ГЛАВА 5. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Все дифференциальные уравнения в частных производных, составляющие основную часть курса математической физики, так или иначе сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которым посвящён этот том, являющийся приложением к учебному пособию по курсу математической физики, написанному для аспирантов и преподавателей НГАВТ.

Определение 1. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее искомую функцию и её производные или дифференциалы и независимую переменную.

Определение 2. *Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в уравнение производной.

§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Общие положения

В общем виде дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0\,, \tag{1.1}$$

где $y = y(x)$ - функция от одной переменной *x*, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ - первая производная.

Если это уравнение можно разрешить относительно первой производной, то получим дифференциальное уравнение в виде

$$y' = f(x, y). \tag{1.2}$$

В частном случае, если правая часть не зависит от y, то получается

$$y' = \varphi(x) \tag{1.3}$$

- уравнение, которое легко решить, записав $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и получая выражение

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x),$$

которое можно записать с *разделёнными переменными*

$$dy = \varphi(x)\,dx\,. \tag{1.4}$$

Это дифференциальное уравнение можно рассматривать как равенство двух дифференциалов. Значит, по теореме анализа интегралы от них будут отличаться на произвольную постоянную

$$\int dy = \int \varphi(x)\,dx + C\,,$$

откуда находится искомая функция y в виде

$$y = \int \varphi(x)\,dx + C\,. \tag{1.5}$$

В решение (1.5) уравнения (1.3) входит произвольная постоянная, а это значит, что дифференциальное уравнение имеет множество решений. Общее решение уравнений (1.1), (1.2) и (1.3) записывается в виде

$$y = \psi(x, C)\,. \tag{1.6}$$

Определение 1. Выражение типа (5.6) называется *общим решением* дифференциального уравнения 1-го порядка.

Замечание 1. Часто при решении дифференциальных уравнений их решения записываются в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0 \text{ или } \Psi(x, y) = C\,. \tag{1.7}$$

Замечание 2. Для удобства будем называть *общим решением* дифференциального уравнения выражения вида $y=\psi(x,C)$, и *общим интегралом* выражения вида $\Phi(x,y,C)=0$ или $\Psi(x,y)=C$.

Определение 2. *Частным решением* дифференциального уравнения называется выражение типа (1.6), в котором постоянной С дано какое-то конкретное значение C_o,

$$y=\psi(x,C_o),$$
$$\Phi(x,y,C_o)=0,$$
$$\Psi(x,y)=C_o.$$

Чтобы из общего решения выделить частное, нужно в формулу (1.6) подставить конкретные значения x_o, y_o. Получившееся уравнение $y_o=\psi(x_o,C)$ нужно решить относительно С и найденное значение C_o подставить в формулу (1.6).

Определение 3. Заданные значения аргумента $x=x_o$ и функции $y=y_o$ являются *начальными условиями* записывается так:

$$y\big|_{x=x_o}=y_o \tag{1.8}$$

и называются *условиями Коши*.

Определение 4. Задача интегрирования дифференциального уравнения с заданными начальными условиями называется *задачей Коши*.

§ 2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1. Если правая часть в уравнении (1.2) может быть записана в виде произведения функции от *x* и функции от y

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y),$$

то уравнение

$$y'=f_1(x)\cdot f_2(y), \tag{2.1}$$

называется дифференциальным уравнением 1-го порядка с *разделяющимися переменными.*

Замечание 1. Дифференциальное уравнение (2.1) всегда интегрируется в квадратурах, то есть, его решение всегда можно записать в виде интеграла.

Решение. Для того, чтобы получить решение дифференциального уравнения (2.1), его необходимо записать в виде $y'=\dfrac{d\,y}{d\,x}$ и получить

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y), \tag{2.2}$$

откуда получают дифференциальное уравнение с *разделёнными переменными*

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx. \tag{2.3}$$

Из этого равенства двух дифференциалов можно получить общий интеграл

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C. \tag{2.4}$$

Пример 1. Поставлена задача Коши: решить дифференциальное уравнение

$$y'=3x^2+2x$$

при заданном начальном условии

$$y\big|_{x=1}=2.$$

Решение. Запишем производную y' через дифференциалы

$$\frac{dy}{dx}=3x^2+2x$$

и разделим переменные

$$dy = \left(3x^2 + 2x\right)dx,$$

и проинтегрируем полученное равенство

$$\int dy = \int \left(3x^2 + 2x\right)dx = x^3 + x^2 + C,$$

и получим общее решение в виде

$$y = x^3 + x^2 + C.$$

Из общего решения определим C по заданному начальному условию

$$2 = 1^3 + 1^2 + C,$$

откуда C = 0.

Полученное *частное решение*, то есть решение задачи Коши, имеет вид

$$y = x^3 + x^2.$$

§ 3. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Определение 6. Функция $f(x, y)$ называется функцией *n-го измерения* относительно аргументов x и y, если для любого t справедливо тождество

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y). \tag{3.1}$$

Замечание 3. Величина t может быть как числом, так и функцией от x и y.

Определение 7. Дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$y' = f(x, y) \tag{3.2}$$

называется ***однородным,*** если в правой части стоит функция $f(x, y)$.*нулевого* измерения, то есть

$$f(tx, ty) = f(x, y). \tag{3.3}$$

Решение однородного уравнения (3.2)

Положив $t = \dfrac{1}{x}$, получим справа

$$f(tx, ty) = f(1, \frac{y}{x}).$$

Тогда получается, что функция нулевого измерения зависит только от отношения $\dfrac{y}{x}$ и уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.4}$$

Для интегрирования уравнения (3.4) вводится замена переменных в виде

$$\frac{y}{x} = u,$$

откуда $y = ux$, где u является функцией от x, т производная по x равна $y = u'x + u$. Подставляя в (3.2), получим

$$u'x + u = f(u). \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделив переменные, приводим (3.5) к виду

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f)u) - u}. \tag{3.6}$$

После интегрирования получается общее решение уравнения (3.5) в виде

$$\int \frac{du}{f)u)-u} = \ln|x| + C .$$

После интегрирования и подстановки вместо u его выражение $u = \frac{y}{x}$, получают общий интеграл однородного дифференциального уравнения 1-го порядка.

Замечание 4. Есть уравнения, которые можно привести к однородны. Это уравнения вида

$$\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy = 0 , \tag{3.7}$$

если функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ *одного измерения*, и уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1} . \tag{3.8}$$

Пример. Дано дифференциальное уравнение

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8 .$$

Решение. Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка, потому что в уравнении $y' = \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 4$ функция $f(x, y) = \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 4$ является функцией нулевого измерения, что видно из $f(tx, ty) = \frac{1}{2}\frac{t^2 y^2}{t^t x^2} + 4\frac{ty}{tx} + 4 = \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{tx} + 4 = f(x, y)$.

Приняв $\frac{y}{x} = u$ или $y = ux$ и $y' = u'x + u$ и, подставив в заданное уравнение, получим

$$u'x + u = \frac{1}{2}\frac{u^2 x^2}{x^2} + 4\frac{ux}{x} + 4 \text{ или } u'x + u = \frac{1}{2}u^2 + 4u + 4 .$$

Отсюда $\frac{du}{dx}x = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 4$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, которое приводится к виду

$$\frac{du}{u^2 + 6u + 8} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x} .$$

Интегрируя левую и правую часть, получим

$$\int \frac{du}{u^2 + 6u + 8} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} .$$

Знаменатель интеграла $\int \frac{du}{u^2 + 6u + 8}$ раскладывается на множители, и интеграл можно записать в виде $\int \frac{du}{(u+2)(u+4)}$. Этот интеграл берётся путём разложения на простейшие дроби. Подынтегральная дробь равна

$$\frac{1}{(u+2)(u+4)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+4} .$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим уравнение для определения неизвестных коэффициентов A и B:

$$1 = A(u+4) + B(u+2)$$

$$u = -2 \Rightarrow 1 = 2A \quad A = 1/2,$$

$$u = -4 \Rightarrow 1 = -2B \quad B = -1/2.$$

Таким образом, $\frac{1}{(u+2)(u+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+2} - \frac{1}{u+4}\right)$. Тогда интеграл равен

$\int \frac{du}{(u+2)(u+4)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+2} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+4} = \frac{1}{2}\ln|u+2| - \frac{1}{2}\ln|u+4| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+2}{u+4}\right|$. Интеграл справа равен $\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x|$. Отсюда решение можно записать в виде $\ln\left|\frac{u+2}{u+4}\right| = \ln|x| + \ln C$ или $\frac{u+2}{u+4} = Cx$.

