцию* (3.20)**,** *то за* $u(x)$ *принимается обратная функция.*

Например, пусть дан интеграл $\int P_n(x)\cdot \sin x dx$. За $u(x)$ принимается $u(x) = P_n(x)$, а $\upsilon\, dx = \sin x\, dx$, если дан интеграл $\int P_n(x)\cdot \arcsin x dx$, то $u(x) = \arcsin x$, а $\upsilon\, dx = P_n(x)\, dx$

Пример 1

$$\int x\cdot \sin x dx \sim \begin{cases} u = x & du = dx \\ \upsilon = -\cos x & d\upsilon = \sin x dx \end{cases} \sim -x\cdot\cos x - (-\int \cos x\cdot dx) =$$

$$= -x\cdot \cos x + \sin x + C.$$

Пример 2

$$\int x\cdot \arcsin x dx \sim \begin{cases} u = \arcsin x & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \upsilon = x^2 & d\upsilon = x dx \end{cases} \sim x^2 \arcsin x - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \qquad (**)$$

Для того, чтобы взять полученный интеграл, в числителе прибавим и вычтем единицу и разобьём на два интеграла

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(1-x^2-1)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(1-x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \sqrt{1-x^2}\,dx - \arcsin x =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

Возвращаясь к выражению (**), получим

$$\int x\cdot\arcsin x dx \sim \begin{cases} u=\arcsin x & du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \upsilon = x^2 & d\upsilon = xdx \end{cases} \sim x^2\arcsin x-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x^2\arcsin x-(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin x)+C=x^2\arcsin x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

5. Интегрирование иррациональных функций

Рассматриваются только те интегралы от иррациональных функций, которые приводятся к интегралам от рациональных функций и интегрируются до конца.

I. $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{r}{s}})\,dx$, (3.21)

R - рациональная функция своих аргументов,

k - наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m}{n},...,\frac{r}{s}$.

Делается подстановка

$$x=t^k\ ,\ dx=k\,t^{k-1}dt\,, \tag{3.22}$$

тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень t, подынтегральная функция выразится через рациональную функцию от t.

Пример 1.

$$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}\sim\{x=t^4,\quad dx=4t^3dt\}\sim\int\frac{t^2\,4t^3dt}{t^3+1}=4\int\frac{t^5dt}{t^3+1}=4\int\left[t^2-\frac{t^2}{t^3+1}\right]dt=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right|+C$$

.**II.** Интегралы вида

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx \tag{3.23}$$

сводятся к интегралу от рациональных функций с помощью подстановки

$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где k - наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m}{n},...,\frac{r}{s}$

Пример 2.

$$\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx\sim\{x+4=t^2,\quad x=t^2-4,\quad dx=2tdt\}\sim 2\int\frac{t^2}{t^2-4}dt=$$

$$=2\int dt+8\int\frac{dt}{t^2-4}\sim\left\{\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{u-a}{u+a}+C\right\}\sim 2t+2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=$$

$$=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C.$$

6. Интегрирование тригонометрических функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки

Так как все тригонометрические функции можно выразить в конечном счёте через $\sin x$ и $\cos x$, то с помощью преобразований получают интегралы вида

$$\int R(\sin x,\cos x)dx\,. \tag{3.24}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка имеет вид:

$$z = tg\frac{x}{2}. \quad (3.25)$$

Выражения для аргументов подынтегральной функции получаются следующим образом:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2\frac{tgx}{\sec^2 x} = 2\frac{tgx}{1+tg^2x} = \frac{2z}{1+z^2}. \quad (3.26)$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}(1-tg^2x) = \frac{(1-tg^2x)}{\sec^2 x} = \frac{(1-tg^2x)}{1+tg^2x} = \frac{1-z^2}{1+z^2}. \quad (3.27)$$

Из (3.25) получают $x = 2arctgz$, откуда

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}. \quad (3.28)$$

Итак

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2},\ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},\ dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

1. Если $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$, то есть, $\sin x$ и $\cos x$ входят в чётной степени, то делается подстановка

$$z = tgx. \quad (3.29)$$

Тогда

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sec^2 x} = \frac{tg^2x}{1+tg^2x} = \frac{z^2}{1+z^2}, \quad (3.30)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+tg^2x} = \frac{1}{1+z^2}, \quad (3.31)$$

$$dx = \frac{dz}{1+z^2}. \quad (3.32)$$

1. Если подынтегральная функция зависит только от tgx, то подстановка тоже

$$\mathrm{x} = \mathrm{tgz}.$$

2. Если подынтегральная функция зависит только от $\sin x$ или только от $\cos x$, то используется универсальная тригонометрическая подстановка $\mathrm{z} = \mathrm{tg}\frac{\mathrm{x}}{2}$.

Пример 3. Получим табличный интеграл

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}} = \int\frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

. Интегрирование рациональных функций, содержащих $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ с помощью тригонометрических подстановок можно свести к виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Квадратный трёхчлен ax^2+bx+c с помощью выделения полного квадрата всегда можно привести к виду $m^2z^2 + n^2 = m^2(z^2 + u^2)$. Таким образом, получаются интегралы

$$1)\ \int R\left(z, \sqrt{m^2z^2 + n^2}\right)dz, \tag{3.33}$$

которые приводятся к табличным с помощью подстановки $z = \frac{n}{m} tgu$.

$$2)\ \int R\left(z, \sqrt{m^2z^2 - n^2}\right)dz, \tag{3.34}$$

которые приводятся к табличным с помощью подстановки $z = \frac{n}{m}\sec u$.

$$3)\ \int R\left(z, \sqrt{n^2 - m^2z^2}\right)dz, \tag{3.35}$$

которые приводятся к табличным с помощью подстановки $z = \frac{n}{m}\sin u$.

Пример 4. *Табличный интеграл*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sim \{x = a\sin z,\ dx = a\cos z\, dz\} \sim \int \frac{a\cos z\, dz}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 z}} =$$

$$= \int \frac{\cos z\, dz}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} = z + C = arx\sin x + C.$$

Пример 5. *Табличный интеграл*

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}dx \sim \left\{u = a\sin z,\ dx = a\cos z\, dz, \quad z = \arcsin\frac{u}{a}\right\} \sim a^2\int \sqrt{1 - \sin^2 z}\cos z\, dz =$$

$$= a^2\int \cos^2 z\, dz = a^2\int \frac{1 + \cos 2z}{2}dz = \frac{a^2}{2}\left(z + \frac{\sin 2z}{2}\right) + C \sim \left\{\sin z = \frac{x}{a}, \quad \cos z = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},\right.$$

$$\left.\sin 2z = 2\sin z\cos z = \frac{2u\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2}\right\} \sim \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{u}{a} + \frac{u\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2}\right) + C =$$

$$\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + \frac{u\sqrt{a^2 - u^2}}{2} + C = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C.$$

8. Интегрирование рациональных дробей

Пусть дана дробь, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}. \tag{3.36}$$

Определение 1. Выражение вида (4.36) называется *рациональной дробью*

Многочлен – это выражение вида $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a^2x^2 + a_1x + a_o$, n - порядок многочлена.

Замечание 1. На простейшие можно раскладывать только *правильные дроби*.

Определение 2. Дробь называется *правильной*, если порядок числителя меньше порядка знаменателя.

Замечание 2. Для того, чтобы привести *неправильную дробь к правильной*, необходимо числитель разделить на знаменатель.

Замечание 3. Для того, чтобы интегрировать *рациональные дроби*, необходимо разложить дробь на *простейшие*, когда в знаменателе стоит одно из выражений вида $(x-a),\quad (x+a),\quad (x^2+a^2)$.

1. Разложение дробей на простейшие

Пример 1. Пусть дана рациональная дробь

$$\frac{z+3}{(z-1)(z+2)}$$

Эту дробь можно разложить на две *простейшие дроби*

$$\frac{z+3}{(z-1)(z+2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2}, \tag{3.37}$$

1-е действие : приводим правую часть к общему знаменателю

$$\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} = \frac{A(z+2)+B(z-1)}{(z-1)(z+2)} = \frac{(A+B)z+(2A-B)}{(z-1)(z+2)}, \tag{3.38}$$

2-е действие: приравниваем числители левой и правой части, тогда получается равенство

$$z+3 = (A+B)z + (2A-B), \tag{3.39}$$

Получилось одно уравнение с двумя неизвестными *A* и *B*.

Способы определения неизвестных коэффициентов при решении системы (3.39)

Определение неизвестных коэффициентов в выражении (3.39) выполняется двумя способами: *первый способ* состоит в приравниваем коэффициентов *A* и *B* при одинаковых степенях z, что даёт систему двух уравнений с двумя неизвестными, и называется *способом неизвестных коэффициентов. Второй способ* называется *способом частных значений* z. В этом случае для получения системы уравнений даются разные частные значения z Таким путём можно получить систему нужного числа уравнений.

Замечание 1. Можно часть коэффициентов найти способом частных значений, а остальные путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях z.

В данном случае система алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов *A* и *B* получается в виде:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 2A-B=3. \end{cases} \tag{3.40}$$

Откуда $A=\frac{4}{3},\quad B=-\frac{1}{3}$.

3-е действие: делается проверка полученных значений *A* и *B* путём подстановки в систему (3.40)

$$1\cdot\frac{4}{3}+1\cdot(-\frac{1}{3}) = \frac{3}{3} = 1,$$

$$2\cdot\frac{4}{3}-1\cdot(-\frac{1}{3}) = \frac{8+1}{3} = 3.$$

4-е действие: подстановка коэффициентов *A* и *B* в формулу (3.37) даёт искомое разложение заданной дроби на две простейшие

$$\frac{z+3}{(z-1)(z+2)} = \frac{4}{3}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{z+2}.$$

Дополнение к примеру

Определение неизвестных коэффициентов в равенстве (3.39) выполняется способом *частных значений* z. Для этого перепишем (3.39) в виде

$$z+3=A(z+2)+B(z-1).$$

Пусть $z=-2$, тогда $-2+3=B(-2-1)\Rightarrow \quad B=-\frac{1}{3}$.

Пусть $z=1$ Тогда $1+3=A(1+2)\Rightarrow \quad A=\frac{4}{3}$.

Пример 2. Разложить на простейшие дробь, имеющую *кратные корни* в знаменателе

$$\frac{z+3}{(z-1)^2(z+2)}$$

В этом случае дробь раскладывается по убывающим степеням в виде:

$$\frac{z+3}{(z-1)^2(z+2)}=\frac{A}{(z-1)^2}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+2}. \tag{3.41}$$

1) Приведение дроби к общему знаменателю:

$$\frac{A}{(z-1)^2}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+2}=\frac{A(z+2)+B(z-1)(z+2)+C(z-1)^2}{(z-1)^2(z+2)}. \tag{3.42}$$

2) Приравнивание числителей:

$$z+3=A(z+2)+B(z-1)(z+2)+C(z-1)^2. \tag{3.43}$$

3) Составление системы уравнений сначала способом частных значений, а потом приравнивая коэффициенты при старшем показателе z

$$\left.\begin{array}{l} z=1 \\ z=-2 \\ z^2 \end{array}\right| \qquad \begin{cases} 1+3=A(1+2) \\ -2+3=C(-2-1)^2 \\ 0=B+C \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{4}{3}, \\ C=\frac{1}{9}, \\ B=-C=-\frac{1}{9}. \end{cases}$$

4) Проверка полученных значений коэффициентов путём подстановки в (3*)

$$\frac{4}{3}(z+2)-\frac{1}{9}(z^2+z-2)+\frac{1}{9}(z^2-2z+1)=z^2(\frac{1}{9}-\frac{1}{9})+z[(\frac{4}{3}-\frac{1}{9}\cdot 1+\frac{1}{9})\cdot(-2)]+$$

$$+\frac{4}{3}\cdot 2-\frac{1}{9}\cdot(-2)+\frac{1}{9}\cdot 1=z(\frac{4}{3}-\frac{3}{9})+(\frac{8}{3}+\frac{3}{9})=z+3.$$

5) Результат разложения данной дроби

$$\frac{z+3}{(z-1)^2(z+2)}=\frac{4}{3}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{9}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{9}\frac{1}{z+2}.$$

Пример 3. Дробь имеет *мнимые корни* в знаменателе. Разложить на простейшие следующую дробь

$$\frac{z+3}{(z^2+4)z}.$$

Дробь имеет в знаменателе *сопряжённые мнимые корни* $z_{1,2}=\pm 2i$.

В этом случае дробь раскладывается так:

$$\frac{z+3}{(z^2+4)z}=\frac{Az+B}{z^2+4}+\frac{C}{z}.$$

1) Приведение дроби к общему знаменателю

$$\frac{Az+B}{z^2+4}+\frac{C}{z}=\frac{(Az+B)z+C(z^2+4)}{(z^2+4)z}.$$

2) Приравнивание числителей

$$z+3=(Az+B)z+C(z^2+4).$$

3) Составление системы уравнений сначала способом частных значений, а потом приравнивая коэффициенты при старшем показателе z.

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ z^2 \\ z \end{array}\right| \qquad \begin{cases} 0+3=C(0^2+4) \\ 0=A+C \\ 1=B \end{cases} \qquad \begin{cases} C=\dfrac{3}{4}, \\ A=-C=-\dfrac{3}{4}, \\ B=1. \end{cases}$$

Проверка $Az^2+Bz+C(z^2+4)=-\frac{3}{4}z^2+1\cdot z+\frac{3}{4}z^2+\frac{3}{4}\cdot 4=z+3$.

4) Результат разложения данной дроби

$$\frac{z+3}{(z^2+4)z}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{z}{z^2+4}+\frac{1}{z^2+4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z}.$$

Пример 4. Взять табличный интеграл $\int\frac{du}{u^2-a^2}$.

Представим этот интеграл в виде:

$$\int\frac{du}{u^2-a^2}=\int\frac{du}{(u-a)(u+a)}.$$

Решение. Разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби

$$\frac{1}{(u-a)(u+a)}=\frac{A}{u-a}+\frac{B}{u+a}.$$

Приводим к общему знаменателю

$$\frac{1}{(u-a)(u+a)}=\frac{A(u+a)+B(u-a)}{(u-a)(u+a)}.$$

Приравниваем числители

$$1=A(u+a)+B(u-a),$$

и методом частных значений получаем неизвестные коэффициенты A и B::

$$u=a, \qquad 1=2Aa \quad \Rightarrow A=\frac{1}{2a},$$

$$u=-a, \quad 1=-2Ba \quad \Rightarrow B=-\frac{1}{2a}.$$

Отсюда подынтегральная дробь раскладывается на две простейшие

$$\frac{1}{(u-a)(u+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{u-a}-\frac{1}{u+a}\right).$$

Тогда интеграл можно представить в виде суммы двух интегралов

$$\int\frac{du}{u^2-a^2}=\int\frac{du}{(u-a)(u+a)}=\frac{1}{2a}\int\frac{du}{u-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{du}{u+a}=\frac{1}{2a}\left(\ln|u-a|-\ln|u+a|\right)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$$

Таким образом, получаем *табличный интеграл*.

$$\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$$

ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

К понятию определённого интеграла приводит ряд геометрических задач: вычисление площади плоской фигуры, вычисление объёма тела, ограниченного криволинейными поверхностями, вычисление длины кривой на плоскости и в пространстве и т.д.

§ 1. Определение определённого интеграла

1. Задача, приводящая к понятию определённого интеграла.

Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис.20)

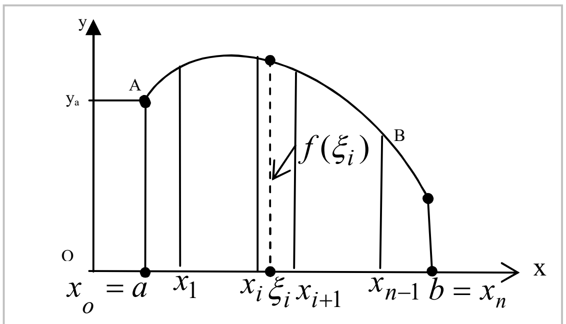

Рис. 20

Решение. Для решения этой задачи разбивают отрезок $[ab]$ на n частей (не обязательно равных!). Отрезки разбиения обозначают так:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta x_1 = x_1 - x_o, \\
&\Delta x_2 = x_2 - x_1, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \\
&\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\Delta x_n = x_n - x_{n-1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

Замечание 1. Обозначения Δx_i выполняют ещё одну функцию – они равны *длине* соответствующего отрезка разбиения. На каждом отрезке разбиения строится параллельный оси y прямоугольник. Вычисление площади каждого прямоугольника даёт приближённое значение соответствующей элементарной криволинейной трапеции. Для вычисления этой площади на соответствующем отрезке Δx_i выбирается произвольная точка ξ_i, в которой вычисляется значение $f(\xi_i)$. Отсюда площади каждого прямоугольника соответственно равны

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta S_1 = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1, \\
&\Delta S_2 = f(\xi_2)\cdot\Delta x_2, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\Delta S_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i, \\
&\Delta S_{i+1} = f(\xi_{i+1})\cdot\Delta x_{i+1}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\Delta S_n = f(\xi_n)\cdot\Delta x_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Если сложить все эти площади элементарных прямоугольников, то получится приближённое значение площади криволинейной трапеции. Отсюда вводится понятие «*интегральная сумма*», которое записывается в виде

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\,. \qquad (1.3)$$

Замечание 2. Понятие *интегральной суммы* имеет такое же важное значение в математическом анализа, как понятие предела, производной, неопределённого интеграла и т.п.

Определение 1. *Интегральной суммой* называется выражение (1.3), которое представляет собой сумму площадей, на которую разбита криволинейная трапеция прямыми, параллельными оси y.

Для того, чтобы вычислить площадь точнее, уже разбитый на n частей отрезок $[ab]$ разбивают ещё так, что получается разбиение на n_1 частей, где $n_1 > n$, и получают новую интегральную сумму I_{n_1}

$$I_{n_1} = \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \ . \tag{1.4}$$

Повторяя эту процедуру, получают последовательность интегральных сумм

$$I_n, I_{n_1}, ..., I_n, ... \tag{1.5}$$

Определение 2. Если существует *предел последовательности интегральных сумм* (1.5) при $n \to \infty$, то этот предел *называется определённым интегралом* и представляется в виде

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ . \tag{1.6}$$

Замечание 3. Интеграл (1.6) равен площади криволинейной трапеции, показанной на рис. 20.
Основные определения величин, входящих в формулу (1.6):

$f(x)$ - подынтегральная функция,
a - нижний предел интегрирования,
b - верхний предел интегрирования,
$[a,b]$ - отрезок (область) интегрирования,
x - переменная интегрирования.

Определение 3. Если интеграл на отрезке $[a,b]$ существует, то *функция* $f(x)$ называется *интегрируемой.*

Замечание 4. *Определённый интеграл* зависит от $f(x)$, от a и b, но не зависит от переменной интегрирования, то есть,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = ... \tag{1.7}$$

Это легко понять, если вспомнить, что определённый интеграл – это предел, а предел – это число. Результат, таким образом, являясь числом, *не может зависеть от того, как обозначена переменная интегрирования.*

Замечание 5. Предел *существует* только тогда, когда функция $f(x)$ *ограничена.*

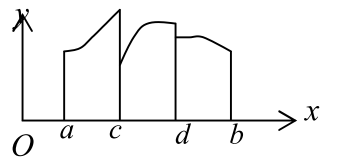

Рис. 21

2. Условия существования определённого интеграла

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Теорема 2. *Если ограниченная функция $f(x)$ на $[a,b]$ имеет лишь конечное число течек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке* (рис. 21).

Теорема 3 (без доказательства). *Монотонная ограниченная функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ всегда интегрируема.*

3. Основные свойства определённого интеграла

Свойство 1. Определённый интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от слагаемых функций

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(t)dt \pm \int_a^b \varphi(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx\,. \qquad (1.8)$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx. \qquad (1.9)$$

Свойство 3. Если верхний и нижний переделы поменять местами, то знак интеграла изменится на противоположный

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,. \qquad (1.10)$$

Свойство 4. Если пределы интегрирования совпадают, то интеграл равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,. \qquad (1.11)$$

Свойство 5. Для любых трёх чисел a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,, \qquad (1.12)$$

если только все эти интегралы существуют.

Свойство 6. Если подынтегральная функция в области интегрирования непрерывна и сохраняет постоянный знак, то интеграл представляет собой число такого же знака, что и функция.

Свойство 7. (Теорема об оценке определённого интеграла) *Значение определённого интеграла заключено между произведением наименьшего и наибольшего значений подынтегральной функции на длину отрезка интегрирования*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)\,, \qquad (1.13)$$

m - наименьшее значение функции, M - наибольшее значение функции, так что $m \le f(x) \le M$.

Обобщение теоремы об оценке определённого интеграла

Если в каждой точке x отрезка $[a,b]$ выполняется неравенство

$$\psi(x) \le f(x) \le \varphi(x)\,, \qquad (1.14)$$

то

$$\int_a^b \psi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx\,. \qquad (1.15)$$

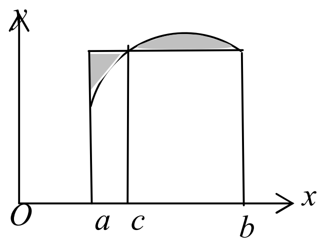

Рис.22

Свойство 8. (Теорема о среднем) *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то на этом отрезке существует, по меньшей мере, одно значение* $x = c$, *для которого справедливо следующее равенство* (рис. 22):

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)\,. \qquad (1.16)$$

4. Интеграл с переменным верхним пределом

Определение 4. Если в определённом интеграле нижний предел постоянен, а верхний меняется, то интеграл называется *интегралом с переменным верхним пределом* и записывается в виде

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (1.17)$$

Замечание 6. Следует учесть, что понятие *интеграла с переменным верхним пределом* играет в математическом анализе такую же важную роль, как понятия предела, производной, интеграла и т.п.

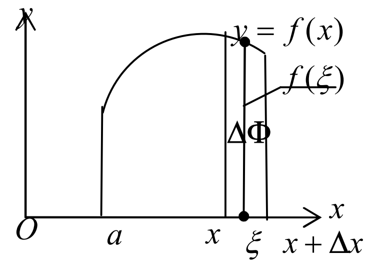

Рис. 23

Теорема об интеграле с переменным верхним пределом: *производная от интеграла с переменным верхним пределом по его верхнему пределу* $\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx$ *равна подынтегральной функции* $f(x)$*, то есть,*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x). \qquad (1.18)$$

Доказательство. Придавая аргументу x приращение Δx (рис. 23) и применяя свойство 5, получим

$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$, откуда $\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx$.

Применяя теорему о среднем, получим $\Delta\Phi(x) = f(\xi)\cdot\Delta x$. Деля на Δx, получим $\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\cdot\Delta x}{\Delta x} = f(\xi)$ и, переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x).$$

Отсюда, учитывая, что $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \Phi'(x)$, получаем

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x), \text{ ч.т.д.} \qquad (1.19)$$

Замечание 7. Учитывая определение первообразной неопределённого интеграла, видим, что интеграл с переменным верхним пределом является *первообразной* функции $f(x)$.

Из всего вышесказанного следует, что

$$d\Phi(x) = d\int_a^x f(t)dt = f(x)dx. \qquad (1.20)$$

5. Формула Ньютона – Лейбница

Теорема. *Значение определённого интеграла от непрерывной функции равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, вычисленных при верхнем и нижнем пределах интегрирования.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ первообразная для $f(x)$.


Готфрид Вильгельм Лейбниц
1646 - 1716

Известно, что две первообразные одной и той же функции отличаются на константу, то есть можно написать

$$\Phi(x)=F(x)+C \text{ или } \int_a^x f(t)dt=F(x)+C.$$

Положив $x=a$ и учитывая свойство 4 определённого интеграла, получим

$$\int_a^a f(t)dt=F(a)+C=0.$$

Отсюда следует, что $C=-F(a)$. Тогда $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$.

А теперь, положив $x=b$, получим *формулу Ньютона –Лейбница в виде*

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a). \tag{1.21}$$

Свойства формулы Ньютона –Лейбница

Свойство 1. Разность $F(b)-F(a)$ не зависит *от выбора первообразной.*

Свойство 2. Формула Ньютона – Лейбница даёт *общий метод* для решения прикладных задач.

6. Замена переменных в определённом интеграле

Теорема

Если на отрезке $[\alpha,\beta]$ *функции* $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ *и* $f(x)=f[\varphi(t)]$ *непрерывны и* $\varphi(\alpha)=a$ *и* $\varphi(\beta)=b$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{1.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Если $F(x)$- первообразная для $f(x)$, то можно написать следующие равенства:

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

$$\int f[\varphi(t)]d\varphi(t)=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(t)]+C.$$

Справедливость этого равенства проверяется дифференцированием обеих частей по t.

Далее заменяя переменную интегрирования $x=\varphi(t)$ в формуле Ньютона – Лейбница, получим $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(t)]_\alpha^\beta=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$.

Сравнивая это равенство с формулой $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$, видим, что правые части равны между собой, следовательно, равны и левые, ч.т.д.

Замечание 8. При вычислении интеграла по формуле (1.22) не нужно возвращаться к старой переменной, потому что определённый интеграл – это предел, а предел – это число.

7. Интегрирование по частям определённого интеграла

Пусть функции u и υ дифференцируемые по x, тогда $(u\cdot\upsilon)'=u'\upsilon+u\upsilon'$,
а отсюда

$$\int_a^b (u\upsilon)'\,dx=\int_a^b u'\upsilon\,dx+\int_a^b u\upsilon'\,dx.$$ Учтём, что $\int (u\upsilon)'\,dx=u\upsilon+C$, тогда $\int_a^b (u\upsilon)'\,dx=u\upsilon\big|_a^b$.

Отсюда можно написать $u\upsilon\big|_a^b=\int_a^b u'\upsilon\,dx+\int_a^b u\upsilon'\,dx=\int_a^b \upsilon\,du+\int_a^b u\,d\upsilon$.

Откуда

$$\int_a^b u\,d\upsilon=u\upsilon\big|_a^b-\int_a^b \upsilon\,du. \qquad (1.23)$$

§ 2. Несобственные интегралы

Интеграл, у которого подынтегральная функция непрерывна, а отрезок интегрирования $[a,b]$ конечен, называется определённым интегралом в *собственном смысле* слова. Если же нарушается непрерывность функции $f(x)$ или область интегрирования становится бесконечной, то интеграл называется *несобственным*.

1. Несобственные интегралы I-го рода

Определение 5. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования называются *несобственными интегралами I-го рода*. Несобственные интегралы от функции, имеющей в области интегрирования бесконечный разрыв, называются *несобственными интегралами II-го рода.*

Пусть $f(x)$ непрерывна для всех значений x в областях $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ или $\int_a^{\infty} f(x)dx$ и существует интеграл $\int_a^b f(x)dx$ в любой конечной части области интегрирования, тогда при $b\to\infty$ *предел либо существует, либо нет*.

Определение 6. Если при $b\to\infty$ существует конечный предел интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$, то он называется *сходящимся интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. *По определению* имеем $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. Если *предел существует*, то говорят, что интеграл *существует или сходится*. Если предел *не существует,* то говорят, что интеграл *не существует* или *расходится*.

Другие несобственные интегралы записываются так:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Последний интеграл можно разбить на два и исследовать каждый отдельно, то есть,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (2.1)$$

2. Признаки сходимости несобственных интегралов

Теорема 1. *Если при всех* x $(x \geq a)$ *выполняется неравенство* $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ *и если интеграл* $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ *сходится, то интеграл* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ *тоже сходится, при этом* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \leq \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Преобразуем подынтегральную функцию

$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}$, но так как $x \to \infty$, то $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} < \frac{1}{x^2}$.

Определим сходимость интеграла $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} (-\frac{1}{x})\Big|_{1}^{b} = 1$.

Этот интеграл сходится, следовательно, сходится и интеграл $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Теорема 2. *Если для всех* x $(x \geq a)$ *выполняется неравенство* $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$*, причём* $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ *расходится, то расходится интеграл* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int_{1}^{\infty} \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^3}}$.

Замечаем, что $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Тогда $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$.

Следовательно, интеграл расходится.

Если рассматривается интеграл от функции, которая меняет знак в области интегрирования, то имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если интеграл* $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

В этом случае последний интеграл называется *абсолютно сходящимся***.**

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^3}$.

Заметим, что $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right|$. Тогда $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2}$. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{1}{x^3}\right|dx$ сходится. Отсюда следует, что сходится и данный интеграл.

3. Несобственный интеграл П-го рода от разрывной функции

Если на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет определённое число точек разрыва первого рода (скачков или конечных разрывов, рис. 9.2), то интеграл по всему отрезку $[a,b]$ будет равен сумме интегралов по частичным отрезкам, на которые данный отрезок разбивают точки разрыва, то есть

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^d f(x)dx + \ldots + \int\limits_q^b f(x)dx. \qquad (2.2)$$

Определение 7. Если функция в точке $x = a$ или $x = b$, или в какой-либо точке $x = c$ на отрезке интегрирования терпит *бесконечный разрыв*, то эти точки выкалывают из области интегрирования (рис. 24).

Например, на отрезке $[a, b-\varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < b-a$. Тогда интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ - *собственный интеграл*. Если при $\varepsilon \to 0$ существует конечный предел интеграла $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом 2-го рода* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Если точка бесконечного разрыва функции $f(x)$ находится во внутренней точке “*c*” отрезка $[a,b]$ то интеграл записывают в виде

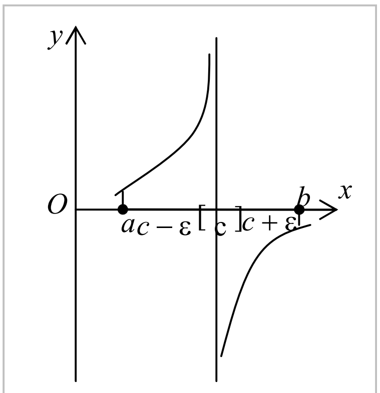

Рис. 24

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (2.3)$$

Это относится к любой точке, в которой функция терпит бесконечный разрыв.

Замечание 9. Иногда несобственные интегралы называют как «*предел от предела*», имея в виду, что определённый интеграл сам является пределом (см. определение 2).

§ 3. Вычисление двукратных интегралов

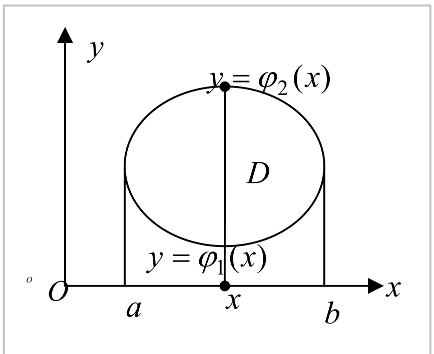

Рис. 25

Если необходимо вычислить площадь плоской фигуры D (рис. 25), то её можно также вычислить с помощью двойного интеграла, который равен двукратному (3.1)

$$S_D = \iint\limits_D d\sigma = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy. \qquad (3.1)$$

Если в каждой точки области D задана функция $f(x,y)$, то интеграл будет иметь вид

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,. \qquad (3.2)$$

§ 4. Вычисление трёхкратных интегралов

Пусть необходимо вычислить объём цилиндра с криволинейными крышкой и дном, уравнения которых показаны на рисунке 26. Тогда нужно проинтегрировать элементарные объёмы $dV = dx\,dy\,dz$.

Интеграл будет иметь вид:

$$V = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} dz \qquad (4.1)$$

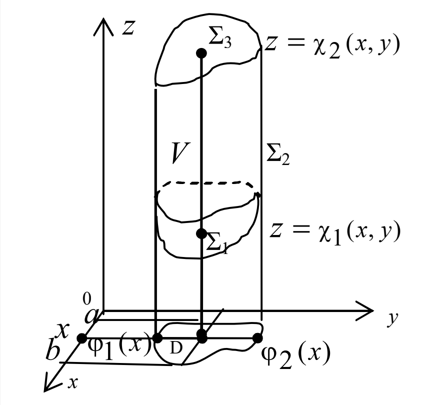

Рис. 26

Если в каждой точке внутри цилиндра задана функция

$$u = u(x, y, z)$$

то интеграл от этой функции по объёму равен

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} u(x,y,z)dz \qquad (4.2)$$

Пределы интегрирования в кратных интегралах расставляются в следующем порядке:

1) расставляются внешние пределы по оси x от a до b;
2) выбирается произвольная точка x на отрезке $[a,b]$ и для выбора пределов по оси y таким образом, чтобы интегрирование происходило только внутри области, ограниченной кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$.
3) Затем в области D выбирается произвольная точка, строится прямая, параллельная оси z и выбирается для интегрирования та область, которая содержит объём V от нижней поверхности Σ_1 до поверхности Σ_2 (рис. 26).