Подставив $u = \frac{y}{x}$, получим $\frac{y+2x}{y+4x} = Cx$. Общее решение имеет вид $y + 2x = Cx(y+4x)$.

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Определение 1. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется **линейным**, если искомая функция y и её производная y' входят в уравнение в первой степени

$$A(x)\,y' + B(x)\,y + C(x) = 0, \tag{4.1}$$

где $A(x), B(x), C(x)$ - произвольные функции от x.

Замечание 1. Считая коэффициент *A(x)* не равным нулю, дифференциальное уравнение (4.1) приводят к виду

$$y' + p(x)\,y - q(x) = 0 \quad \text{или} \quad y' + p(x)\,y = q(x), \tag{4.2}$$

где $p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, \quad q(x) = -\frac{C(x)}{A(x)}$.

Замечание 2. Функции $p(x), \quad q(x)$ считаются заданными.

Замечание 3. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка всегда интегрируется в квадратурах (то есть всегда его решение можно записать в форме интегралов.

Замечание 4. Существуют два метода решения этого уравнения: 1) *метод Коши* и 2) *метод Иоганна Бернулли*. Так как метод Коши является общим для всех линейных уравнений, рассмотрим только его.

Метод Коши решения линейных дифференциальных уравнений

Определение 2. Если в уравнении (4.2) $q(x) = 0$, то есть,

$$y' + p(x)\,y = 0, \tag{4. 3}$$

то уравнение называется *линейным однородным*.

Общее решение уравнения (4.3) обозначают $\bar{y}$ (y под чертой), а какое-нибудь *частное решение* неоднородного уравнения $y' + p(x)\,y = q(x)$ обозначают y^* («игрек со звёздочкой»).

Теорема Коши. *Общее решение неоднородного уравнения (4.2) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения* (4.3) $\bar{y}$ *и какого-либо частного решения неоднородного уравнения (4.22)* y^*

$$y = \bar{y} + y^*. \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нужно доказать, что сумма (4.4) является общим решением уравнения (4.2). Для этого подставим (4.4) в уравнение (4. 2), тогда

$$(\bar{y} + y^*)' + p(x)(\bar{y} + y^*) = q(x).$$

Перегруппируем и запишем в виде

$$(\bar{y}' + p(x)\bar{y})' + [y^*{}' + p(x)y^*] = q(x). \tag{4.5}$$

Так как по определению $\bar{y}$ является решением уравнения (4.3), то первая скобка равна нулю

$$\bar{y}' + p(x)\,\bar{y} = 0,$$

а оставшаяся скобка равна $q(x)$, то получается

$$y^*{}' + p(x)y^* = q(x).$$

Значит, равенство (4.5) представляет собой тождество. Таким образом, доказано, что (4.4) является *решением.* Нужно доказать, что оно является *общим решением.* Для этого нужно доказать, что произвольная постоянная, входящая в общее решение уравнения (4.2), определяется *единственным* образом. Пусть y_1 является частным решением уравнения (4.3). Тогда можно записать

$$\bar{y} = Cy_1 .$$

В этом случае общее решение уравнения (4.2) имеет вид

$$y = Cy_1 + y^* . \tag{4.6}$$

Пусть заданы начальные условия в виде

$$y\Big|_{x=x_o} = y_o . \tag{4.7}$$

Будет доказано, что (4.6) является общим решением, если будет доказано, что при условиях (4.7) постоянная C определяется единственным образом. Подставим начальные условия (4.7) в формулу (4.6). Обозначим $y_1(x_o) = y_{10}$. Тогда

$$y_o = Cy_{10} + y_o^*$$

и

$$C = \frac{y_o - y_o^*}{y_{10}} . \tag{4.8}$$

Замечание 5. Если $y_{10} = 0$, то такое решение называется *тривиальным*.

Из (4.8) следует, что в нетривиальном случае всегда можно найти C и притом единственным образом, ч.т.д.

Решение дифференциального уравнения (4.2).

1) *Определение* $\bar{y}$. Однородное уравнение $y' + p(x)\,y = 0$ решается как уравнение с разделяющимися переменными, то есть получается

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)\,y \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = -p(x)\,dx .$$

Решение имеет вид

Жозеф Луи Лагранж
1736 - 1813

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx + \ln C .$$

Отсюда

$$\ln y = -\int p(x)\,dx + \ln C \quad \text{и тогда}$$

$$\bar{y} = C\,e^{-\int p(x)\,dx} . \tag{4.9}$$

2) *Определение частного решения* y^* выполняется по *методу Лагранжа вариации произвольной постоянной.* Для этого y^* ищется в виде общего решения, только вместо произвольной постоянной подставляется неизвестная функция $u(x)$, то есть

$$y^* = u(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} . \tag{4.10}$$

Подставляя (4.10) в (4.2) , получают

$$\frac{d\,u(x)}{d\,x} e^{-\int p(x)dx} + u(x)e^{-\int p(x)dx} \cdot [-p(x)] + p(x) \cdot u(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) .$$

Здесь второе и третье слагаемые взаимно уничтожаются, и остаётся уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{d\,u(x)}{d\,x} = q(x)e^{\int p(x)\,dx} .$$

Отсюда

$$u(x)=\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}d\,x\,,$$

и частное решение получается в виде

$$y^*=e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}d\,x\,. \tag{4.11}$$

Тогда по формуле (4.4) получим

$$y=\bar{y}+y^*=e^{-\int p(x)\,dx}\left[C+\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}d\,x\right]. \tag{4.12}$$

Пример 1. Поставлена задача Коши, то есть, дано линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3 \tag{4.13}$$

и начальные условия $y\big|_{x=0}=3$.

Решение. По методу Коши решение ищется в виде $y=\bar{y}+y^*$.

1) *Определение* $\bar{y}$. Запишем однородное уравнение, соответствующее заданному неоднородному

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0\,.$$

Разделим переменные

$$\frac{dy}{y}=\frac{2}{x+1}dx \quad \text{или} \quad \int\frac{dy}{y}=\int\frac{2}{x+1}dx\,,$$

отсюда $\ln y=\int\frac{2}{x+1}dx+\ln C$ или $\ln y=2\ln(x+1)+\ln C$,

$$\bar{y}=C(x+1)^2\ .$$

2) *Определение* y^* ищется в виде $y^*=u(x)\cdot(x+1)^2$.