Таким образом, интегрирование производится по всем точкам, принадлежащим объёму V, и в область интегрирования не может попасть ни одна точка вне этого объёма.

§ 5. Применение определённых интегралов

1. Вычисление площади плоской фигуры

а) *в прямоугольных координатах*

Дана кривая $y = f(x)$. Если на отрезке $[a,b]$ $f(x) \ge 0$, то площадь криволинейной трапеции равна

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx\,. \qquad (5.1)$$

Если $f(x) \le 0$, то по формуле (5.1) получится $\int\limits_a^b f(x)dx \le 0$.

Если кривая $y = f(x)$ пересекает ось Ox (рис. 27), то часть площади между кривой и осью имеет знак плюс, а часть – минус. В этом случае нужно взять абсолютное значение интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|dx$. Можно для всех случаев использовать интеграл в виде

$$S=\int_a^b |f(x)|dx\,. \qquad (5.2)$$

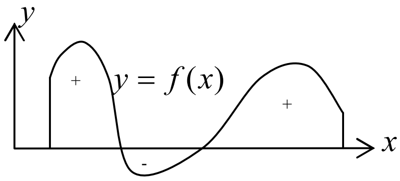

Рис. 27

б) *Вычисление площади, ограниченной двумя кривыми* (рис. 28)

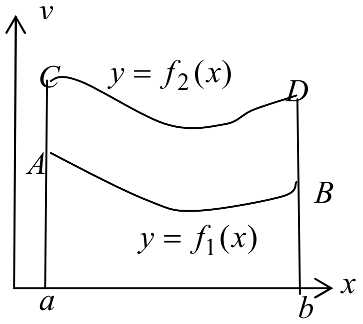

Рис. 28

$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx\,. \qquad (5.3)$$

в) *вычисление площади при параметрическом задании* (рис. 29)

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{array}\right\}, \qquad (5.4)$$

где $\alpha\le t\le\beta$ и $\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b$.

Пусть (5.2) определяет кривую $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда, подставляя значения x и y из формулы (5.4), в формулу $S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx$, и отсюда получаем:

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(x)\varphi'(t)dt\,. \qquad (5.5)$$

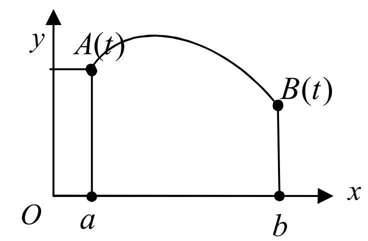

Рис. 29

г) в полярных координатах (рис.30).

Ищется площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $r=f(\varphi)$ и радиусами-векторами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$. Повторяется весь алгоритм определённого интеграла и составляется последовательность интегральных сумм вида

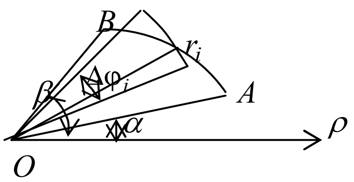

Рис. 30

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(\varphi_i)\cdot\Delta\varphi_i\,. \qquad (5.6)$$

Замечание 1. Здесь следует вспомнить, что площадь круга равна произведению квадрата радиуса окружности – границы круга – на половину угла $r^2\cdot 2\pi/2=\pi\cdot r^2$. Значит площадь сектора равна квадрату радиуса, умноженному на половину угла, то есть $r^2\cdot\Delta\varphi/2$.

$$S=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(\varphi_i)\cdot\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi$$

или окончательно

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\varphi\,. \qquad (5.7)$$

Пример 1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=2-x^2$, $y=x$.

Решение. Определение координат точек пересечения кривых (рис. 31). В точках пересечения ординаты равны, т.е. $x=2-x^2$, Отсюда $x^2+x-2=0, x_1=-2, x_2=1$.

Получены две точки пересечения $M_1(-2,-2)$ и, следовательно, искомая площадь равна

$$S = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x}^{2-x^2} dy\right)dx = \int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,dx =$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{27}{6}.$$

Ответ: $S = 27/6$ кв. ед.

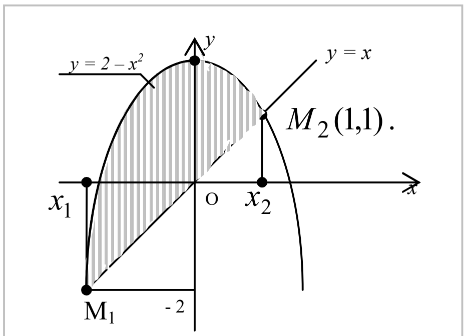

Рис. 31

Пример 2. Вычислить площадь эллипса. Уравнение эллипса записывается в параметрическом виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t,\\ y &= b\sin t.\end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

Решение. Сначала вычисляется площадь верхней половины, а потом результат удваивается

$$S = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t dt =$$

$$= 2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_{0}^{\pi} = \pi ab \text{ êâ.åä.} \quad .$$

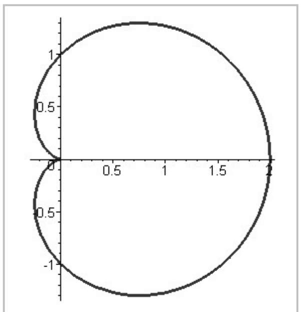

Рис. 32

Пример 3. Вычислить площадь кардиоиды (рис. 32), уравнение которой в полярных координатах имеет вид: $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Решение. Используется формула площади плоской фигуры в полярных координатах

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\varphi. \qquad (5.9)$$

$$S = a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi = a^2\int_0^{\pi}d\varphi + 2a^2\int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi + a^2\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}d\varphi + 2a^2\int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi + a^2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = a^2\int_0^{\pi}d\varphi + 2a^2\int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi + a^2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= a^2\left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Отсюда площадь кардиоиды равна $S = 3\pi a^2/2$ кв. ед.

§ 6. Криволинейные интегралы и их вычисление

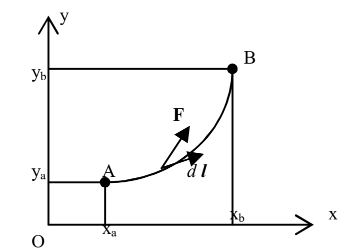

Рис. 33

Замечание 1. Здесь не приводятся криволинейные интегралы *первого рода*.

Криволинейный интеграл второго рода (рис. 33) имеет вид:

$$\int_{\overset{\cup}{AB}}\mathbf{F}\,d\boldsymbol{l} = \int_{\overset{\cup}{AB}}P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \qquad (6.1)$$

где

$$\mathbf{F} = \mathrm{P}(x, y)\mathbf{i} + \mathrm{Q}(x, y)\mathbf{j}, \quad d\boldsymbol{l} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}. \tag{6.2}$$

Для вычисления криволинейного интеграла необходимо иметь уравнение кривой AB в виде $y = f(x)$ или в параметрическом виде $x = x(t), \quad y = y(t)$. Тогда интеграл сводится к обычному определённому интегралу

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int\limits_{x_a}^{x_b} P[x, y(x)]\, dx + Q[x, y(x)]\, y'\, dx \tag{6.3}$$

или при параметрическом задании кривой AB так:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int\limits_{x_a}^{x_b} P[x(t), y(t)]\, x_t'\, dt + Q[x(t), y(t)]\, y_t'\, dt. \tag{6.4}$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл от пары функций $6x^2y, 10xy^2$ (вектор $\mathbf{F} = 6x^2y\mathbf{i} + 10xy^2\mathbf{j}$) вдоль плоской кривой $y = x^3$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 8)$.

Решение. Дан интеграл

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} 6x^2 y dx + 10xy^2 dy.$$

Для решения нужно иметь параметрические уравнения кривой AB. Здесь удобно принять за параметр x. Тогда $x = x,\ y = x^3$. Параметр x меняется от $x_1 = 1$ до $x_2 = 2$. Производные по параметру соответственно равны

$$x_x' = 1, \quad y_x' = 3x^2.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} 6x^2 y dx + 10xy^2 dy = \int\limits_1^2 6x^2 x^3 dx + 10xx^6 3x^2 dx = \int\limits_1^2 6x^5 dx + 30x^9 dx = \left[x^6 + 3x^{10}\right]_1^2 = 3132.$$

Замечание 2. Существует формула для вычисления площади с помощью криволинейного интеграла. Она имеет вид:

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x dy - y dx. \tag{6.5}$$

Пример 2. Вычислить площадь эллипса, заданного параметрически,

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Решение. По формуле (6.5) находим

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t(-a\sin t)]dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [a\, b(\cos^2 t + \sin^2 t)]dt = \pi ab \text{ кв. ед.}$$

Задача 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L x e^{x^3} dy + y dx$ вдоль кривой $y = x^2$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

Решение. Для решения необходимо использовать уравнение кривой интегрирования. Тогда с учётом $y = x^2$ и $dy = 2x dx$. Отсюда

$$\int_L x e^{x^3} dy + ydx = \int_0^1 xe^{x^3} 2xdx + \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}\int_0^1 e^{x^3} 3x^2 dx + \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} e^{x^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(e-1) + \frac{1}{3} = \frac{2e-3}{3}.$$

Ответ: $\int_L x e^{x^3} dy + ydx = \frac{2e-3}{3}$.

Задача 2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение, проверив, удовлетворяют ли функции условиям Коши –Римана

$$(y^2 e^{xy^2} + 3)\, dx + (2xye^{xy^2} - 1)dy = 0 .$$

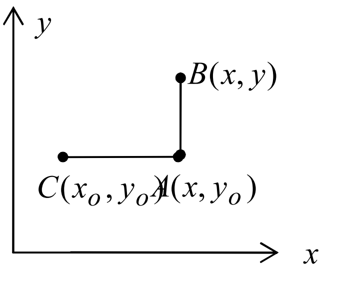

Рис. 34

Решение. Рассмотрим данное выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, в котором

$P(x,y) = (y^2 e^{xy^2} + 3)$, $\quad Q(x,y) = (2xye^{xy^2} - 1)$.

Условие Коши – Римана $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, (6.6)

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2ye^{xy^2} + \cdot 2xy^3 e^{xy^2}, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2ye^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}.$$

Отсюда видно, что условие (6.6) выполнено, значит можно найти потенциал, интеграл не зависит от пути интегрирования, поэтому проинтегрируем это выражение по пути, показанному на рис. 34.

Найдём $U(x,y) = \int_{\overrightarrow{CA}} P(x,y)dx + U(x_o, y)$,

$$U(x,y) = \int_{CA} (y^2 e^{xy^2} + 3)dx + U(x_o, y) = \int_{x_o}^{x} (y^2 e^{xy^2} + 3)dx = \left[e^{xy^2} + 3x\right]_{x_o}^{x} = e^{xy^2} + 3x - e^{x_o y^2} - 3x_o .$$

Для того, чтобы найти $U(x_o, y)$, используем второе слагаемое

$$U(x_o, y) = \int_{AB} Q(x_o, y)dy = \int_{y_o}^{y} (2x_o y e^{x_o y^2} - 1)\ldots dy = e^{x_o y^2}\Big|_{y_o}^{y} - y\Big|_{y_o}^{y} = e^{x_o y^2} - e^{x_o y_o^2} - y + y_o .$$

Отсюда, подставляя в заданный интеграл, получим

$$U(x,y) = e^{xy^2} + 3x - e^{x_o y^2} - 3x_o + e^{x_o y^2} - e^{x_o y_o^2} - y + y_o = e^{xy^2} + 3x - y + C .$$

Ответ: $U(x,y) = e^{xy^2} + 3x - y + C$, где $C = -3x_o - e^{x_o y_o^2} + y_o$.

1. **Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования**

Рассмотрим криволинейный интеграл $\int_L Xdx + Ydy$

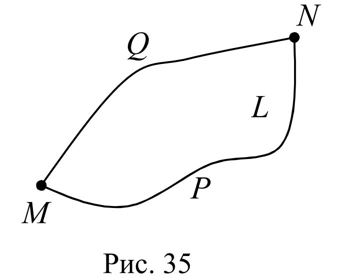

Рис. 35

взятый по некоторой плоской кривой L, соединяющей точки M и N (рис. 35). Предположим, что функции $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ имеют непрерывные частные производные в рассматриваемой области D. Выясним, при каких условиях криволинейный интеграл не зависит от формы кривой L, а зависит только от начальной и конечной точек M и N.

Рассмотрим две произвольные кривые MPN и MQN, соединяющие точки M и N. Пусть

$$\int_{MPN} Xdx + Ydy = \int_{MQN} Xdx + Ydy,$$

то есть

$$\int_{MPN} Xdx + Ydy - \int_{MQN} Xdx + Ydy = 0.$$

Тогда с учётом направления интегрирования можно записать

$$\int_{MPN} Xdx + Ydy + \int_{NQM} Xdx + Ydy = 0,$$

то есть интеграл по замкнутому контуру равен нулю:

$$\oint_{L} Xdx + Ydy = 0,$$

где $L = MPNQM$, причём, контур L можно считать произвольным.

Вывод: из того, что криволинейный интеграл *не зависит от формы кривой,* соединяющей две точки в области D, следует, что в этой области этот *криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.*

Справедливо и *обратное заключение*: если *криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю,* то он не зависит только от положения начальной и конечной точек, но *не зависит* от формы соединяющей их кривой.

Возникает вопрос: каким условиям должны удовлетворять функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, чтобы выполнялись эти утверждения?

Теорема. *Пусть во всех точках некоторой области* D *функции* $X(x, y)$ *и* $Y(x, y)$ *вместе со своими частными производными* $\dfrac{\partial X(x, y)}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$ *непрерывны. Тогда для того, чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру* L*, лежащему в этой области, был равен нулю, то есть чтобы*

$$\oint_{L} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0, \tag{6.7}$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{6.8}$$

во всех точках области D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольный замкнутый контур L в области D и для него выпишем формулу Грина

$$\iint_{D} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{L} Xdx + Ydy.$$

.

Если выполняется условие (6.8), то двойной интеграл тождественно равен нулю и, следовательно

$$\oint_{L} Xdx + Ydy = 0.$$

Таким образом, *достаточность* условия (6.8) доказана.

Докажем *необходимость* этого условия, то есть, докажем, что если равенство (6.7) выполняется для любой замкнутой кривой L в области D, то в каждой точке этой области выполняется и условие (6.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о делается от противного: допустим, что равенство (6.7) выполняется, то есть $\oint_{L} Xdx + Ydy = 0$, а условие (6.8) не выполняется, то есть $\dfrac{\partial Y}{\partial x} \neq \dfrac{\partial X}{\partial y}$ хотя бы в одной точке. Пусть, например, в некоторой точке $P(x_o, y_o)$ имеем неравенство

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}>0 .$$

Так как в левой части неравенства стоят непрерывные функции, то она будет положительна и больше некоторого числа $\delta>0$ во всех точках некоторой достаточно малой области D', содержащей точку $P(x_o, y_o)$. Возьмём двойной интеграл по этой области от разности

$$\iint_{D'}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy>\iint_{D'}\delta dxdy=\delta\iint_{D'}dxdy=\delta\cdot D'>0$$

Но по формуле Грина левая часть последнего неравенства равна криволинейному интегралу по границе L области D, который, по предположению, равен нулю. Следовательно, последнее неравенство противоречит условию (6.7), и значит, предположение, что

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}$$

отлично от нуля хотя бы в одной точке, неверно. Отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0$$

во всех точках области D. Таким образом, теорема полностью *доказана.*

Докажем, что полученные выше условия равносильны тому, что подынтегральная функция криволинейного интеграла *имеет потенциал,* то есть

$$\mathbf{F}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}=\mathrm{grad}U=\nabla U . \tag{6.9}$$

Пусть $Xdx+Ydy$ является полным дифференциалом некоторой функции

$$Xdx+Ydy=dU .$$

Это может быть, если существует такая функция U, производные от которой соответственно равны

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}, \tag{6.10}$$

это справедливо, если $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$. Но если выполняется условие (6.10), то $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ равносильно равенству $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$, которое справедливо в силу свойств дифференцирования функций нескольких переменных. Отсюда следует, что $Xdx+Ydy=dU$. Тогда

$$\int_M^N Xdx+Ydy=\int_M^N dU=U\Big|_M^N=U(M)-U(N),$$

то есть, интеграл зависит только от положения начальной и конечной точек кривой интегрирования и не зависит от формы кривой, соединяющей эти точки. Можно записать так:

$$\mathbf{F}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}=\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}=\nabla U=\mathrm{grad}U .$$

Здесь вектор $\mathbf{F}$ является градиентом функции U, то есть, $\mathbf{F}=\mathrm{grad}U$.

Функция U в этом случае называется *потенциалом* векторного поля $\mathbf{F}$.

Замечание 3. Из всего вышесказанного вытекает, что справедливы *все 4 утверждения*:

1) криволинейный интеграл в области D не зависит от пути интегрирования;
2) криволинейный интеграл по замкнутому контуру L равен нулю;
3) выполняется условие $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$;
4) вектор $\mathbf{F}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}$ имеет потенциал U.

§ 7. Интеграл от параметра

1) Пусть задан интеграл, подынтегральная функция которого зависит от параметра

$$I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)\,d\,x\,. \tag{7.1}$$

Легко показать, что

$$I'_\alpha(\alpha)=\frac{\partial}{\partial a}\left[\int_a^b f(x,\alpha)\,d\,x\right]=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,d\,x \tag{7.2}$$

- это формула Лейбница.

2) Предположим, что в интеграле (7.1) пределы интегрирования a и b являются функциями того же параметра

$$I(\alpha)=\Phi[\alpha,a(\alpha),b(\alpha)]=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\,d\,x\,, \tag{7.3}$$

тогда

$$I'_\alpha(\alpha)=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{d\,a}{d\,\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{d\,b}{d\,\alpha}. \tag{7.4}$$

Используя теорему о дифференцировании интеграла по верхнему пределу, получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,\alpha)\,d\,x=f[b(\alpha),\alpha],$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\alpha)\,d\,x=-\frac{\partial}{\partial a}a\int_b^b f(x,\alpha)\,d\,x=-f[a(\alpha),\alpha],$$

Подставляя в формулу (8.4), получим

$$I'_\alpha(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,d\,x-f[a(\alpha),\alpha]\frac{d\,a}{d\,\alpha}+f[b(\alpha),\alpha]\frac{d\,b}{d\,\alpha}\,.$$

Пример. Найти производную интеграла, нижний предел которого зависит от параметра

Пусть дан интеграл, у которого нижний предел зависит от параметра

$$f(x,y,z)=\pi\,a\,b\,c\int_\lambda^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+u}-\frac{y^2}{b^2+u}-\frac{z^2}{c^2+u}\right)\frac{d\,u}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}},$$

так как

$$I'_\lambda(\lambda)=\pi\,a\,b\,c\left[\int_\lambda^\infty f'_\lambda(x,y,z,u)\,du-f[\lambda,x,y,z]\frac{d\,\lambda}{d\,\lambda}\right]=0-\pi\,a\,b\,c\cdot f[\lambda,x,y,z]=$$

$$=-\pi\,a\,b\,c\left(1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}=-\pi\,a\,b\,c\left(1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

ГЛАВА 4. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Предметом раздела «Теория поля» является описание свойств сплошной среды. Задачи физики, гидромеханики, электротехники описываются с помощью математического аппарата теории поля. В связи с этим необходимо знать и владеть операторами, которые используются в данном разделе высшей математики. Практически сплошная среда представляет собой скалярные и векторные поля. Для описания их основных характеристик используется оператор Гамильтона.

Уильям Роуан Гамильтон
1805 –1865

§ 1. Оператор Гамильтона

Определение 1. *Оператором Гамильтона*[2] называется векторно-дифференциальный оператор вида

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{1.1}$$

Оператор Гамильтона можно применять как вектор до тех пор, пока выражение, к которому он применяется не содержит произведения переменных величин. Если некоторое выражение содержит произведение двух или нескольких переменных сомножителей, то, применяя к этому выражению оператор Гамильтона, нельзя руководствоваться обычными правилами векторной алгебры.

1) Умножение оператора Гамильтона на скалярную функцию $U(x, y, z)$ даёт одну из характеристик скалярного поля:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\,, \tag{1.2}$$

$$\nabla\,\mathrm{U} = \operatorname{grad} U\,, \tag{1.3}$$

которая называется *градиентом скалярного поля*

2) *Скалярное умножение* оператора Гамильтона на векторную функцию

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k} \tag{1.4}$$

выполняется как скалярное произведение двух векторов, то есть, равно сумме произведений одноимённых координат. Координатами оператора Гамильтона являются $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}$, но в произведении они выполняют роль операторов дифференцирования

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,. \tag{1.5}$$

Полученная дифференциальная функция называется *дивергенцией вектора* $\mathbf{F}$. Отсюда выражение (1.4) можно записать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{1.5*}$$

и в векторном виде так:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{F}\,. \tag{1.6}$$

---

[2] В 1853 году В. Р. Гамильтон ввёл этот оператор и придумал для него символ ∇ в виде перевёрнутой греческой буквы **Δ** (дельта). У Гамильтона острие символа указывало налево, позже в работах П. Г. Тэта символ приобрёл современный вид. Гамильтон назвал этот символ словом «атлед» (слово «дельта», прочитанное наоборот), однако позднее английские учёные, в том числе О. Хевисайд, стали называть этот символ «на́бла» из-за сходства с остовом древне-ассирийского музыкального инструмента *наблы*, а оператор получил название *оператора Гамильтона*, или *оператора набла*..

3) *Векторное умножение* оператора Гамильтона на векторную функцию

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k} \tag{1.7}$$

выполняется как векторное произведение двух векторов в виде определителя

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

Эта функция называется «*ротор вектора* $\mathbf{a}$». Можно записать, что ротором вектора $\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$ называется выражение

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}. \tag{1.9}$$

Для установления соответствующих правил действия рассмотрим некоторые примеры.

4) Пусть $U = U$(x,y,z) - скалярное поле и $\mathbf{F} = \mathbf{F}$(x,y,z) - векторное поле. Вычислим дивергенцию $\operatorname{div}(U\mathbf{A})$, т.е. $\nabla(U\mathbf{A})$. Применение вектора ∇ сводится к применению входящих в него операций дифференцирования. Но правило дифференцирования произведения состоит в том, что дифференцируем сначала первый сомножитель, а остальные рассматриваются как постоянные, затем дифференцируем второй сомножитель, считая остальные постоянными, и т.д., а затем берём сумму полученных выражений.

$$\nabla(U\mathbf{A}) = \nabla U \cdot \mathbf{A} + U \cdot \nabla\mathbf{A}.$$

Множители, на которые ∇ не действует, можно высвободить из-под оператора ∇. Таким образом, получаем

$$\operatorname{div}(U \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}U + U \cdot \operatorname{div}\mathbf{A}. \tag{1.10}$$

5) Рассмотрим выражение grad ($U\ V$), которое в символической записи имеет вид $\nabla(U\ V)$.

Руководствуясь сказанным выше, имеем

$$\nabla(U \cdot V) = V \cdot \nabla U + U \cdot \nabla V,$$

т.е. в обычных обозначениях

$$\operatorname{grad}(U \cdot V) = V \cdot \operatorname{grad}U + U \cdot \operatorname{grad}V.$$

6) Вычислим выражение $\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, которое в символической записи пишется так $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

Здесь следует применить известную формулу двойного векторного произведения, которую удобно записать так: произведение $\mathbf{a} \times (\mathbf{b},\times\mathbf{c})$ равно среднему вектору **b**, умноженному на скалярное произведение крайних (т.е. на $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$), минус внутренний крайний вектор, (т.е. **c**), умноженный на скалярное произведение двух остальных (т.е. на $(\mathbf{a},\cdot\mathbf{b})$). Это правило, как легко проверить, имеет силу и для двойного векторного произведения, имеющего вид $\mathbf{a} \times (\mathbf{b},\times\mathbf{c})$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \tag{1.11}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \tag{1.12}$$

Здесь следует учесть, что ∇ применяется к произведению по такой же схеме, но действует как вектор

$$(\nabla\mathbf{B})\mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}.$$

Отсюда получается

$$(\nabla\mathbf{B})\mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}. \tag{1.13}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} = \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} = \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A}. \end{aligned}$$

$$\text{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) == (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\text{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\text{div}\mathbf{A}\,. \tag{1.14}$$

Из примеров ясны *правила*, которые надо применять, пользуясь оператором ∇:
1) в выражениях, содержащих одну переменную, с ∇ можно поступать как с обычным вектором;
2) в выражениях, содержащим произведения нескольких переменных, оператор ∇ применяется в соответствии с правилом дифференцирования произведения;
3) применение оператора ∇ к сумме любых слагаемых всегда сводится к применению ∇ к каждому из слагаемых в отдельности.

Применение оператора Гамильтона к более сложным выражением показано в таблице 1.

Таблица 1

№ п/п	Общий вид	Вид через оператор
1	$\text{div}(U\cdot\mathbf{F}) = \mathbf{F}\cdot\text{grad}U + U\cdot\text{div}\,\mathbf{F}$	$\nabla\,(U\cdot\mathbf{F}) = \mathbf{F}\cdot\nabla U + U\cdot\nabla\mathbf{F}$
2	$\text{grad}(U\cdot V) = V\cdot\text{grad}U + U\cdot\text{grad}V$	$\nabla\,(U\cdot V) = V\cdot\nabla U + U\cdot\nabla V$
3	$\text{rot}(U\cdot\mathbf{F}) = \text{grad}U\times\mathbf{F} + U\cdot\text{rot}\,\mathbf{F}$	$\nabla\cdot(U\cdot\mathbf{F}) = \nabla\cdot U\times\mathbf{F} + U\cdot\nabla\times\mathbf{F}$
4	$\text{d iv}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\text{rot}\mathbf{A}) - (\mathbf{A},\text{rot}\mathbf{B})$	$\text{d iv}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\text{rot}\mathbf{A}) - (\mathbf{A},\text{rot}\mathbf{B})$
5	$\text{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) =$ $= (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\text{div}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\cdot\text{div}\,\mathbf{A}$	$\nabla\cdot(U\cdot\mathbf{F}) =$ $= (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}\cdot(\nabla\,\mathbf{A})$
6	$\text{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) =$ $= (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\text{rot}\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\text{rot}\,\mathbf{A}$	$\nabla\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) =$ $= (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$
7	Из (6) $\text{grad}\,\dfrac{A^2}{2} = (\mathbf{A},\nabla)\mathbf{A} + [\mathbf{A},\ \text{rot}\ \mathbf{A}]$	$\nabla\cdot\dfrac{A^2}{2} = (\mathbf{A},\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{A})$
8	$\text{div}\,\text{rot}\,\mathbf{A} = 0$	$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$
9	$\text{rot}\,\text{grad}U = 0$	$\text{div}\,\text{rot}\,\mathbf{A} = 0$
10	$\text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{A} = \nabla\cdot\text{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}$	$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$
11	$\Delta(U\cdot V) = U\,\Delta V + V\,\Delta U + 2\nabla U\cdot\nabla V$	
12	$(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} = \frac{1}{2}[\nabla(\mathbf{a}\,\mathbf{b}) - \nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) - \mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a}) - \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}) - \mathbf{b}\,(\nabla\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{a}\,(\nabla\cdot\mathbf{b})]$	
13	$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})$	
14	$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{a} = \upsilon_x\dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial x} + \upsilon_{\mathbf{y}}\dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial y} + \upsilon_{\mathbf{z}}\dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}$	

§ 2. Скалярное поле

Определение 1. *Скалярным полем* называется часть пространства, каждой точке которого соответствует одно значение скалярной функции (рис. 36)

$$U = U(x, y, z) = U(M)\,. \tag{2.1}$$

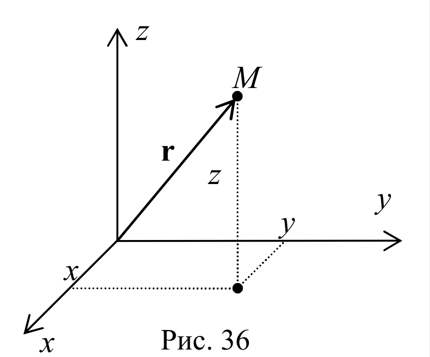

Рис. 36

Определение 2. *Аналитически* скалярное поле можно описать с помощью радиуса – вектора точки. $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(x, y, z)$

$$U = U(\mathbf{r})\,. \tag{2.2}$$

Определение 3. *Геометрическими* характеристиками скалярного поля являются *поверхности равного уровня* (рис. 37).

Уравнения поверхностей равного уровня являются функциями координат и некоторой константы C_i.

$$U(x, y, z) = C_i, \tag{2.3}$$

где C_i - константа i - той поверхности

Определение 4. *Дифференциальной скалярной* характеристикой скалярного поля является *производная скалярной функции по направлению* вектора $\mathbf{s}$.

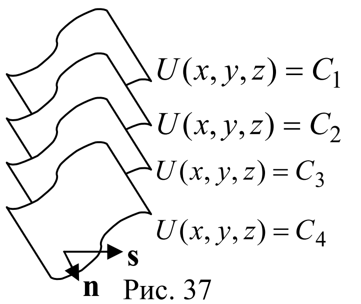

Рис. 37

Для того, чтобы получить производную по направлению, дадим приращение $\Delta\mathbf{s}$ вектору, выходящему из точки M_o (рис. 38). $\Delta\mathbf{s}$ можно представить в виде вектора $\Delta\mathbf{s} = \Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j} + \Delta z\,\mathbf{k}$. Приращение функции (2.2) обозначим ΔU и выразим через производные (вспомним связь приращения с производной функции $\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$).

Тогда

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y + \varepsilon_3\,\Delta z, \tag{2.4}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ стремятся к нулю, когда $\Delta\mathbf{s} \to 0$. Разделим все члены равенства (2.4) на Δs

$$\frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}. \tag{2.5}$$

Из рис. 38 видно, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

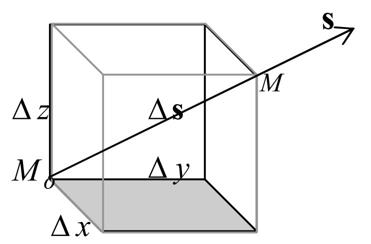

Рис. 38

Тогда

$$\frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\,\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma.. \tag{2.6}$$

Предел отношения $\dfrac{\Delta U}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ называется *производной от функции* $U = U(x, y, z)$ в точке (x, y, z) *по направлению вектора* $\mathbf{s}$ и обозначается $\dfrac{\partial U}{\partial s}$, то есть

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{\partial U}{\partial s}. \tag{2.7}$$

Переходя к пределу в равенстве (2.6), получим

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma. \tag{2.8}$$

Замечание 1. Из формулы (2.8) видно, что, зная производные скалярной функции, можно найти производную по любому направлению $\mathbf{s}$.

Замечание 2. Здесь пишутся частные производные, потому что они имеют разное значение в зависимости от направления.