Подставим в заданное дифференциальное уравнение и получим

$$\frac{du}{dx}(x+1)^2+u\cdot 2(x+1)-2u\cdot(x+1)=(x+1)^3$$

или $$\frac{du}{dx}(x+1)^2=(x+1)^3 \ \text{или}\ \frac{du}{dx}=(x+1)\,.$$

Откуда $$u=\frac{(x+1)^2}{2} \quad \text{и} \quad y^*=\frac{(x+1)^4}{2}\ .$$

И общее решение имеет вид

$$y=\frac{(x+1)^4}{2}+C\cdot(x+1)^2\,.$$

3) Решение задачи Коши

$$3=\frac{(0+1)^4}{2}+C\cdot(0+1)^2\text{, откуда } C=\frac{5}{2}$$

и решение задачи Коши имеет вид

$$y=\frac{(x+1)^4}{2}+\frac{5\,(x+1)^2}{2}\,.$$

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

В общем случае дифференциальное уравнение n-го порядка можно представить в виде

$$F(x,y,y',y'',....,y^{(n-1)},y^{(n)})=0 \tag{5.1}$$

или, если уравнение разрешено относительно первой производной, то

$$y^{(n)}=F(x,y,y',y'',....,y^{(n-1)})\,. \tag{5.2}$$

Определение 1. *Общим решением* дифференциального уравнения (5.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \tag{5.3}$$

зависящая от n произвольных постоянных и обращающая дифференциальное уравнение (5.2) в тождество при любых значениях этих постоянных.

Определение 2. Соотношение, связывающее независимую переменную *x,* искомую функцию y и n значений констант интегрирования и неразрешённое относительно искомой функции, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения, который имеет вид

$$\psi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0. \tag{5.4}$$

Определение 3. *Частным решением* дифференциального уравнения называется любая функция

$$y = \varphi(x),$$

которая получается из общего решения при конкретных значениях C_i ($i = 1,2,...,n$).

Геометрический смысл общего решения дифференциального уравнения

1) общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ или $\psi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ - это n-параметрическое семейство интегральных кривых,
2) частное решение $y = \varphi(x)$ - это одна интегральная кривая, проходящая через заданную точку $M_o(x_o, y_o)$.

Теорема Коши единственности и существования решения дифференциального уравнения (без доказательства**):** *если в дифференциальном уравнении* (5.1) *правая часть* $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ *и её частные производные по аргументам* $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ *непрерывны в некоторой области, содержащей значения* $x = x_o, y = y_o, y' = y_o'$, $...., y^{(n-1)} = y_o^{(n-1)}$, *то существует, и притом единственное, решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям Коши*

$$y\big|_{x=x_O} = y_o,\ \ y'\big|_{x=x_O} = y_o', ..., y^{(n-1)}\Big|_{x=x_O} = y_o^{(n-1)}\Big|. \tag{5.5}$$

Порядок выделения частного решения из общего

1) Необходимо от общего решения взять производные до $(n-1)$ -го порядка включительно, тогда вместе с общим решением получится n уравнений

$$\begin{aligned} y_o &= \varphi_o(x_o, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y'_o &= \varphi_1(x_o, C_1, C_2, ..., C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_o^{(n-1)} &= \varphi_{n-1}(x_o, C_1, C_2, ..., C_n). \end{aligned} \tag{5.6}$$

2) Подставляя в (5.5) условия Коши, получают n уравнений относительно n неизвестных $C_1, C_2, ..., C_n$.
3) Решая полученную систему уравнений, получают все C_i $i = 1,2,...,n$.
4) Подставляя C_i в общее решение (5.3), получают частное решение задачи Коши.

Замечание 1. Существует несколько типов дифференциальных уравнений высшего порядка, интегрируемых в квадратурах, но мы рассмотрим только *линейные* уравнения.

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения

Определение 4. Дифференциальное уравнение n- го порядка называется *линейным,* если оно первой степени относительно искомой функции y и её производных $y', y'', ..., y^{(n)}$, то есть, имеет вид

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = f(x), \qquad (5.7)$$

где $a_o, a_1, a_2, ..., a_n,, f(x)$ - заданные функции от x или постоянные, причём $a_o \neq 0$ для всех значений x из области изучения.

Замечание 2. Обычно предполагается, что все функции $a_o, a_1, a_2, ..., a_n, f(x)$ *непрерывны* при всех значениях *x*.

Определение 5. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным* или уравнением **с** *правой частью*.

Определение 6. Если $f(x) = 0$ и уравнение имеет вид

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = 0, \qquad (5.8)$$

то оно называется линейным *однородным*.

Замечание 4. Основные свойства однородных линейных уравнений доказывается на уравнениях 2-го порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (5.9)$$


Юзеф Вроньский
1776 - 1853

Теорема 1. *Если* y_1 *и* y_2 *- частные решения линейного однородного уравнения второго порядка* (5.9), *то* $y_1 + y_2$ *есть тоже решение этого уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как y_1 и y_2 решения дифференциального уравнения (5.9), то

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 &= 0, \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 &= 0. \end{aligned}\right\}. \qquad (5.10)$$

Подставим в (5.9) сумму $y_1 + y_2$ и, учитывая (5.10), получим

$$y_1'' + y_2'' + a_1(y_1' + y_2') + a_2(y + y) = 0.$$

Перегруппировка приводит к виду

$$(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0, \text{ ч.т.д.}$$

Теорема 2. *Если* y_1 *является решением уравнения* (5.9), *а* C *– константа, то* $C y_1$ *тоже является решением уравнения* (5.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим $C y_1$ в уравнение (5.9). Тогда получим

$$(Cy_1'' + a_1 C y_1' + a_2 C y_1) = C(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = C \cdot 0 = 0, \text{ ч.т.д.}$$

Определение 7. Два решения уравнения (5.9) y_1 и y_2 называются *линейно-независимыми* на отрезке $[a,b]$, если их отношение на этом отрезке не является постоянным

$$\frac{y_1}{y_2} \neq const.$$

Определение 8. Если отношение двух частных решений равно постоянному числу

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda, \text{ когда } a \le x \le b,$$

то эти решения называются *зависимыми*.

Пример 1. e^x и $3e^x$ являются линейно-зависимыми, а e^x и e^{2x} - *линейно-независимы*.

Определение 9. Если y_1, y_2 являются двумя решениями уравнения (5.9), то определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_2' y_1 - y_1' y_2$$

называется *определителем Вронского* или *вронскианом* данных решений.

Теорема 3. *Если функции* y_1 *и* y_2 *линейно - зависимы на отрезке* $[a,b]$, *то определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что $y_1 = \lambda\, y_2$ и $y'_1 = \lambda\, y'_2$, а тогда

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda\, y_2 & y_2 \\ \lambda\, y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0, \text{ ч.т.д.}$$

Теорема 4. *Если определитель Вронского* $W(y_1, y_2)$*, составленного для решений* y_1 *и* y_2 *линейно - однородного уравнения* (5.9), *не равен нулю на отрезке* $[a, b]$, *на котором коэффициенты уравнения непрерывны, то он не обращается в нуль ни при каком значении х этого отрезка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как y_1 и y_2 два решения уравнения (5.9), то при умножении первого уравнения на y_2, а второе на $-y_1$

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0, \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$$

и суммирование дают

$$(y_1'' y_2 - y_1 y_2'') + a_1 (y_1' y_2 - y_1 y_2') = 0. \qquad (5.11)$$

Разность во второй скобке – определитель Вронского, а в первой – производная определителя Вронского

$$W'(y_1, y_2) = (y_2' y_1 - y_1' y_2)' = y_2'' y_1 + y_2 y_1 - y_1'' y_2 - y_2 y_1 = y_2'' y_1 - y_1'' y_2.$$

Тогда из(5.11) следует

$$W'(y_1, y_2) = -a_1 W(y_1, y_2).$$

Получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{d\,W(y_1, y_2)}{d\,x} = -a_1 W(y_1, y_2),$$

откуда

$$\frac{d\,W}{W} = -a_1 d\,x \text{ при } W \neq 0,$$

так как y_1 и y_2 являются линейно – независимыми. Решая это дифференциальное уравнение, получим

$$\int \frac{d\,W}{W} = -\int a_1 d\,x, \text{ откуда } \quad \ln W = -\int_{x_o}^{x} a_1 dx + \ln C.$$

Решение можно записать в виде

$$W = C\,e^{-\int_{x_o}^{x} a_1 dx}. \qquad (5.12)$$

Эта формула называется формулой *Остроградского – Лиувилля.*

По условию теоремы

$$W\big|_{x = x_o} = C\,e^0 = C \neq 0,$$

но тогда из (5.12) получается, что $W \neq 0$ ни при каких конечных значениях *x,* ч.т.д.