Определение 5. *Дифференциальной векторной* характеристикой скалярного поля является *градиент,* который выражается формулой

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{2.9}$$

Теорема 1. *Пусть дано скалярное поле* $U = U(x, y, z)$ (рис. 39) *и в этом скалярном поле определено поле градиента*

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Производная $\dfrac{\partial U}{\partial s}$ *по направлению некоторого вектора* $\mathbf{s}$ *равняется проекции вектор*а $\operatorname{grad} U$ *на вектор* $\mathbf{s}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим единичный вектор $\mathbf{s}_o$, соответствующий вектору $\mathbf{s}$

$$\mathbf{s}_o = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma. \qquad (2.10)$$

Скалярное произведение $\operatorname{grad} U$ на $\mathbf{s}_o$:

$$\operatorname{gradU} \cdot \mathbf{s}_o = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (2.11)$$

Выражение, стоящее в правой части (2.11), является производной функции U по вектору $\mathbf{s}$, Тогда

$$\operatorname{gradU} \cdot \mathbf{s}_o = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}}. \qquad (2.12)$$

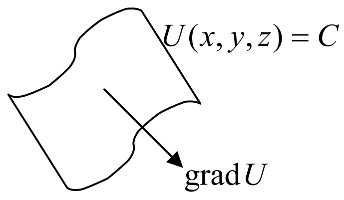

Рис. 39

Если обозначить угол между $\operatorname{grad} U$ и $\mathbf{s}$ как φ, то можно записать скалярное произведение в виде

$$|\operatorname{gradU}| \cdot |\mathbf{s}_o| \cos\varphi = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}}. \qquad (2.13)$$

Учитывая, что модуль единичного вектора равен единице, можно написать

$$|\operatorname{gradU}| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}}, \qquad (2.14)$$

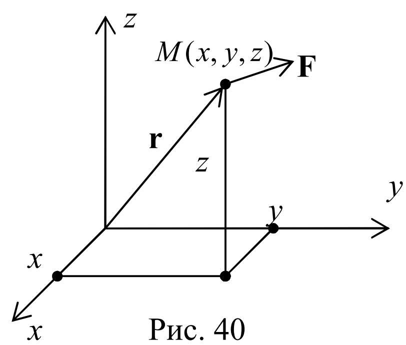

Рис. 40

а отсюда видно, что слева стоит проекция градиента функции U на вектор $\mathbf{s}$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. Эта теорема устанавливает *связь* между производной по направлению и градиентом скалярной функции $U = U(x, y, z)$.

Замечание 4. Если учесть, что нормаль к поверхности $F(x, y, z) = 0$ (из курса аналитической геометрии) имеет вид

$$\mathbf{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}, \qquad (2.15)$$

то легко видеть, что вектор градиента $\operatorname{grad} U = \dfrac{\partial U}{\partial x} i + \dfrac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}$ направлен по нормали к поверхности равного уровня $U(x, y, z) = C$ (рис. 40).

§ 3. Векторное поле

Определение 1. *Векторным полем* называется часть пространства, каждой точке которого соответствует одно значение вектора $\mathbf{F}$ (рис. 41).

Определение 2. *Аналитически* векторное поле можно описать в виде функции

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k} \qquad (3.1)$$

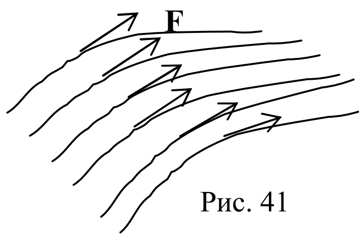

Рис. 41

или

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r})\,\mathbf{i} + Q(\mathbf{r})\,\mathbf{j} + R(\mathbf{r})\,\mathbf{k}\,.$$

Замечание 1. Если скалярное поле определяется одной функцией, то векторное поле определяют три функции координат: $P(x,y,z)$**,** $Q(x,y,z)$**,** $R(x,y,z)$**.**

Определение 3. *Основными* характеристиками векторного поля являются *поток, дивергенция, циркуляция, ротор.*

1.Поток вектора

Поток вектора является интегральной характеристикой векторного поля**.** Рассмотрим поле вектора $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, имеющего компоненты $P(\boldsymbol{r}), Q(\boldsymbol{r}), R(\boldsymbol{r})$. Примерами полей вектора могут служить поле скоростей, поле ускорений, силовое поле.

Определение 4. *Потоком* векторного поля через поверхность S называется поверхностный интеграл, взятый от скалярного произведения вектора поля $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ на вектор нормали к поверхности S:

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds\,. \tag{3.2}$$

Замечание 2. *Поток* векторного поля является *скалярной* величиной.

Замечание 3. Если представить векторное поле как поле скоростей движущейся жидкости, то поток П выражает объём жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени. (расход).

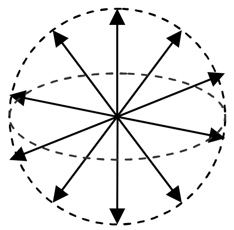
Рис. 42

Определение 5. *Дивергенцией векторного поля* называется предел отношения потока через замкнутую поверхность S к объёму, ограниченного этой поверхностью (рис. 42), когда объём стремится к нулю (стягивается в точку).

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint\!\!\oint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS}{V}\,, \tag{3.3}$$

за V принимаем бесконечно малый объём.

Замечание 4. В *гамильтоновом обозначении* дивергенция представляет собой скалярное произведение оператора Гамильтона на векторную функцию $\mathbf{F}$. *Это дифференциальная характеристика векторного поля.*

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \operatorname{div}\mathbf{F}\,. \tag{3.4}$$

Определение 4. *Дивергенция вектора* $\mathbf{F}$ является *дифференциальной скалярной характеристикой* векторного поля.

Расчётные формулы дивергенции имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \\ \nabla\cdot\mathbf{F} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Замечание 6. *Дивергенция* выражает *интенсивность источника* (или стока) в точке векторного поля.

Поток можно выразить через дивергенцию следующим образом:

$$\Pi = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV\,. \tag{3.6}$$

Замечание 7. *Поток* вектора через замкнутую поверхность S следует рассматривать как *суммарную мощность источников и стоков*, находящихся в данном объёме, ограниченном поверхностью S (3.2). Это *интегральная характеристика* векторного поля.

Остроградский М.В.
1801 - 1861

Формула Остроградского – Гаусса

Эта формула связывает тройной интеграл по замкнутой пространственной области с поверхностным интегралом, взятому по внешней стороне поверхности, ограничивающей эту область.

Определение 1. Пространственная область V, ограниченная двумя кусочно гладкими поверхностями Σ_1 и Σ_3, заданными в виде

$$z_1 = z_1(x, y) \text{ и } z_2 = z_2(x, y) \tag{3.7}$$

и боковой цилиндрической поверхностью Σ_3 (рис. 43) с образующими, параллельными оси Oz, называются «z – *цилиндрической областью*».

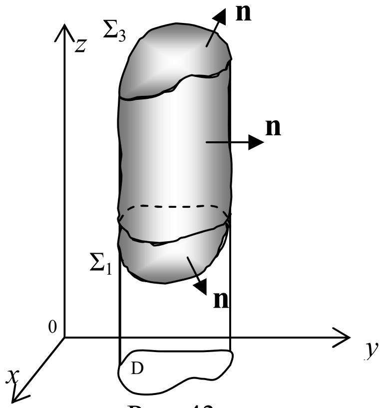

Рис. 43

Поверхности $z_1 = z_1(x, y)$ и $z_2 = z_2(x, y)$ - криволинейные основания (нижнее и верхнее).

Замечание 1. Аналогично можно построить «x - цилиндрическую» и « y – цилиндрическую» области.

Вывод формулы Остроградского – Гаусса

Формула Остроградского-Гаусса выводится следующим образом. Рассмотрим интеграл $\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$.

Третий интеграл из этой суммы равен

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint\limits_{S_D} \left[\int\limits_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dxdy = \iint\limits_{S_D} \left[R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)) \right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_D} R(x, y, z_2(x, y))\, dxdy - \iint\limits_{S_D} R(x, y, z_1(x, y))\, dxdy.$$

Первый из этих интегралов равен поверхностному интегралу, взятому по верхней поверхности Σ_3 с уравнением $z = z_3(x, y)$, а второй – по нижней поверхности Σ_3 с уравнением $z = z_1(x, y)$, поэтому можно записать

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint\limits_{\Sigma_3} R(x, y, z)\, dxdy + \iint\limits_{\Sigma_1} R(x, y, z)\, dxdy,$$

Карл Фридрих Гаусс
1777 - 1855

где первый интеграл берётся по верхней стороне поверхности Σ_3, а второй по нижней стороне поверхности Σ_3. Прибавим такой же интеграл по поверхности Σ_2, который равен нулю, так как нормаль перпендикулярна оси z, в направлении которой берётся интеграл, $\iint\limits_{\Sigma_2} R(x, y, z)\, dxdy = 0$. Поэтому можно записать

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint\limits_{\Sigma_3} R(x, y, z)\, dxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} R(x, y, z)\, dxdy + \iint\limits_{\Sigma_1} R(x, y, z)\, dxdy = \oint\!\!\oint\limits_{\Sigma} R\, dxdy = \oint\!\!\oint\limits_{\Sigma} R \cos(\mathbf{n}, z)\, d\sigma$$

или, рассматривая $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$, получим

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \oint\!\!\oint_\Sigma R\cos(\mathbf{n}, z)\, d\sigma .$$

Аналогично получается

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \oint\!\!\oint_\Sigma R\cos(\mathbf{n}, y)\, d\sigma,$$

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dV = \oint\!\!\oint_\Sigma R\cos(\mathbf{n}, x)\, d\sigma.$$

Отсюда можно записать

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \oint\!\!\oint_S \left(P \cdot \cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) dS . \tag{3.8}$$

Учитывая, что $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, а $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$, получим

$$\iiint_V \mathrm{div}\, \overline{F}\, dV = \oint\!\!\oint_S \overline{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma . \tag{3.9}$$

Из формулы (3.8) получают *рабочую формулу*

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \iint_\Sigma P\, d\, y\, d\, z + Q\, d\, x\, d\, z + R\, d\, x\, d\, y. \tag{3.9*}$$

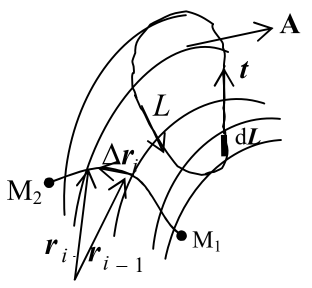

Рис. 44

2. Циркуляция вектора (*Вторая интегральная характеристика векторного поля*)**.** В векторном поле $\boldsymbol{A}$ рассматривается некоторая кривая M_1M_2 (рис.44) и разбивается с помощью точек $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_n$ на малые участки $\Delta\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}$. Составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i \cdot \Delta\boldsymbol{r}_i \ , \tag{3.10}$$

где $\boldsymbol{A}_i$ – значение вектора поля в какой-нибудь точке участка $\Delta\boldsymbol{r}_i$.

Определение 1. Если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i \cdot \Delta\boldsymbol{r}_i$ при неограниченном возрастании числа элементов $\Delta\boldsymbol{r}_i$ и убывании до нуля длины всех элементов, то он называется *криволинейным интегралом* вдоль M_1M_2 и обозначается

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i \cdot \Delta\boldsymbol{r}_i = \int_{M_1M_2} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{M_1M_2} A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 \ . \tag{3.11}$$

Здесь вектор $\boldsymbol{dr}$ направлен в каждой точке кривой M_1M_2 по касательной, и его модуль равен дифференциалу дуги кривой:

$$\left| d\boldsymbol{r} \right| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = dL . \tag{3.12}$$

Определение 2. Криволинейный интеграл вида (3.11) по замкнутому контуру называется *циркуляцией* вектора $\boldsymbol{A}$ по контуру $\boldsymbol{L}$

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{L} . \tag{3.13}$$

Здесь $d\boldsymbol{L}$ - направленный элемент контура, который равен $d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{t}\, dL$ ($\boldsymbol{t}$ - орт касательной к контуру, dL - дифференциал длины дуги контура).

Замечание 1. Если $\boldsymbol{A}$ – сила, то циркуляция представляет собой *работу* этой силы при движении по контуру.

§ 4. Теоремы Грина и Стокса

Джордж Габриель Стокс
1819 – 1903

Теорема Грина устанавливает связь криволинейного интеграла с двойным. Пусть задано векторное поле

$$\boldsymbol{F}(x_1,x_2,x_3)=P(x_1,x_2,x_3)+Q(x_1,x_2,x_3)+R(x_1,x_2,x_3) \qquad (4.14)$$

и заданы все производные $\dfrac{\partial P}{\partial x_2};\dfrac{\partial P}{\partial x_3};\dfrac{\partial Q}{\partial x_1};\dfrac{\partial Q}{\partial x_3};\dfrac{\partial R}{\partial x_1};\dfrac{\partial R}{\partial x_2}$.

Теорема Грина. *Пусть на плоскости заданы непрерывные функции* $P(x_1,x_2),Q(x_1,x_2)$ *и их производные* $\dfrac{\partial P}{\partial x_3}$ *и* $\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}$. *Тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)d\sigma=\oint\limits_{l}Pdx_1+Qdx_2\,. \qquad (4.15)$$

Двойной интеграл может быть представлен в виде двукратного интеграла. Для примера рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial P}{\partial x_2}d\sigma=\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial P}{\partial x_2}dx_1dx_2=\int\limits_a^b dx_1\int\limits_{\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)}\frac{\partial P}{\partial x_2}dx_2=$$

$$=\int\limits_a^b[P(x_1,\varphi_2(x_1))-P(x_1,\varphi_1(x_1))]dx_1=\int\limits_{A\alpha B}P(x_1,x_2)dx_1-\int\limits_{A\beta B}P(x_1,x_2)dx_1.$$

Меняя в первом интеграле направление интегрирования, получим (рис. 45)

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial P}{\partial x_2}d\sigma=-\int\limits_{B\alpha A}P(x_1,x_2)dx_1-\int\limits_{A\beta B}P(x_1,x_2)dx_1=-\oint\limits_{l}P(x_1,x_2)\,dx_1\,. \qquad (4.16)$$

Аналогично получается

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial Q}{\partial x_1}d\sigma=\oint\limits_{l}Q\,dl\,. \qquad (4.17)$$

Вычитая из (4.17) равенство (4.16), получим *формулу Грина*

$$\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)d\sigma=\oint\limits_{l}Pdx_1+Qdx_2\,.$$

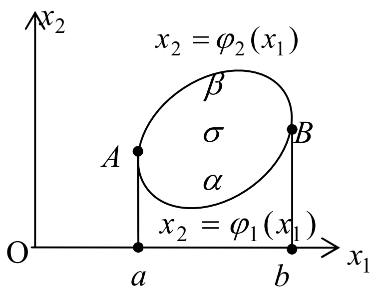

Рис. 45

Теорема Стокса. *Если функции* $P(x_1,x_2,x_3),Q(x_1,x_2,x_3),R(x_1,x_2,x_3)$, $\dfrac{\partial P}{\partial x_2},\dfrac{\partial P}{\partial x_3},\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x_3},\dfrac{\partial R}{\partial x_1},\dfrac{\partial R}{\partial x_2}$ *непрерывны на поверхности* S *в замкнутом контуре* L, *который является границей* S, *то справедливо равенство*

$$\iint\limits_{S}\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}-\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)\cos(\boldsymbol{n},x_1)+\left(\frac{\partial P}{\partial x_3}-\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)\cos(\boldsymbol{n},x_2)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)\cos(\boldsymbol{n},x_3)\right\}dS=\oint\limits_{L}Pdx_1+Qdx_2+Rdx_3, \qquad (4.18)$$

где $\boldsymbol{n}$ *- орт нормали к поверхности* S (рис. 46).

Поверхность S считается двусторонней, а положительное направление нормали $\boldsymbol{n}$ на ней связано с направлением обхода контура L.

Определение 3. *Положительный* обход контура L выбирается так, чтобы поверхность всегда оставалась слева от наблюдателя, обходящего контур так, что положительный орт $\boldsymbol{n}$ в точках контура L направлен от ног к голове наблюдателя.

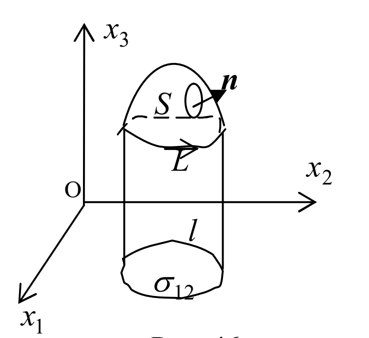

Рис. 46

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы Стокса основано на теореме Грина (которая относится к плоскости).

За положительный обход контура L принимается направление против часовой стрелки. В этом случае орт $\boldsymbol{n}$ составляет с осью x_3 острый угол. Тогда

$$d\sigma_{12} = dS\cos(\boldsymbol{n}, x_3) \text{ при } \cos(\boldsymbol{n}, x_3) > 0 .$$

Преобразуем интеграл $\oint\limits_L P(x_1, x_2, x_3)\, dx_1$, используя тот факт, что контур L принадлежит поверхности S, уравнение которой может быть записано в виде $x_3 = f(x_1, x_2)$. Тогда подынтегральная функция может быть записана в виде $P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]$. Эта функция содержит только x_1, x_2, которые для переменной точки на контуре L имеют те же значения, что и в соответствующей точке на контуре l. Поэтому интегрирование по L можно заменить на интегрирование по l, то есть, (рис. 47)

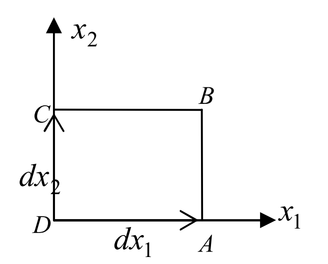

Рис. 47

$$\oint\limits_L P(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 = \oint\limits_L P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]\, dx_1 . \tag{4.19}$$

Применяя к этому интегралу формулу Грина, получим

$$\oint\limits_L P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]\, dx_1 = -\iint\limits_{\sigma_{12}} \left[\frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial x_2} + \frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] d\sigma_{12} =$$

$$= -\iint\limits_{\sigma_{12}} \left[\frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial x_2} + \frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] \cos(\boldsymbol{n}, x_3) dS. \quad 4.20)$$

Косинусы углов, которые составляет внешняя нормаль $\boldsymbol{n}$ к поверхности $x_3 = f(x_1, x_2)$ с координатными осями, имеют выражения

$$\cos(\boldsymbol{n}, x_1) = \frac{p}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos(\boldsymbol{n}, x_2) = \frac{q}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \tag{4.21}$$

$$\cos(\boldsymbol{n}, x_3) = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

где $p = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \quad q = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$. Отсюда получается, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \cos(\boldsymbol{n}, x_3) = -\cos(\boldsymbol{n}, x_2) . \tag{4.22}$$

Тогда формула (4.20) примет вид:

$$\oint\limits_L P\, dx_1 = -\iint\limits_{\sigma_{12}} \left[\frac{\partial P}{\partial x_3} \cos(\boldsymbol{n}, x_2) - \frac{\partial P}{\partial x_2} \cos(\boldsymbol{n}, x_3) \right] dS . \tag{4.23}$$

Аналогично получаются интегралы

$$\oint_L Q\,dx_2 = -\iint_{\sigma_{12}} \left[\frac{\partial Q}{\partial x_1}\cos(\boldsymbol{n}, x_2) - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\cos(\boldsymbol{n}, x_1) \right] dS\,, \tag{4.24}$$

$$\oint_L R\,dx_3 = -\iint_{\sigma_{12}} \left[\frac{\partial R}{\partial x_2}\cos(\boldsymbol{n}, x_1) - \frac{\partial R}{\partial x_1}\cos(\boldsymbol{n}, x_2) \right] dS\,. \tag{4.25}$$

Складывая эти формулы, получим формулу Стокса

$$\oint_L Pdx_1 + Qdx_2 + Rdx_3 = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_1} \right)\cos(\boldsymbol{n}, x_1) + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right)\cos(\boldsymbol{n}, x_2) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right)\cos(\boldsymbol{n}, x_3) \right\} dS.$$

Для того чтобы записать эту формулу в векторном виде, нужно вспомнить *формулу ротора вектора*

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_1} \right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right)\cdot \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right)\cdot \boldsymbol{k}\,. \tag{4.26}$$

Единичный вектор нормали имеет вид

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\cos(n, x_1) + \boldsymbol{j}\cos(n, x_2) + \boldsymbol{k}\cos(n, x_3)\,. \tag{4.27}$$

Легко видеть, что произведение ротора вектора на нормаль запишется так:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_1} \right)\cos(\boldsymbol{n}, x_1) + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right)\cdot\cos(\boldsymbol{n}, x_2) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right)\cdot\cos(\boldsymbol{n}, x_3)\,. \tag{4.28}$$

Отсюда получается

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S rot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS\,. \tag{4.29}$$

Теорема Стокса (второе доказательство**).** *Циркуляция векторного поля* $\boldsymbol{A}$ *по замкнутому контуру* L *равна потоку вектора* $\nabla\times\mathbf{A}$ *через любую поверхность, натянутую на этот контур:*

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{S}. \tag{4.30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим элементарную площадку в форме прямоугольника. Если мы имеем дело со скалярными величинами, то можно выбрать ориентацию координатных осей произвольно. Выберем направление осей так, чтобы стороны прямоугольника совпадали с ними:

$$d\boldsymbol{S} = d\,x_1 d\,x_2\mathbf{k}\,. \tag{4.31}$$

Вычислим интеграл в правой части равенства (4.30)

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{A})d\boldsymbol{S} = \iint \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int A_2\,\mathrm{d}x_2\Big|_{x_1}^{x_1+dx_1} - \int A_1\,\mathrm{d}x_1\Big|_{x_{21}}^{x_2+dx_2}. \tag{4.32}$$

Но $$\int A_2\Big|_{x_1}^{x_1+dx_1}\mathrm{d}x_2 = \int_A^B A_2\mathrm{d}x_2 - \int_D^C A_2\mathrm{d}x_2 = \int_A^B A_2\mathrm{d}x_2 + \int_C^D A_2\mathrm{d}x_2 = \oint A_2\mathrm{d}x_2\,. \tag{4.33}$$

После аналогичного преобразования второго интеграла получим для правой части (4.30) выражение

$$\iint \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \oint \mathbf{A}\, d\,\mathbf{l}\,. \tag{4.34}$$

Таким образом, для *элементарного прямоугольника теорема доказана*.

Любая кусочно – гладкая поверхность может быть разбита на элементарные прямоугольники. Применяя к каждому прямоугольнику теорему Стокса и складывая полученные при этом равенства, легко доказать теорему Стокса для общего случая. Действительно, смежные стороны двух соседних прямоугольников будут обходиться в противоположных направлениях, поэтому при сложении равенств типа (4.20) слева останется лишь криволинейный интеграл по внешней границе (контур L).

Замечание 1. К физическому *смыслу ротора***.** Обозначим через ΔS некоторую поверхность, ограниченную контуром L, и рассмотрим предел при $\Delta S \to 0$ (при этом L стягивается в точку):

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_L \mathbf{a}\, d\,\mathbf{r}}{\Delta \mathrm{S}}\,. \tag{4.35}$$

Для расчётов удобно использовать выражение для ротора в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}_i\,. \tag{4.36}$$

Пример 1. Найти производную поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ по направлению вектора $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ и найти градиент в точке с координатами $(0, \sqrt{5}, 2)$.

Решение. Для решения необходимо найти направляющие косинусы вектора $\mathbf{s}$, то есть единичный вектор $\mathbf{s}_o$ Учтём, что модуль вектора $\mathbf{s}$ равен $|\mathbf{s}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$. Тогда

$$\mathbf{s}_o = \frac{2}{\sqrt{21}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{21}}\mathbf{j} - \frac{4}{\sqrt{21}}\mathbf{k},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{21}}, \quad \cos\gamma = -\frac{4}{\sqrt{21}}\,.$$

Частные производные имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \frac{\partial U}{\partial y} = 2y, \frac{\partial U}{\partial z} = 2z\,,$$

а в заданной точке

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \frac{\partial U}{\partial y} = 2\sqrt{5}, \frac{\partial U}{\partial z} = 4\,.$$

Отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma = 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{21}} + 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} - 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{21}} = 2\sqrt{\frac{5}{21}} - \frac{16}{\sqrt{21}},$$

и ответ получается в виде: $\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{s}} = 2\sqrt{\dfrac{5}{21}} - \dfrac{16}{\sqrt{21}}$ и $\operatorname{grad} U = 2\sqrt{5}\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Пример 2. Найти поток векторного поля

$$\overline{F} = (x - 2z)\,\mathbf{i} + (3z - 4x)\,\mathbf{j} + (5x + y)\,\mathbf{k}$$

через полную поверхность треугольной пирамиды (рис. 48) с вершинами $A(\frac{1}{2},0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $O(0,0,0)$ в направлении внешней нормали.

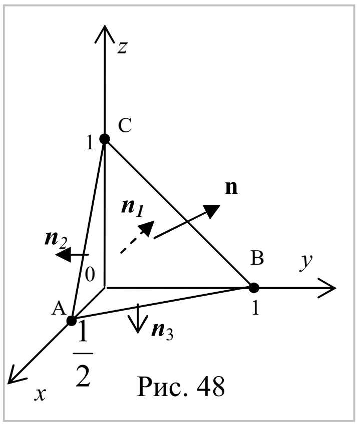

Рис. 48

Решение. Используем рабочую формулу (3.8).

Способ первый. Вычисление тройного интеграла. Для этотго определяется дивергенция векторного поля по формуле

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial(x-2z)}{\partial x}+\frac{\partial(3z-4x)}{\partial y}+\frac{\partial(5x+y)}{\partial z}=1.$$

Задача сводится к вычислению тройного интеграла, для расстановки пределов в котором необходимо записать уравнение плоскости ABC: $2x+y+z-1=0$, откуда $z=1-2x-y$.

$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=\int\limits_0^{1/2}dx\int\limits_0^{1-2x}dy\int\limits_0^{1-2x-y}dz=\int\limits_0^{1/2}dx\int\limits_0^{1-2x}(1-2x-y)dy=\int\limits_0^{1/2}\left[(1-2x)y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-2x}dx=$$

$$=\int\limits_0^{1/2}\left[(1-2x)^2-\frac{(1-2x)^2}{2}\right]dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2}(1-2x)^2\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{(1-2x)3}{3}\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{12}.$$

Способ второй. Поток вычисляется по правой части уравнения. Для этого каждый интеграл нужно взять по всем граням, учитывая направление внешней нормали.

$$I=I_1+I_2+I_3=\left\{\iint\limits_{ABC}(x-2z)dydz-\iint\limits_{ABO}(x-2z)dydz-\iint\limits_{BCO}(x-2z)dydz-\iint\limits_{ACO}(x-2z)dydz\right\}+$$

$$+\left\{\iint\limits_{ABC}(3z-4x)dxdz-\iint\limits_{ABO}(3z-4x)dxdz-\iint\limits_{BCO}(3z-4x)dxdz-\iint\limits_{ACO}(3z-4x)dxdz\right\}+$$

$$+\left\{\iint\limits_{ABC}(5x+y)dxdy-\iint\limits_{ABO}(5x+y)dxdy-\iint\limits_{BCO}(5x+y)dxdy-\iint\limits_{ACO}(5x+y)dxdy\right\}.$$

На грани ABC нужно с учётом уравнения поверхности выразить x через y и z. На грани ABO $dz=0$, на грани ACO $dy=0$, поэтому остаются интегралы только по BCO, на которой x = 0, и ABC: $2x+y+z-1=0$.

Первый интеграл

$$I_1=\iint\limits_{ABC}\left(\frac{1-y-z}{2}-2z\right)dydz+\iint\limits_{BCO}2z\,dydz=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-y}(1-y-z)dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[(1-y)^2-\frac{(1-y)^2}{2}\right]dy=\frac{1}{4}\int\limits_0^1(1-y)^2\,dy=-\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-y)^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}.$$

Второй интеграл

$$I_2=\iint\limits_{ABC}(3z-4x)dxdz-\iint\limits_{ABO}(3z-4x)dxdz-\iint\limits_{BCO}(3z-4x)dxdz-\iint\limits_{ACO}(3z-4x)dxdz.$$

Здесь равны нулю интегралы по ABO $(dz=0)$ и по BCO $(dx=0)$. Тогда

$$I_2=\iint\limits_{ABC}(3z-4x)dxdz-\iint\limits_{ACO}(3z-4x)\,dxdz=0.$$

Третий интеграл

$$I_3 = \iint\limits_{ABC}(5x+y)dxdy - \iint\limits_{ABO}(5x+y)dxdy - \iint\limits_{BCO}(5x+y)dxdy - \iint\limits_{ACO}(5x+y)dxdy .$$

На грани BCO равен нулю дифференциал dx, а на грани ACO – дифференциал dy. Тогда

$$I_3 = \iint\limits_{ABC}(5x+y)dxdy - \iint\limits_{ABO}(5x+y)dxdy = 0 .$$

Отсюда сумма всех интегралов равна $I = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{1}{12} + 0 + 0 = \dfrac{1}{12}$. **Ответ :** $\Pi = \dfrac{1}{12}$.

Пример 3. Вычислить непосредственно и по формуле Стокса циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\,x - \boldsymbol{j}\,z^2 + \boldsymbol{k}\,y^2$ по линии пересечения поверхности $x^2 = 4 - y - z$ с координатными плоскостями в направлении от точки пересечения данной поверхности с осью $O\,x$ до $O\,y$ (рис. 49).

Решение. Формула Стокса для расчёта циркуляции имеет вид

$$\oint\limits_L \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = \iint\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} .$$

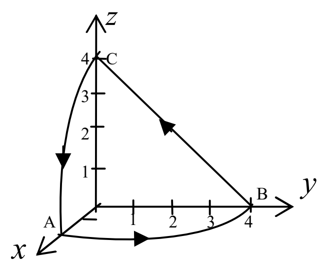

Рис. 49

Запишем эту формулу в координатной форме, для чего представим дифференциал длины дуги в виде

$$d\,\mathbf{l} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}\,dz .$$

Отсюда получим скалярное произведение

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = x\,dx - z^2\,dy + y^2\,dz .$$

В правой стороне равенства записывается определитель с учётом

$$d\,\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma .$$

Тогда решение получается в координатной форме

$$\oint\limits_L x\,dx - z^2\,dy + y^2\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & -z^2 & y^2 \end{vmatrix} dS .$$

Учитывая, что x, y, z независимые переменные, получаем

$$\oint\limits_L x\,dx - z^2\,dy + y^2\,dz = 2\iint\limits_S (y+z)\,dy\,dz .$$

1) Вычисление циркуляции непосредственно по левому интегралу

Первый интеграл

$$\oint\limits_L x\,dx = \int\limits_{AB} x\,dx + \int\limits_{BC} x\,dx + \int\limits_{CA} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_2^0 + 0 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = -2 + 0 + 2 = 0.$$

Второй интеграл

$$-\oint\limits_L z^2\,dy = -\int\limits_{AB} z^2\,dy - \int\limits_{BC} z^2\,dy - \int\limits_{CA} z^2\,dy = -\int\limits_{AB} 0\,dy - \int\limits_{BC} (4-y)^2\,dy - \int\limits_{CA} z^2\,d\,0 = \left.\frac{(4-y)^3}{3}\right|_4^0 = \frac{64}{3}.$$

Третий интеграл

$$\oint\limits_L y^2\,dz = \int\limits_{AB} y^2\,dz + \int\limits_{BC} y^2\,dz + \int\limits_{CA} y^2\,dz = \int\limits_{AB} y^2 d0 + \int\limits_{BC} (4-z)^2\,dz + \int\limits_{CA} 0\,d\,z = -\left.\frac{(4-z)^3}{3}\right|_0^4 = \frac{64}{3}.$$

Сумма трёх интегралов даёт решение $\ddot{O} = \frac{128}{3}$.

2) Решение по формуле Стокса

$$2\iint_S (y+z)\,dy\,dz = 2\iint_S y\,dy\,dz + 2\iint_S z\,dy\,dz = 2\left[\int_0^4 dz \int_0^{4-z} y dy + \int_0^4 dy \int_0^{4-y} z dz\right] =$$

$$= 2\left[\int_0^4 dz \left\{ \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{4-z} \right\} + \int_0^4 dy \left\{ \frac{z^2}{2}\bigg|_0^{4-y} \right\}\right] = \int_0^4 (4-z)^2 dz + \int_0^4 (4-y)^2 dy = -\frac{(4-z)^3}{3}\bigg|_0^4 + -\frac{(4-y)^3}{3}\bigg|_0^4 = \frac{128}{3}.$$

Ответ: $\ddot{O} = \frac{128}{3}$.

§ 5. Типовые задачи теории поля

Задача 1. Зная *градиент* скалярного поля $\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{a}$, найти скалярную функцию $\varphi = \varphi(x, y, z)$.

Решение. Используем определение градиента. Градиент – это дифференциальная характеристика скалярного поля. Следовательно, для нахождения скалярного поля необходимо выполнить интегрирование следующего дифференциала

$$d\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s} d\,s = \mathbf{s} \cdot \operatorname{grad}\varphi\ ds. \qquad (5.1)$$

Известно, что градиент равен $\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{y}}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{z}}\mathbf{k}$.