Замечание 13. Если определитель Вронского $W = 0$ при каком-нибудь значении x_o, то

$$W = C\,e^{-\int_{x_o}^{x} a_1 dx}$$

равен нулю при любом *x*. Рассмотрим W при $x = x_o$

$$W = C\,e^{-\int_{x_o}^{x_o} a_1 dx} = C\,e^0 = C \cdot 1 = C,$$

но так как $W = 0$, то С = 0 при любом *x*.

Следствие 1. Если решения y_1 и y_2 уравнения (5.42) линейно – независимы на отрезке $[a,b]$, то определитель Вронского W, составленный для этих решений, не обращается в ноль ни в одной точке указанного отрезка.

Теорема 5. *Если* y_1 *и* y_2 *два линейно – независимых решения уравнения* (5.9)*, то*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{5.13}$$

где C_1, C_2 *- произвольные постоянные, есть общее решение уравнения* (5.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из первых двух теорем очевидно, что (5.13) является решением дифференциального уравнения (5.9). Для того чтобы доказать, что решение (5.13) является *общим,* достаточно показать, что из него можно найти частное решение при любых заданных начальных условиях

$$y\big|_{x=x_o} = y_o,\; y'\big|_{x=x_o} = y_o'. \tag{5.14}$$

Представим решение (13) и его производную в точке $x = x_o$ в виде

$$\begin{aligned} y_o &= C_1 y_{10} + C_2 y_{20}, \\ y_o' &= C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

где $y_{10} = y_1\big|_{x=x_o}$, $y_{20} = y_2\big|_{x=x_o}$, $y'_{10} = y'_1\big|_{x=x_o}$, $y'_{20} = y'_2\big|_{x=x_o}$.

Так как решения y_1 и y_2 - линейно – независимы, вронскиан $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ не равен нулю, система уравнений относительно постоянных C_1, C_2 имеет единственное решение, а это значит, что при *любых начальных условиях* (5.14) система (5.15) имеет единственное решение.

Замечание 14. Общих методов для нахождения общего решения в конечном виде линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами не существует. Но для уравнения с *постоянными* коэффициентами такой метод *существует*.

Теорема 6. *Если известно одно частное решение линейного однородного уравнения второго порядка, нахождение второго частного решения сводится к интегрированию функций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть y_1 есть известное частное решение дифференциального уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Найдём y_2 так, чтобы y_1 и y_2 были линейно – независимы. Тогда общее решение выразиться формулой

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Тогда $y_2' y_1 - y_1' y_2 = C\, e^{-\int a_1\, dx}$. Разделив это равенство на $y_1'^2$, получим

$$\frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1'^2} = \frac{1}{y_1'^2} C\, e^{-\int a_1\, dx}.$$

Легко видеть, что слева стоит производная частного, то есть

$$\frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{y_1'^2} C\, e^{-\int a_1\, dx}.$$

Интегрируя левую и правую часть, получают

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C\, e^{-\int a_1\, dx}}{y_1'^2} dx,$$

откуда получается

$$y_2 = y_1 \int \frac{C\, e^{-\int a_1\, dx}}{y_1'^2} dx + C_2.$$

Положив С = 1 и $C_2 = 0$, получим второе частное решение в виде

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1\,dx}}{y_1'^2} dx. \qquad (5.16)$$

Так как $\frac{y_2}{y_1} \neq const$, решения y_1 и y_2 линейно независимы. Тогда общее решение дифференциального уравнения (5.9) имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1\,dx}}{y_1'^2} dx. \qquad (5.17).$$

Пример 2. Найти общее решение однородного линейного дифференциального уравнения

$$(1 - x^2)\,y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = 0\,.$$

Одно частное решение можно угадать. В данном случае $y_1 = x$.

Приведём заданное уравнение к каноническому виду

$$y'' - \frac{2\,x}{1 - x^2}\,y' + \frac{2}{1 - x^2}\,y = 0\,.$$

Отсюда $a_1 = -\frac{2x}{1 - x^2}$. По формуле (5.16) получим

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{2xdx}{1-x^2}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2(1 - x^2)}\,.$$

Справа получился интеграл от рациональной дроби. Нужно разложить эту дробь на простейшие, тогда получится

$$y_2 = x \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1 - x)} + \frac{1}{2(1 + x)} \right) dx = x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| \right].$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1 x + C_2 \left[\frac{x}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| - 1 \right].$$

2. Неоднородные линейные уравнения высших порядков

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (5.18)$$

где $a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n, f(x)$ - непрерывные функции от x.

Пусть нам известно общее решение

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 +,,,+ C_n y_n, \qquad (5.19)$$

соответствующее однородному уравнению

$$\bar{y}^{(n)} + a_1 \bar{y}^{(n-1)} + a_2 \bar{y}^{(n-2)} + \ldots + a_n \bar{y} = f(x). \qquad (5.20)$$

Теорема 7. *Если* $\bar{y}$ *- общее решение однородного уравнения* (5.20)*, а* y^* *- частное решение неоднородного уравнения* (5.18), *то*

$$y = \bar{y} + y^* \qquad (5.21)$$

является общим решением неоднородного уравнения.

Нахождение $\bar{y}$ разобрано выше, а частное решение y^* находится методом вариации произвольных постоянных Лагранжа, как и для дифференциального уравнения первого порядка. Рассмотрим нахождение y^* для дифференциального уравнения второго порядка.

Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа

Напишем общее решение однородного уравнения

$$y''+a_1 y'+a_2 y=0 \qquad (5.22)$$

в виде

$$y=C_1 y_1+C_2 y_2 . \qquad (5.23)$$

Будем искать частное решение y^* неоднородного уравнения

$$y''+a_1 y'+a_2 y=f(x) \qquad (5.24)$$

в виде (5.24), но считая константы функциями от x

$$y^*=C_1(x)\,y_1+C_2(x)\,y_2 . \qquad (5.25)$$

Продифференцируем (5.25) по x и получим

$$y'=C_1^1 y_1+C_1\,y'_1+C_2^{'} y_2+C_2\,y'_2 . \qquad (5.26)$$

Подберём искомые функции C_1 и C_2 так, чтобы

$$C_1^1 y_1+C_2^{'} y_2=0 . \qquad (5.27).$$

Тогда

$$y'=C_1\,y'_1+C_2\,y'_2 . \qquad (5.28)$$

Дифференцируя (5.28), получим

$$y''=C_1^{'} y'_1+C_1\,y''_1+C_2^{'} y'_2+C_2\,y''_2 . \qquad (5.29)$$

Подставим y, y', y'' в (5.24), получим

$$C_1\,y''_1+C_2\,y''_2+C_1^{'} y'_1+C_2^{'} y'_2+a_1(C_1\,y'_1+C_2\,y'_2)+a_2(C_1\,y_1+C_2\,y_2)=f(x)$$

или

$$C_1(\,y''_1+a_1\,y'_1+a_2 y_1)+C_2\,(y''_2+a_1\,y'_2+a_2 y_2)+C_1^{'} y'_1+C_2^{'} y'_2=f(x) .$$

Выражения в скобках равны нулю, так как y_1 и y_2 являются решениями однородного уравнения. Отсюда получается второе условие для определения C'_1 и C'_2 в виде

$$C_1^{'} y'_1+C_2^{'} y'_2=f(x) .$$

Таким образом, получается система двух уравнений для C'_1 и C'_2

$$\left.\begin{aligned} C_1^1 y_1+C_2^{'} y_2 &=0 \\ C_1^{'} y'_1+C_2^{'} y'_2 &=f(x) \end{aligned}\right\} . \qquad (5.30)$$

Решая систему (5.9), получают

$$C_1^{'}=\varphi_1(x), \quad C_2^{'}=\varphi_2(x).$$

Интегрируя по x, получают

$$C_1(x)=\int \varphi_1(x)\,dx+\overline{C}_1, \quad C_2(x)=\int \varphi_2(x)dx+\overline{C}_2 . \qquad (5.31)$$

Так как ищутся частные решения, постоянные интегрирования $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ принимаются равными нулю. Подставляя в (5.30), получают y^*.

$$y^*=C_1(x)\,y_1+C_2(x)\,y_2 . \qquad (5.32)$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка получается в виде

$$y=C_1 y_1+C_2 y_2+C_1(x) y_1+C_2(x) y_2 . \qquad (5.33)$$

§ 6. Линейные однородные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Определение 1. Однородным линейным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y''+p\,y'+q\,y=0, \qquad (6.1)$$

где p и q - константы.

Общее решение этого уравнения ищется в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{6.2}$$

в котором y_1 и y_2 - два линейно независимых частных решения. Эти решения определяются с помощью подстановки Эйлера

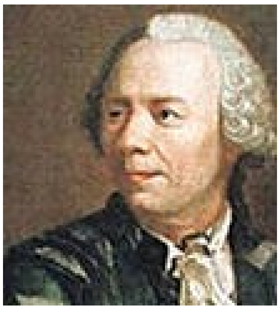
$$y = e^{rx}, \tag{6.3}$$

где r - постоянное число.

Получим первую и вторую производные выражения (6.3) в виде

$$y' = r e^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

и подставим в уравнение (6.1). Получается



Леонард Эйлер
1707-1783

$$r^2 e^{rx} + p r e^{rx} + q e^{rx} = 0$$

или

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0.$$

Так как показательная функция от любого аргумента не может равняться нулю, то равна нулю скобка

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{6.4}$$

Определение 2. Уравнение (6.4) для определения искомых значений r_1 и r_2 называется *характеристическим* уравнением уравнения (6.1).

Решение этого уравнения имеет вид

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{6.5}$$

В зависимости от решений (6.4) возможны три принципиально разных случая значения y_1 и y_2:

1) корни квадратного уравнения (6.4) действительные, разные $r_1 \neq r_2$;
2) корни квадратного уравнения (6.4) действительные равные (кратные) $r_1 = r_2$;
3) корни квадратного уравнения (6.4) комплексные сопряжённые. В зависимости от этого получаются разные решения y_1 и y_2.

Случай 1. Корни квадратного уравнения (6.4) *действительные, разные* $r_1 \neq r_2$; Тогда

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}. \tag{6.6}$$

Покажем, что эти два решения линейно независимы

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}} = e^{(r_1 - r_2)x} \neq const.$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (6.1) имеет вид

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \tag{6.7}$$

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Решение. Это линейное (так как неизвестная функция y и её производные y' и y'' входят в первой степени!), однородное (так как справа стоит нуль!), с постоянными коэффициентами, поэтому его общее решение ищется по формуле Коши

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Частные решения y_1 и y_2 ищутся с помощью подстановки Эйлера

$$y = e^{rx}.$$

Для решения определяются производные в виде

$$y' = r\,e^{rx}, \quad y'' = r^2\,e^{rx}$$

и подставляются в заданное уравнение

$$e^{rx}(r^2 + r - 2) = 0,$$

из которого получается характеристическое уравнение

$$(r^2 + r - 2) = 0.$$

По формуле (6.71) получают решение в виде

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$

откуда $r_1 = 1, \quad r_2 = -2$. Следовательно, решения получились действительные, разные и искомые частные решения имеют вид

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-2x}.$$

Искомое общее решение записывается в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Случай 2. Корни характеристического уравнения *действительные равные*.

Следовательно, есть только один корень характеристического уравнения и одно решение

$$y_1 = e^{r_1 x},$$

а необходимо иметь два разных корня. Для того чтобы найти второе линейно независимое частное решение, используем первое решение и будем искать второе в виде

$$y_2 = u(x)\,e^{r_1 x}.$$

Продифференцируем это выражение два раза

$$y'_2 = u'(x)\,e^{r_1 x} + r_1 u(x)\,e^{r_1 x} = e^{r_1 x}[u'(x) + r_1 u(x)],$$

$$y''_2 = u''(x)\,e^{r_1 x} + 2r_1 u'(x)\,e^{r_1 x} + r_1^2 u(x)\,e^{r_1 x} = e^{r_1 x}[u''(x) + 2r_1 u'(x) + r_1^{\,2} u(x)]$$

и подставим в дифференциальное уравнение (6.73). Тогда

$$e^{r_1 x}\left\{[u''(x) + 2r_1 u'(x) + r_1^{\,2} u(x)] + p[u'(x) + r_1 u(x)] + q\,u(x)\right\} = 0,$$

$$u''(x) + u'(x)[2r_1 + p] + u(x)[r_1^{\,2} + p\,r_1 + q] = 0. \qquad (*)$$

Так как r_1 является решением характеристического уравнения, вторая квадратная скобка равна нулю. Кроме того, следует вспомнить, что равные решения квадратного уравнения получаются, когда в (6.4) равно нулю подкоренное выражение. В этом случае $r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$

Следовательно, равна нулю и первая квадратная скобка в уравнении (*). Отсюда для определения $u(x)$ получается уравнение

$$u''(x) = 0,$$

которое легко решается, так как $u'(x) = C_1$, а $u(x) = C_1 x + C_2$. Так как мы ищем *частное* решение, то мы можем положить $C_1 = 1, \quad C_2 = 0$. Отсюда второе частное линейно независимое решение имеет вид

$$y_2 = x\,e^{r_1 x}. \qquad (6.8)$$

Следствие 1. В случае *равных корней* характеристического уравнения для получения линейно независимого второго частного решения нужно первое частное решение умножить на *x*.

Отсюда общее решение получается в виде

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x\,e^{r_1 x} = e^{r_1 x}(C_1 + C_2 x). \qquad (6.9)$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'-4\,y'+4\,y=0\,.$$

Решение. Общее решение ищется по формуле Коши

$$y=C_1 y_1+C_2 y_2\,.$$

Частные решения y_1 и y_2 ищутся с помощью подстановки Эйлера

$$y=e^{r\,x}\,.$$

Для решения определяются производные в виде

$$y'=r\,e^{r\,x},\quad y''=r^2\,e^{r\,x}$$

и подставляются в заданное уравнение

$$e^{r\,x}(r^2-4r+4)=0\,.$$

Характеристическое уравнение

$$r^2-4r+4=0$$

имеет решение

$$r_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2\,.$$

Следовательно, мы имеем только одно частное решение $y_1=e^{2x}$, а второе получаем умножением на *x*, то есть $y_2=x\,e^{2x}$. *Общее решение* заданного уравнения имеет вид

$$y=e^{2x}(C_1+C_2 x)\,.$$

Случай 3. Корни характеристического уравнения $r_1\neq r_2$ *комплексные сопряжённые*. Это можно записать так:

$$r_1=\alpha+i\,\beta,\quad r_1=\alpha-i\,\beta,$$

где $\alpha=-\dfrac{p}{2}$, $\beta=\sqrt{q-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2}$.