С другой стороны $\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{d}\,y + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{d}\,\mathrm{z}$, где $\mathrm{d}\,\mathbf{r} = \mathrm{d}x\,\mathbf{i} + \mathrm{d}\,y\,\mathbf{j} + \mathrm{d}\,z\,\mathbf{k}$. Тогда получается $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\,\mathbf{r} \cdot \operatorname{grad}\varphi$.

Если дано, что $\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{a}$, то получается, что дифференциал φ равен $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}$. Зная дифференциал функции, можно найти эту функцию, взяв от неё интеграл. В данном случае, так как $\mathrm{d}\,\mathbf{r}$ - дифференциал радиуса – вектора текущей точки, то нужно взять криволинейный интеграл от фиксированной точки M_o до точки M – произвольной точки пространства скалярного поля. Тогда

$$\varphi(M) = \int_{M_o}^{M} \mathrm{d}\varphi = \int_{M_o}^{M} \mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{r} = \int_{M_o}^{M} \mathrm{a_x d}\,x + \mathrm{a_y d}\,y + \mathrm{a_z d}\,z. \qquad (5.2)$$

Замечание 2. Это криволинейный интеграл второго рода, который может как *зависеть* так и *не зависеть от пути интегрирования*.

Замечание 3. Заданный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ не может быть произвольным, он должен отвечать определённому условию. Так как $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$, то нужно, чтобы

$$\operatorname{rot}\ \mathbf{a} = 0, \qquad (5.3)$$

то есть вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ должен быть *безвихревым*.

Замечание 4. Если область, в которой задано уравнение $\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{a}$, многосвязна, то интеграл (5.2) будет многозначным.

Замечание 5. В общем случае решение может иметь вид

$$\varphi(M) = \int_{M_o}^{M} \mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{r} + C, \qquad (5.4)$$

где C – произвольная постоянная.

Замечание 6. Получается, что если известен градиент скалярного поля, то для нахождения потенциала этого поля нужно вычислить криволинейный интеграл (5.4), который представляет собой *работу градиента* $\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{a}$ на некотором пути в скалярном поле.

Задача 2. Найти вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, описывающий векторное поле, если заданы его дивергенция (расхождение) $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и ротор (вихрь) $\operatorname{rot}\ \mathbf{a}$.

Пусть задана область V, ограниченная поверхностью S (рис. 50). Пусть во всех точках этой области известны

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \rho(x, y, z), \tag{5.5}$$

$$\operatorname{rot}\ \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}(x, y, z). \tag{5.6}$$

Кроме того, могут быть заданы граничные условия, то есть во всех точках границы S известно значение нормальной производной от вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ в виде

$$a_n = f(M) \text{ на поверхности } S. \tag{5.7}$$

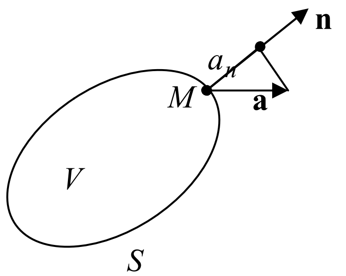

Рис. 50

Таким образом, задача ставится так: найти вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, если даны

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\mathbf{a} = \rho(x, y, z) \text{ внутри } V, \\ \operatorname{rot}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}(x, y, z) \text{ внутри } V, \\ a_n = f(M) \text{ на поверхности } S. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Решение. В книге Кочина[3] доказано, что при условиях (5.5), (5.6) и (5.7) задача решается однозначно.

Замечание 7. Для решения этой задачи необходимо, чтобы функции $\rho(x, y, z)$ и $\boldsymbol{\omega}(x, y, z)$ удовлетворяли некоторым условиям. Имеются следующие тождества

$$\operatorname{div}\ \operatorname{rot}\mathbf{a} = 0, \quad \iiint_V \operatorname{div}\ \mathbf{a}\, dV = \oint\!\!\oint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\, dS \text{ (формула Остроградского – Гаусса).}$$

Подставим сюда значения $\operatorname{div}\mathbf{a} = \rho(x, y, z)$,. $\operatorname{rot}\ \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}(x, y, z)$ и $a_n = f(M)$, тогда мы получим условиям

$$\operatorname{div}\ \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \iiint_V \rho\, dV = \oint\!\!\oint_S f(M)\, dS, \tag{5.9}$$

которым должны удовлетворять $\rho(x, y, z)$, $\boldsymbol{\omega}(x, y, z)$ и $f(M)$, чтобы система (5.5) и (5.6) имела решение.

Замечание 8. Для решения задачи необходимо выполнить *несколько действий*.

*Первое действие***.** Сначала определяется такой вектор $\mathbf{a}_1$, который удовлетворяет системе уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{a}_1 = \rho, \ \operatorname{rot}\mathbf{a}_1 = 0. \tag{5.10}$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\mathbf{a}_1 = \operatorname{grad}\varphi \tag{5.11}$$

и тогда из первого уравнения следует, что $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla(\nabla\varphi) = \Delta\varphi = \rho$,

или

$$\Delta\varphi = \rho, \tag{5.12}$$

где (5.12) – это *уравнение Пуассона*.

Решение уравнения Пуассона даст искомый вектор $\mathbf{a}_1$.

Замечание. 9. Решение уравнения (5.12), полученное для *бесконечного* пространства, может быть применено для *ограниченного* пространства.

Для произвольной точки пространства P после решения задачи Пуассона получается значение вектора $\mathbf{a}_1$

[3] Н.Е. Кочин «Векторное исчисление и начала тензорного исчисления» изд. 1965 г.

$$\mathbf{a}_1(\mathrm{x,y,z}) = -\frac{1}{4\pi}\mathrm{grad}_\mathrm{P}\iiint\limits_{\infty}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}dV\,.$$

Второе действие. По *заданному ротору* отыскивается такой вектор $\mathbf{a}_2$, который удовлетворяет равенствам

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a}_2 = 0\,. \quad . \tag{5.13}$$

Из первого уравнения следует, что

$$\mathbf{a}_2 = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,. \tag{5.14}$$

Из второго уравнения получается

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}\,.$$

Применяя формулу $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} - \Delta\,\mathbf{a}$, получим

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \Delta\,\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}\,. \tag{5.15}$$

Будет показано, что, не нарушая общности, можно положить

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0\,.$$

Тогда уравнение (5.15) запишется

$$\Delta\,\mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}\,. \tag{5.16}$$

Это векторное уравнение разбивается на три скалярных уравнений

$$\Delta\,\mathbf{A}_\mathrm{x} = -\omega_\mathrm{x}, \quad \Delta\,\mathbf{A}_\mathrm{y} = -\omega_\mathrm{y}, \quad \Delta\,\mathbf{A}_\mathrm{z} = -\omega_\mathrm{z}\,, \tag{5.17}$$

где $\omega_\mathrm{x}, \omega_\mathrm{y}, \omega_\mathrm{z}$ известны, A_x, A_y, A_z - искомые функции. Уравнения (5.17) являются уравнениями Пуассона, так что можно перенести те результаты, которые получены при решении уравнения (5.12) и на случай векторного *уравнения Пуассона* (5.16). Для случая бесконечного пространства вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ будет в силу (5.10) и (5.13) удовлетворять обоим уравнениям. Для задачи

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a}_2 = 0\,, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{a}_2 = \boldsymbol{\omega}$$

решение имеет вид

$$\mathbf{a}_2(\mathrm{x,y,z}) = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_\mathrm{P}\iiint\limits_{\infty}\frac{\boldsymbol{\omega}(\xi,\eta,\zeta)}{r}dV\,.$$

Задача 3. Даны два равенства:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \rho,\ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}\,.$$

В случае конечной области V нужно вычислить 1) значения нормальных составляющих векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ на поверхности S

$$a_{1n} = f_1(M), \quad a_{2n} = f_2(M)\,,$$

а затем 2) составить функцию точки на поверхности S в виде

$$f_3(M) = f(M) - f_1(M) - f_2(M)\,.$$

3) Заданы *условия на границе* области и отыскивается такой вектор $\mathbf{a}_3$, который удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\,\mathbf{a}_3 = 0 \text{ внутри } V\,, \\ &\mathrm{rot}\ \mathbf{a}_3 = 0 \text{ внутри } V\,, \\ &a_{3n} = f_3(M) \text{ на } S\,. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Из второго уравнения этой системы следует, что

$$\mathbf{a}_3 = \mathrm{grad}\,\psi\,. \tag{5.19}$$

и тогда из первого уравнения мы получим

$$\Delta\psi = 0\,. \tag{5.20}$$

так что ψ удовлетворяет *уравнению Лапласа.* Последнее из условий (5.18) в силу (5.19) приводит к равенству

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = f_3(M) \text{ на поверхности } S. \qquad (5.21)$$

Уравнение (12.20) при условии (5.21) на границе области составляет *задачу Неймана.*

Замечание 10. Таким образом, в результате решения этих трёх задач получается *искомый вектор*

Практически уже известны две величины

$$\varphi(\mathrm{x,y,z}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\infty}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}dV, \quad \mathbf{A}(\mathrm{x,y,z}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\infty}\frac{\omega(\xi,\eta,\zeta)}{r}dV. \qquad (5.22)$$

Таким образом, решение третьей задачи ищется в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3,$$

который будет удовлетворять всем уравнениям системы (5.18).

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{a} = \rho(x,y,z), \\ \operatorname{rot}\mathbf{a} = \omega(x,y,z), \\ a_n = f(M). \end{cases} \qquad (5.23)$$

Здесь $\operatorname{div}\mathbf{a} = \rho(x,y,z)$ внутри V, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \omega(x,y,z)$ внутри V, $a_n = f(M)$ на поверхности S.

Решение системы (5.23) ищется в виде

$$\mathbf{a}(\mathrm{P}) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\mathbf{A} + \operatorname{grad}\psi, \qquad (5.24)$$

где ρ, ω, f - известные функции, причём функция $f(M)$ удовлетворяет условию

$$\iint\limits_{S} f(M)\,dS = \iiint\limits_{V}\rho(\xi,\eta,\zeta)\,dV. \qquad (5.25)$$

Используется формула Остроградского – Гаусса $\iiint\limits_{V}\Delta\varphi\,dV = \iint\limits_{S}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS$, откуда получается

$$\iint\limits_{S}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS = 0 \qquad (5.26)$$

и выполняется условие

$$\operatorname{div}\omega = 0. \qquad (5.27)$$

В случае если ω внутри объёма V терпит на некоторой поверхности разрыв, то требуют, чтобы *нормальная составляющая* вектора ω оставалась непрерывной.

Задача 4. Решение первой задачи, зная $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$, найти $\varphi = \varphi(x,y,z)$

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi. \qquad (5.28)$$

Решение. Нам известно решение уравнения Лапласа в виде $\frac{1}{r}$, где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \qquad (5.29)$$

и где даны переменная точка $P(x,y,z)$ и фиксированная точка $Q(\xi,\eta,\zeta)$. То есть удовлетворяется уравнение

$$\Delta\frac{1}{r} = 0. \qquad (5.30)$$

Это уравнение удовлетворяется в точке $P(x,y,z)$

$$\Delta_P\frac{1}{r} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \qquad (5.31)$$

и в точке $Q(\xi,\eta,\zeta)$

$$\Delta_Q\frac{1}{r} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0, \qquad (5.32)$$

в которой производится дифференцирование по координатам точки $Q(\xi,\eta,\zeta)$, а точка P остаётся переменной. Берётся формула Грина

$$\iiint\limits_V (\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\nabla\varphi)dV = \iint\limits_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS \tag{5.33}$$

и применяется к функции $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$, которая предполагается непрерывной вместе со всеми первыми производными, а вторые производные могут терпеть разрыв только на конечном числе поверхностей. За функцию ψ принимается

$$\psi = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}, \tag{5.34}$$

причём здесь x, y, z принимаются как параметры, а ξ,η,ζ считаются переменными, так что в формуле (5.33) элемент объёма равен

$$dV = d\xi\, d\eta\, d\zeta\,. \tag{5.35}$$

Здесь следует различать два случая. Первый случай, когда точка $P(x,y,z)$ лежит вне области V. В этом случае функция $\frac{1}{r}$ рассматривается как функция точки $Q(\xi,\eta,\zeta)$ (рис. 51) будет непрерывной и будет удовлетворять уравнению (5.32). Поэтому формула (5.33) даёт

$$-\iiint\limits_V \frac{\nabla\varphi}{r}dV = \oiint\limits_S \left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS\,. \tag{5.36}$$

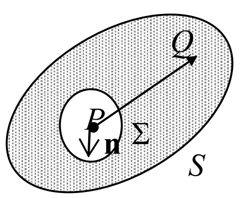

Рис. 51

Рассмотрим второй случай, когда точка *P* лежит внутри области V. В этом случае нельзя применять формулу (5.33), так как функция $\frac{1}{r}$, рассматриваемая как функция переменной точки Q, обращается в бесконечность при совпадении точек Q и *P*.

Чтобы избежать этого, выделим точку *P* малой сферой Σ с центром в точке *P* и радиусом ε, который впоследствии устремляется к нулю. Теперь формула (5.33) применяется не к области V, а к области V_ε, получающейся из области V путём выкалывания сферы радиуса ε с центром в точке *P*.

Так как объём V ограничен не только поверхностью S, но и поверхностью Σ, то поверхностный интеграл в формуле (5.33) будет состоять из двух частей. Так как теперь точка P является внешней по отношению к объёму V_ε теперь можно применить формулу (5.33). Пользуясь снова формулой (5.32), получим

$$-\iiint\limits_{V_\varepsilon} \frac{\nabla\varphi}{r}dV = \oiint\limits_S \left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS + \oiint\limits_\Sigma \left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\Sigma\,. \tag{5.37}$$

1. Потенциальное поле

Пусть векторное поле $\mathbf{F}$ является *полем градиента* для некоторого *скалярного поля* φ

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi\,. \tag{5.38}$$

Скалярное поле φ является потенциалом векторного поля $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$.

Определение 1. Если векторное поле имеет потенциал, то оно называется *потенциальным*.

Теорема 1. *Для того, чтобы поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\,. \tag{5.39}$$

Непосредственно вычисляя $\mathrm{rot}\mathbf{F}$ и учитывая свойства оператора Гамильтона $\nabla = \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$, получим

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla\varphi = 0\,, \tag{5.40}$$

так как векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю (можно написать эту формулу так: $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\varphi = 0$).

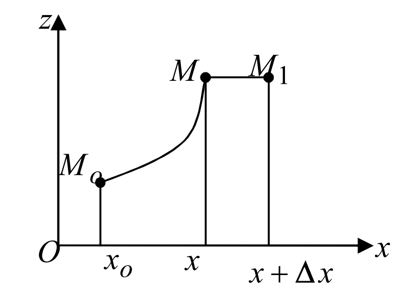

Рис. 52

Достаточность. Пусть $\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$. Тогда по известной теореме криволинейный интеграл по замкнутому контуру в таком поле $\oint_{\lambda} \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = 0$, так как он не зависит от пути интегрирования. Возьмём криволинейный интеграл от этого вектора от точки $M_o(x_o, y_o, z_o)$ до произвольной точки $M(x, y, z)$ (рис. 52) и запишем его в виде

$$\oint_{\lambda} \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = \int_{M_o}^{M} Pdx + Qdy + Rdz\,. \tag{5.41}$$

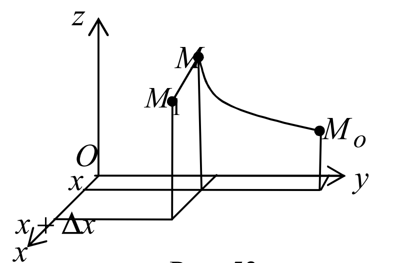

Рис. 53

Обозначим величину этого интеграла через $\varphi(x, y, z)$, то есть

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_o, y_o, z_o}^{x, y, z} Pdx + Qdy + Rdz \tag{5.42}$$

и докажем, что $\mathrm{grad}\varphi = \mathbf{F}$. Для этого вычислим сначала $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ по общему правилу

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_{x_o, y_o, z_o}^{x+\Delta x, y, z} Pdx + Qdy + Rdz - \int_{x_o, y_o, z_o}^{x, y, z} Pdx + Qdy + Rdz}{\Delta x}\,.$$

Так как этот интеграл не зависит от пути, то в первом интеграле можно в качестве пути взять как путь интегрирования второго интеграла по кривой от M_o до M и прибавить прямолинейный отрезок, параллельный оси x., то есть MM_1 (рис. 53). Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\int_{M_o}^{M} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{M}^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz - \int_{M_o}^{M} Pdx + Qdy + Rdz \right) \Bigg/ \Delta x =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\int_{M}^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz \right) \Bigg/ \Delta x.$$

По *теореме о среднем* можно написать последний интеграл в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_{M}^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x + \theta\Delta x, y, z) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x + \theta\Delta x, y, z) = P(x, y, z)\,.$$

Таким образом, доказано, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P(x, y, z)\,. \tag{5.43}$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y, z), \tag{5.44}$$

и
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = R(x, y, z). \tag{5.45}$$

Отсюда получается

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k} = \mathbf{F}\text{, ч.т.д.} \tag{5.46}$$

Таким образом, доказано, что поле $\mathbf{F}$ является *потенциальным.*

Замечание 1. Отсюда получается способ построения потенциала поля $\mathbf{F}$.
***Получение потенциала**:* если $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ и $\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$, то потенциал векторного поля $\mathbf{F}$ вычисляется с помощью криволинейного интеграла

$$\varphi(x, y, z) = \int\limits_{x_o, y_o, z_o}^{x, y, z} Pdx + Qdy + Rdz\,, \tag{5.47}$$

где $M_o(x_o, y_o, z_o)$ - любая фиксированная точка.