Частные решения можно записать так:

$$y_1=e^{(\alpha+i\,\beta)\,x},\quad y_2=e^{(\alpha-i\,\beta)\,x}$$

или так

$$y_1=e^{\alpha\,x}(\cos\beta\,x+i\sin\beta\,x),\quad y_2=e^{\alpha\,x}(\cos\beta\,x-i\sin\beta\,x)\,. \tag{6.10}$$

Замечание 15. При решении практических задач интересны *действительные,* а не комплексные или мнимые решения, поэтому необходимо из этих комплексных решений получить два линейно независимых разных действительных решения. Для этого докажем теорему.

Теорема 8. *Если некоторая комплексная функция* $y=u(x)+i\,\upsilon(x)$ *является решением дифференциального уравнения (6.1), то её действительная часть* $u(x)$ *и мнимая часть* $\upsilon(x)$ *также являются решениями этого уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о**.** Для доказательства подставим $y=u(x)+i\,\upsilon(x)$ в уравнение (6.1). Тогда

$$u''+p\,u'+q\,u+i\big(\upsilon''+p\,\upsilon'+q\,\upsilon\big)=0,$$

Известно, что комплексное число или комплексная функция могут быть равны нулю только, если равны нулю их действительная и мнимая часть. Следовательно, получается

$$u''+p\,u'+q\,u=0,$$

$$\upsilon''+p\,\upsilon'+q\,\upsilon=0,$$

откуда следует, что $u(x)$ и $\upsilon(x)$ являются решениями уравнения (6.1), ч.т.д.

Выделим действительные и мнимые части из (6.10). Получим 4 частных решения

$$y_1=e^{\alpha\,x}\cos\beta\,x\quad y_2=e^{\alpha\,x}\sin\beta\,x\,,$$

$$y_3=e^{\alpha\,x}\cos\beta\,x,\quad y_4=-\,e^{\alpha\,x}\sin\beta\,x\,.$$

Из этих четырёх частных решений независимыми являются только первые два. Отсюда получается общее решение в виде

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \qquad (6.11)$$

Пример 3. Решить обыкновенное однородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'+2y'+5y = 0.$$

Решение. Общее решение ищется по формуле Коши

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Частные решения y_1 и y_2 ищутся с помощью подстановки Эйлера

$$y = e^{rx}.$$

Для решения определяются производные в виде

$$y' = r e^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

и подставляются в заданное уравнение

$$e^{rx}(r^2 + 2r + 5) = 0,$$

из которого получается характеристическое уравнение

$$(r^2 + 2r + 5) = 0.$$

Решение характеристического уравнения имеет вид

$$r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \times 2i.$$

Здесь $\alpha = -1, \quad \beta = 2$. Подставляя в (6.42), получим решение в виде

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

§ 7. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядков с постоянными коэффициентами

Определение 3. Дифференциальное линейное уравнение называется *неоднородным*, если в его правой части стоит не нуль, а функция от *x*

$$y''+p\,y'+q\,y = f(x), \qquad (7.1)$$

где p и q - константы, а $f(x)$.- непрерывная функция от *x*.

Общее решение этого уравнения выполняется по методу Коши в виде

$$y = \bar{y} + y^*, \qquad (7.2)$$

где $\bar{y}$ является общим решением соответствующего однородного уравнения $y''+p\,y'+q\,y = 0$, а y^* - какое-нибудь частное решение уравнения 7.12). y^* ищется методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. (В некоторых случаях y^* может быть найдено методом подбора коэффициентов).

Замечание 16. Есть такая форма $f(x)$, когда можно найти y^* достаточно простым способом.

Нахождение y^*, когда $f(x) = P_m(x)e^{ax}$

В случае, когда $f(x) = P_m(x)e^{ax}$, где $P_m(x)$ - многочлен порядка m

$$P_m(x) = A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \dots A_1 x + A_o, \qquad (7.3)$$

где $A_m, A_{m-1}, .. A_1, A_o$ вещественные числа, для нахождения решения y^* выбирается в виде (7.4), но с неизвестными коэффициентами

$$y^* = Q_m(x)e^{ax} = \left(B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1} + ...B_1 x + B_o\right)\cdot e^{ax}. \qquad (7.4)$$

Для определения y^* нужно найти $m+1$ коэффициентов B_i $\quad i = 0,1,...,m-1,m$.

Для нахождения решения нужно (7.81) подставить в дифференциальное уравнение (7.78) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x. В результате получится система из такого числа уравнений, каково число неизвестных коэффициентов B_i.

$$y^* = Q_m(x)e^{ax},$$

$$y'^* = Q_m'(x)e^{ax} + aQ_m(x)e^{ax} = [Q_m'(x) + aQ_m(x)]e^{ax},$$

$$y''^* = Q_m''(x)e^{ax} + 2aQ'_m(x)e^{ax} + a^2 Q_m(x)e^{ax} =$$

$$= [Q_m''(x) + 2aQ'_m(x) + a^2 Q_m(x)]e^{ax}.$$

Подстановка в (7.1) и деление на e^{ax} приводит к равенству

$$[Q_m''(x) + 2aQ'_m(x) + a^2 Q_m(x)] + p[Q_m'(x) + aQ_m(x)] + qQ_m(x) = P_m(x).$$

После перегруппировки получается

$$Q_m''(x) + Q'_m(x)[2a + p] + Q_m(x)[a^2 + pa + q] = P_m(x). \qquad (7.5)$$

Здесь $Q_m(x)$ - многочлен порядка m,

$Q'_m(x)$ - многочлен порядка $m-1$,

$Q_m''(x)$ - многочлен порядка $m-2$.

Здесь возможны три случая.

Случай 1. Число *a не является корнем характеристического уравнения* $r^2 + pr + q = 0$. Тогда в равенстве (7.5) слева и справа стоят многочлены одного порядка m, что даёт возможность получить для $m+1$ неизвестного коэффициента систему из $m+1$ уравнения.

Случай 2. Множитель показателя *a совпадает с одним из корней* характеристического уравнения $r^2 + pr + q = 0$. Тогда в (7.5) вторая квадратная скобка равна нулю и слева стоит многочлен, порядок которого ниже на единицу, чем многочлен справа $P_m(x)$

$$Q_m''(x) + Q'_m(x)[2a + p] = P_m(x). \qquad (7.6)$$

.В этом случае для получения необходимого числа уравнений для определения $m+1$ коэффициента нужно для определения y^* искать его в виде

$$y^* = xQ_m(x)e^{ax} = \left(B_m x^{m+1} + B_{m-1}x^m + ...B_1 x^2 + B_o x\right)\cdot e^{ax}. \qquad (7.7)$$

Случай 3. Если a совпадает с кратным корнем характеристического уравнения $r^2 + pr + q = 0$. Тогда получается равенство

$$Q_m''(x) = P_m(x), \qquad (7.8)$$

в котором слева стоит многочлен порядка $m-2$, а справа – порядка m. В этом случае для определения всех необходимых коэффициентов нужно искать y^* в виде

$$y^* = x^2 Q_m(x)e^{ax} = \left(B_m x^{m+2} + B_{m-1}x^{m+1} + ...B_1 x^3 + B_o x^2\right)\cdot e^{ax}. \qquad (7.9)$$

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = xe^{2x}.$$

Решение. Данное дифференциальное уравнение линейное неоднородное 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение ищется по методу Коши в виде суммы

$$y = \bar{y} + y^*.$$

Шаг 1. Определяется общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$\bar{y}$ в виде $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Частные решения y_1 и y_2 определяются с помощью подстановки Эйлера $y = e^{rx}$, $y' = r e^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, откуда получается характеристическое уравнение

$$r^2 - 2r - 3 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3},$$

откуда $r_1 = -1$, $r_2 = 3$, что даёт два линейно независимых частных решения $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{3x}$ и общее решение («игрек с чертой»)

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Шаг 2. Определение $y*$ выполняется в виде

$$y* = (Ax + B)e^{2x},$$

так как $P_1(x) = x$ - многочлен первого порядка, а $a = 3$ не совпадает с корнями характеристического уравнения.

$y'* = A\, e^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x}$,

$y''* = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4(Ax + B)e^{2x} = 4Ae^{2x} + 4(Ax + B)e^{2x}$.

Подстановка в заданное уравнение даёт

$4Ae^{3x} + 4(Ax + B)e^{3x} - 2 \cdot \left[A\, e^{3x} + 2(Ax + B)e^{3x}\right] - 3 \cdot (Ax + B)e^{3x} = xe^{3x}$.

Откуда

$4A + 4(Ax + B) - 2 \cdot \left[A + 2(Ax + B)\right] - 3 \cdot (Ax + B) = x$

$x\Big|\quad 4A - 4A - 3A = 1 \Rightarrow \quad A = -\dfrac{1}{3},$

$x^o\Big|\quad 4A + 4B - 2A - 4B - 3B = 0, \quad 2A - 3B = 0 \Rightarrow \quad B = \dfrac{2}{3}A = -\dfrac{2}{9}.$

Отсюда $y* = \left(-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{9}\right)e^{2x}$.

Проверка полученного частного решения $y*$:

$y* = \left(-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{9}\right)e^{2x},$

$y'* == -\dfrac{1}{3}e^{2x} + \left(-\dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{9}\right)e^{2x} = \left(-\dfrac{2}{3}x - \dfrac{7}{9}\right)e^{2x},$

$y''* == -\dfrac{2}{3}e^{2x} + \left(-\dfrac{4}{3}x - \dfrac{14}{9}\right)e^{2x} = \left(-\dfrac{4}{3}x - \dfrac{20}{9}\right)e^{2x}.$

Подстановка в заданное уравнение даёт

$\left(-\dfrac{4}{3}x - \dfrac{20}{9}\right)e^{2x} - 2 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}x - \dfrac{7}{9}\right)e^{2x} - 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{9}\right)e^{2x} = xe^{2x},$

$\left(-\dfrac{4}{3}x - \dfrac{20}{9}\right) - 2 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}x - \dfrac{7}{9}\right) - 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{9}\right) = x,$

$\left(-\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3} + \dfrac{3}{3}\right)x - \dfrac{20}{9} + \dfrac{14}{9} + \dfrac{6}{9} = x + 0 = x.$

Значение $y*$ *найдено верно*. Тогда общее решение нелинейного уравнения равно

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - (\frac{1}{3}x + \frac{2}{9})e^{2x}.$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$y''-2y'-3y=xe^{-x}.$$

Здесь левая часть такая же, как в первом примере, поэтому игрек с чертой равно

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}.$$

Но здесь $a=-1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения, поэтому $y*$ нужно принимать в виде

$$y*=(Ax^2+Bx)e^{-x}.$$

Найдём производные

$y'*=(2Ax+B)e^{-x}+(-Ax^2-Bx)e^{-x}=[-Ax^2+(2A-B)x+B]e^{-x}$,

$y'*=[-2Ax+(2A-B)]e^{-x}+[Ax^2-(2A-B)x-B)]e^{-x}=[Ax^2+(-4A+B)x+(2A-2B)]e^{-x}$.

Отсюда

$y*=(Ax^2+B)e^{-x}$,

$y'*=[-Ax^2+(2A-B)x+B]e^{-x}$,

$y'*=[Ax^2+(-4A+B)x+(2A-2B)]e^{-x}$.

Подставим в уравнение

$[Ax^2+(-4A+B)x+(2A-2B)]e^{-x}-2[-Ax^2+(2A-B)x+B]e^{-x}-3(Ax^2+Bx)e^{-x}=xe^{-x}$

или после деления на e^{-x} получается равенство

$[Ax^2+(-4A+B)x+(2A-2B)]-2[-Ax^2+(2A-B)x+B]-3(Ax^2+Bx)=x$.

Приравнивая коэффициенты при x^2, x, x^o,

$x^2\Big|\quad A+2A-3A=0,$

$x\Big|\quad -4A+B-4A+2B+3B=1 \quad\Rightarrow\quad -8A=1\Rightarrow A=-\dfrac{1}{8},$

$x^o\Big|\quad 2A-2B-2B=0 \quad\Rightarrow\quad 2B=A\Rightarrow\ B=-\dfrac{1}{16},$

получаем

$$y*=-\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x\right)e^{-x}.$$

Ответ: общее решение имеет вид

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x\right)e^{-x}.$$

Замечание 2. Нужно обратить внимание на то, что все частные решения *линейно независимы*

$e^{-x}, e^{3x}, -\dfrac{x^2}{8}e^{-x}, -\dfrac{x}{16}e^{-x}$.

ЧАСТЬ 7. РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды

Определение 1. Пусть задана бесконечная последовательность чисел

$$u_1,u_2,u_3,u_4,...,u_n,... \tag{1.1}$$

Выражение

$$u_1+u_2+u_3+u_4+...+u_n+... \tag{1.2}$$

называется *числовым рядом*. При этом u_1, u_2, u_3, u_4,...., u_n....... называются *членами ряда.*

Определение 2. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется n*-частичной суммой ряда.*

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n \tag{1.3}$$

Определение 3. Если существует предел n-частичной суммы ряда (1.3) при $n \to \infty$, то этот предел называется *суммой ряда* (1.2)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{1.4}$$

Определение 4. Если существует конечный предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то говорят, что данный числовой *ряд сходится.* Если этот предел равен *бесконечности*, то есть $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, то говорят, что *ряд расходится.*

Замечание 1. Существует такая теория рядов, в которой *под суммой ряда понимается функция*, которая выражается рядом. В этом случае суммой ряда является данная функция, и вся теория рядов строится совершенно по-другому. Например,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ...$$

В этом случае суммой ряда является $S(x) = \frac{1}{1+x}$, и сумма является функцией от x. На основании такого определения суммы ряда строится *теория расходящихся рядов*.

Замечание 2. В данном разделе в качестве суммы принимается сумма по определению 3, и вся теория строится, исходя из этого определения.

Замечание 3. Для использования рядов в решениях разных задач необходимо знать, сходится ли ряд или нет. Для ответа на этот важный вопрос используются *признаки сходимости рядов*. Эти признаки делятся на необходимые и достаточные.

1. Необходимый признак сходимости

Дан числовой ряд (1.2)

Необходимый признак сходимости. *Если ряд сходится, то его n - ый член стремится к нулю при неограниченном возрастании n.*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{1.5}$$

Следствие. Если *n - ый член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд расходится.*

Замечание 4. Этот признак является *необходимым, но не является достаточным*!

Пример 1. Определить сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + ... + \frac{n}{2n+1} + ...$$

Решение. Проверим необходимый признак сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ответ: необходимый признак не выполняется, поэтому ряд расходится.

Пример 2. Проверить сходимость *гармонического* ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ... \tag{1.6}$$

Необходимый признак $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ выполняется, но с помощью интегрального признака Коши дальше будет показано, что этот *ряд расходится*.

2. Достаточные признаки сходимости числовых рядов

1) *Первый достаточный признак сходимости* – это *признак сравнения* рядов с положительными членами.