Замечание 2. Точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ можно выбирать по-разному, тогда будут получаться разные значения $\varphi(x, y, z)$, отличающиеся друг от друга на константы C.

Замечание 3. С вопросом об отыскании потенциала тесно связан вопрос о восстановлении функции трёх переменных по её полному дифференциалу.

Пусть дан дифференциал функции $\mathrm{d}\varphi = P\mathrm{d\,x} + Q\mathrm{d\,y} + R\mathrm{d\,z}$, где P, Q, R - непрерывные функции трёх переменных с непрерывными частными производными. Из теоремы 1 вытекает следующая теорема 2.

Теорема 2. *Для того, чтобы выражение* $\mathrm{d}\varphi = P\mathrm{d\,x} + Q\mathrm{d\,y} + R\mathrm{d\,z}$ *было полным дифференциалом функции* $\varphi(x, y, z)$*, необходимо и достаточно, чтобы ротор векторного поля* $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ *был тождественно равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно основано на том утверждении, что если $\mathrm{d}\varphi = P\mathrm{d\,x} + Q\mathrm{d\,y} + R\mathrm{d\,z}$, то $\mathrm{grad}\varphi = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, и обратно, если $\mathrm{grad}\varphi = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, то $\mathrm{d}\varphi = P\mathrm{d\,x} + Q\mathrm{d\,y} + R\mathrm{d\,z}$.

Замечание 4. Отсюда виден и способ построения функции по её полному дифференциалу: для того, чтобы найти $\varphi(x, y, z)$, достаточно применить формулу (5.10).

Замечание 4. Формула (10) даёт простой способ вычисления криволинейного интеграла от полного дифференциала $P\mathrm{d\,x} + Q\mathrm{d\,y} + R\mathrm{d\,z}$ в том случае, когда известна функция $\varphi(x, y, z)$, дифференциал которой равен $P\mathrm{d\,x} + Q\mathrm{d\,y} + R\mathrm{d\,z}$.

По аналогии с определённым интегралом можно написать *формулу Ньютона – Лейбница* для криволинейного интеграла в виде

$$\varphi(x, y, z) = \int\limits_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} Pdx + Qdy + Rdz = \varphi\,(x_2, y_2, z_2) - \varphi(x_1, y_1, z_1)\,. \tag{5.48}$$

Интеграл от полного дифференциала функции $\varphi(x, y, z)$ в границах от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до $M_2(x_2, y_2, z_2)$ равен *разности значений этой функции* в точках M_1 **до** M_2**.** Разность значений потенциала этого поля в точках M_1 и M_2.даёт *величину работы, совершаемой силами поля при перемещении точки единичной массы из точки* M_1 **до** M_2**.**

Пример 1. Найти потенциал векторного поля

$$\mathbf{F} = (3\mathrm{x} + 2\mathrm{xy})\,\mathbf{i} + (\mathrm{x}^2 + 2y + z)\mathbf{j} + (y + 3z^2)\mathbf{k}\,.$$

Решение. Необходимо проверить, является ли это поле потенциальным, то есть, $\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$.

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3\mathrm{x} + 2\mathrm{xy} & \mathrm{x}^2 + 2y + z & y + 3z^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(1 - 1) - \mathbf{j}\,(0 - 0) + \mathbf{k}\,(2\mathrm{x} - 2\mathrm{x}) = 0..$$

Для того, чтобы найти потенциал, нужно вычислить интеграл

$$\varphi(x, y, z) = \int\limits_{x_o, y_o, z_o}^{x, y, z} (3\mathrm{x} + 2\mathrm{xy})dx + (\mathrm{x}^2 + 2y + z)dy + (y + 3z^2)dz\,.$$

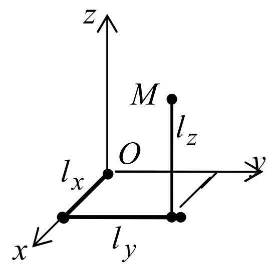

Рис. 54

Так как этот интеграл не зависит от пути интегрирования, можно в качестве пути взять ломаную линию от начала координат до точки $M(x, y, z)$, как показано на рис.54. Находим первообразную

$$\int\limits_{x_o, y_o, z_o}^{x, y, z} (3\mathrm{x} + 2\mathrm{xy})dx + (\mathrm{x}^2 + 2y + z)dy + (y + 3z^2)dz =$$

$$= \left[x^3 + x^2 y\right]_0^x \Big|_{y=0} + \left[x^2 y + y^2 + zy\right]_0^y \Big|_{z=0} + \left[zy + z^3\right]_0^z = x^3 + x^2 y + y^2 + zy + z^3 + C.$$

Отсюда потенциал поля $\mathbf{F}$ равен $\varphi(x, y, z) = x^3 + x^2 y + y^2 + zy + z^3 + C$.

Замечание 4. Можно было поступить иначе, используя понятие градиента. Из условия можно написать

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3\mathrm{x} + 2\mathrm{xy}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \mathrm{x}^2 + 2y + z, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = y + 3z^2.$$

Используя первую функцию, можно получить $\varphi(x, y, z) = \int (3\mathrm{x} + 2\mathrm{xy})dx$.

После интегрирования получается $\varphi(x, y, z) = x^3 + x^2 y + \psi(y, z)$. Для получения функции $\psi(y, z)$ возьмём производную по y от этой функции φ. Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial\psi(y, z)}{\partial y} = \mathrm{x}^2 + 2y + z.$$

Отсюда $\dfrac{\partial\psi(y, z)}{\partial y} = 2y + z.$ Интегрируя по y, получим

$$\psi(y, z) = \int (2\mathrm{y} + \mathrm{z})\,dy = y^2 + zy + \chi(z)\,.$$

Для определения $\chi(z)$ возьмём производную по z и получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = y + \frac{\partial\chi}{\partial z} = y + 3z^2.$$

Тогда $\dfrac{\partial\chi}{\partial z} = 3z^2$. и отсюда $\chi = z^3 + C$. Отсюда получаем решение, как и выше

$$\varphi(x, y, z) = x^3 + x^2 y + y^2 + zy + z^3 + C\,.$$

2. Поле потенциального вектора

Определение 1. Вектор **a** называется потенциальным, если он отвечает условию $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$, где φ - потенциал векторного воля.

Рассмотрим поле потенциального вектора, расхождение (дивергенция) которого всюду, кроме начала координат, равно нулю $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$. В начале координат находится источник с обильностью *e*, так что в каждую единицу времени из этого источника вытекает *e* единиц жидкости. Таким образом, поток вектора **a** через бесконечно малую замкнутую поверхность s_o, окружающую начало координат, равен *e*. Покажем, что поток через любую поверхность S, окружающую начало координат, равен *e*. В самом деле, применим теорему Гаусса – Остроградского к объёму, заключённому между поверхностями s_o и S. Так как $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$, то объёмный интеграл пропадает, Поверхностный же интеграл через поверхность s_o равен – e, потому что теперь направление внешней нормали к поверхности s_o надо принимать то, которое смотрит внутрь объёма, ограниченного поверхностью s_o и содержащего начало координат, поэтому

$$\oiint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \oiint_S a_n\,d\sigma = e. \tag{5.49}$$

По условию вектор **a** потенциальный, т.е.

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi \tag{5.50}$$

и естественно по симметрии считать φ функцией только расстояния r. Но тогда

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi = \varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{5.51}$$

Возьмём в формуле (5.49) за поверхность S поверхность сферы радиуса r с центром в начале координат, тогда

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad a_n = \varphi'(r). \tag{5.52}$$

и поток вектора будет $4\pi r^2\varphi'(r)$: значит

$$4\pi r^2\varphi'(r) = e. \tag{5.53}$$

Отсюда

$$\varphi'(r) = \frac{e}{4\pi r^2}. \tag{5.54}$$

После интегрирования по r получается

$$\varphi(r) = -\frac{e}{4\pi r}. \tag{5.55}$$

Итак,

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\left(-\frac{e}{4\pi r}\right) = \frac{e}{4\pi r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{e\mathbf{r}}{4\pi r^3} \tag{5.56}$$

и

$$a = \frac{e}{4\pi r^2}. \tag{5.57}$$

Изучим поле вектора **a** подробнее. Проверим, прежде всего, что вектор **a** является потенциальным. В самом деле, для его проекции мы имеем выражения

$$a_x = \frac{e\cdot x}{4\pi r^3}, \quad a_y = \frac{e\cdot y}{4\pi r^3}, \quad a_z = \frac{e\cdot z}{4\pi r^3}. \tag{5.58}$$

Поэтому

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \frac{e}{4\pi r^3} - \frac{3e\cdot x}{4\pi r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{e(r^2-3x^2)}{4\pi r^5},$$
$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{e}{4\pi r^3} - \frac{3e\cdot y}{4\pi r^4}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{e(r^2-3y^2)}{4\pi r^5}, \qquad (5.59)$$
$$\frac{\partial a_z}{\partial x} = \frac{e}{4\pi r^3} - \frac{3e\cdot z}{4\pi r^4}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{e(r^2-3z^2)}{4\pi r^5}.$$

Отсюда

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{e(3r^2-3x^2-3y^2-3z^2)}{4\pi r^5} = 0.$$

Полученный вектор имеет особенность в начале координат, поэтому областью его задания мы должны считать всё пространство с выключенным началом координат. Поток по формуле Остроградского – Гаусса в этом случае равен нулю

$$\oiint\limits_S a_n dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{a}\, dV = 0, \qquad (5.60)$$

а поток через поверхность, содержащую внутри себя начало координат отличен от нуля и равен *e*. Если мы имеем систему n точек $M_1, M_2, ..., M_n$ с обильностями $e_1, e_2, ..., e_n$ и если расстояние точки $M(\mathbf{r})$ от этих точек обозначить через $r_1, r_2, ..., r_n$, то потенциальное поле запишется в виде

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad}\left(-\frac{e_1}{4\pi r_1} - \frac{e_2}{4\pi r_2} - ... - \frac{e_n}{4\pi r_n}\right) \qquad (5.61)$$

и имеет расхождение, всюду равное нулю, за исключением указанных n источников.

3. Плоская задача. Логарифмический потенциал

Рассмотрим распределение масс в пространстве, зависящее только от двух координат (x, y). В любой плоскости $z = const$ потенциал принимает одно и то же значение, поэтому достаточно исследовать потенциал точки (x, y), лежащей в плоскости $z = 0$.

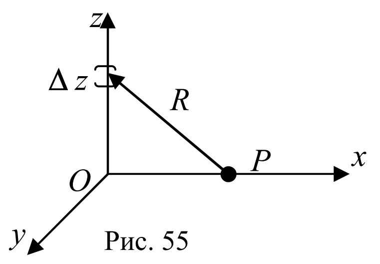

Рис. 55

Определим потенциал однородной бесконечной прямой L. Направим ось z вдоль этой прямой. Пусть погонная плотность (то есть, масса единицы длины) равна μ. Сила притяжения элементов Δz точки $P(x,0)$ (рис. 55) и её составляющая по оси x равны, соответственно,

$$\Delta F = -\frac{\mu\Delta z}{R^2} = -\frac{\mu\Delta z}{(x^2+z^2)}, \qquad (5.62)$$

$$\Delta X = \Delta F\cos\alpha = -\mu\Delta z\cdot\frac{x}{\sqrt{(x^2+z^2)^3}}. \qquad (5.63)$$

Отсюда

$$X = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu x\frac{dz}{(x^2+z^2)^{3/2}} = -\mu x^2\frac{1}{x^2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\, d\alpha = -\frac{2\mu}{x}, \quad \left(\frac{z}{x} = tg\alpha\right). \qquad (5.64)$$

Если $P(x, y)$ - произвольная точка, то сила притяжения точки линией L будет направлена вдоль $\overrightarrow{OP}$ и при $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ равна по величине

$$F = -\frac{2\mu}{\rho}. \tag{5.65}$$

Потенциал этой силы называется *логарифмическим потенциалом* и равен

$$V = 2\mu \ln\frac{1}{\rho}, \tag{5.66}$$

в чём легко убедиться непосредственным дифференцированием.

Логарифмический потенциал является решением уравнения Лапласа с двумя независимыми переменными, обладающими круговой симметрией вокруг полюса в точке $\rho = 0$, в которой он обращается в бесконечность. Таким образом, потенциал однородной прямой даёт плоское поле и выражается формулой (5.29). Представление потенциала в виде интеграла было получено лишь для ограниченных объёмов[4]. Отметим, что в отличие от объёмного потенциала логарифмический потенциал не обращается в нуль на бесконечности, а имеет там логарифмическую особенность.

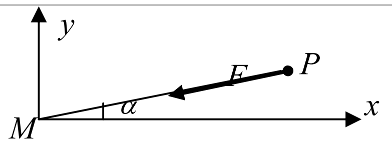

Рис. 56

Компоненты силы притяжения точки P (рис. 56) имеют вид:

$$X = F\cos\alpha = -2\mu\cdot\frac{x}{\rho^2}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{\rho},$$

$$Y = F\sin\alpha = -2\mu\cdot\frac{y}{\rho^2}, \quad \sin\alpha = \frac{y}{\rho}.$$

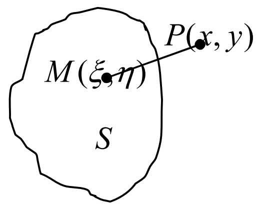

Рис. 57

Если имеется несколько точек или бесконечных прямых с распределённой вдоль них массой, то в силу принципа суперпозиции силовых полей потенциалы точек (прямых) будут складываться

В случае области S с непрерывно распределённой плотностью $\rho(\xi,\eta)$[5] компоненты силы притяжения точки P выразятся двойными интегралами:

$$X = -2\iint_S \mu(\xi,\eta)\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi\,d\eta, Y = -2\iint_S \mu(\xi,\eta)\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi\,d\eta \tag{5.67}$$

и потенциал будет равен

$$u(x,y) = 2\iint_S \mu(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta, \tag{5.68}$$

что нетрудно проверить дифференцированием для точек, лежащих вне S. Если же точка P лежит в области S, то необходимо провести дополнительное исследование (рис. 57).

[4] При вычислении потенциала бесконечной прямой нельзя было непосредственно интегрировать потенциалы отдельных элементов, так как в этом случае получается расходящийся интеграл. В самом деле, потенциал элемента Δz равен $\Delta u = \mu\cdot\Delta z\Big/\sqrt{\rho^2+z^2}$. Получается расходящийся интеграл $X = \int_{-\infty}^{\infty}\mu\,dz\Big/\sqrt{\rho^2+z^2}$

[5] Это соответствует в пространстве цилиндру с образующей, параллельной оси z, и сечением S в плоскости (x, y), с объёмной плотностью $\mu(\xi,\eta)$, не зависящей от ζ.