Теорема 1. *Пусть даны два ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.7}$$

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \upsilon_4 + \ldots + \upsilon_n + \ldots \tag{1.8}$$

Если члены ряда (1.7) *не больше соответствующих членов ряда* (1.8)*, т.е.*

$$u_n \le \upsilon_n, \tag{1.9}$$

и ряд (1.8) *сходится, то и ряд* (1.7) *тоже сходится.*

Теорема 2. *Пусть даны два ряда* (1.7.) *и* (1.8). *Если члены ряда* (1.7) *не меньше соответствующих членов ряда* (1.7)*, т.е.*

$$u_n \ge \upsilon_n, \tag{1.10}$$

и ряд (1.8) *расходится, то и ряд* (1.7) *тоже расходится.*

Теорема 3. *Пусть даны два ряда* (1.7.) *и* (1.8). Если при $n \to \infty$ существует отличный от нуля конечный предел отношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\upsilon_n} = A \ne 0 \tag{1.11}$$

двух рядов с положительными членами, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно

Ряды для сравнения
1) геометрическая прогрессия $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots$ n - частичная сумма геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{a - aq^n}{1-q}$. Геометрическая прогрессия сходится, когда её знаменатель $q < 1$.
2) Ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} = 1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \ldots. + \dfrac{1}{n^p} + \ldots$ сходятся только в том случае, когда $p > 1$. Если $p \le 1$, то эти ряды расходятся.

Пример 3. Определить сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots. + \frac{1}{n^n} + \ldots \tag{*}$$

Сравним с рядом

$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots. + \frac{1}{2^n} +,$$

который можно представить в виде

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots. + \frac{1}{2^n} + \ldots, \tag{**}$$

члены которого, очевидно, больше чем у ряда (*), так как

$$\frac{1}{n^n} \le \frac{1}{2^n}.$$

Ряд, входящий в (**), $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $\dfrac{1}{2} < 1$, т.е. имеет n - частичную сумму

$$S_k = \frac{a - aq^k}{1-q} = \frac{1/2 - (1/2)^k}{1 - 1/2}.$$

Отсюда сумма ряда по определению равна

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1/2-(1/2)^k}{1-1/2} = 1.$$

Отсюда сумма ряда (**) равна $S = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Ответ: Так как больший ряд сходится, то наш ряд тоже сходится.

Пример 4. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$, где $u_n = \sin\frac{1}{n}$.

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, где $u_n = \frac{1}{n}$.

По теореме 3 для определения сходимости необходимо найти предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\upsilon_n} = A \neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\upsilon_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \text{ (первый замечательный предел).}$$

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ сходится.

2) Второй достаточный признак сходимости числовых рядов – признак Д'Аламбера

Если в ряде с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$$

отношение $(n+1)$*- го члена к* n*-ому члену при* $n \to \infty$ *имеет конечный предел* l*, т.е.* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$*, то*

$$\begin{cases} 1) & \text{ðÿä ñõîäèòñÿ , åñëè} \quad l < 1, \\ 2) & \text{ðÿä ðàñõîäèòñÿ , åñëè} \quad l > 1, \\ 3) & \text{îòâåòà íå äà¸ò , åñëè} \quad l = 1. \end{cases} \qquad (1.12)$$

3) Третий достаточный признак сходимости – радикальный признак Коши

Если для ряда с положительными членами $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$ величина $\sqrt[n]{u_n}$ при $n \to \infty$ *имеет конечный предел* l*, т.е.* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то

$$\begin{cases} 1) & \text{ðÿä ñõîäèòñÿ , åñëè} \quad l < 1, \\ 2) & \text{ðÿä ðàñõîäèòñÿ , åñëè} \quad l > 1, \\ 3) & \text{îòâåòà íå äà¸ò , åñëè} \quad l = 1. \end{cases} \qquad (1.13)$$

4) Четвёртый достаточный признак сходимости – интегральный признак Коши

Пусть члены ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$$

положительны и не возрастают, т.е.

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq u_4 \geq \ldots$$

и пусть $f(x)$ такая непрерывная невозрастающая функция, что

$$f(1) = u_1, \quad f(2) = u_2, \quad f(3) = u_3, \ldots, f(n) = u_n.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то и ряд сходится;
2. если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ расходится, то и ряд расходится.

5) Сходимость знакопеременных рядов

Определение 5. Ряд называется *знакопеременным,* если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные.
Определение 6. Знакопеременный ряд называется з*накочередующимся*, если у него чередуются положительные и отрицательные члены.

Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов (*Признак достаточный, но не необходимый).*
Если знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.14}$$

таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{1.15}$$

сходится, то и данный знакопеременный ряд сходится.

Доказательство. Пусть s_n и σ_n суммы n первых членов рядов (1.14) и (1..15). Пусть $s_n^{'}$ - сумма всех положительных членов ряда (1.14), а $s_n^{''}$ - сумма всех отрицательных членов этого ряда. Тогда

$$s_n = s_n^{'} - s_n^{''}; \quad \sigma_n = s_n^{'} + s_n^{''}.$$

По условию σ_n имеет предел σ. $s_n^{'}$ и $s_n^{''}$ -положительные возрастающие величины, меньше σ. Следовательно, они имеют пределы . s' и s''. Из соотношений $s_n = s_n^{'} - s_n^{''}$ следует , что и s_n имеет предел, и этот предел равен $s_n^{'} - s_n^{''}$, то есть знакопеременный ряд (1.14) сходится.

Следствие. Для определения сходимости знакопеременного ряда достаточно проверить сходимость ряда из положительных членов(1.15).

Определение 7. Если ряд (1.14) сходится, а ряд из абсолютных величин его членов (1.15) расходится, то ряд называется *условно сходящимся.*
Определение 8. Если ряд (1.14) сходится, а ряд из абсолютных величин его членов (1.15) тоже сходится, то ряд называется *абсолютно сходящимся.*

Теорема 4. *Если ряд* (1.14*) сходится абсолютно, то он остаётся абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от перестановки его членов.*
Теорема 5. *Если ряд* (1.14) *сходится условно, то, какое бы мы ни задали число A, можно так переставить члены его ряда, чтобы его сумма оказалась в точности равной A.*

6) Признак сходимости знакочередующихся рядов

Теорема Лейбница. *Если в знакочередующемся ряде*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots \ \text{ и } \ u_n > 0 \tag{1.16}$$

члены таковы, что

$$u_1 > u_2 > u_3 > ... \qquad (1.17)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \qquad (1.18)$$

то знакочередующийся ряд сходится, и его сумма не превосходит величины первого члена u_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем ряд (1.16) в виде

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + ... + (u_n - u_{n+1}) + ...$$

Все скобки положительны, следовательно, сумма ряда равна положительному числу. Если перегруппировать члены ряда так:

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) + ... + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n},$$

то ясно, что $S_{2n} < u_1$ и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$.

Но $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$, откуда в связи с (1.18) вытекает, что сумма S_{2n+1} с возрастанием n тоже стремится к S. Итак, при достаточно больших n сумма S_n будет сколь угодно близка к S независимо от чётности n. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Функциональные ряды

Определение 9. Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) + ... + u_n(x) + ... \qquad (2.1)$$

называется **функциональным**, если все его члены являются функциями от *x*.

Определение 10. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (2.2)$$

где $a_o, a_1, a_2, ...a_n, ...$ - постоянные числа, называемые коэффициентами ряда.

Определение 11. *Областью сходимости* степенного ряда называется интервал значений x, при которых данный ряд сходится.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (2.2) сходится при некотором значении x_o, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком значении x, для которого

$$|x| < |x_o|;$$

2) если ряд расходится при некотором значении $x_o^{'}$, то он расходится при всяком x, для которого

$$|x| > \left|x_o^{'}\right|.$$

Доказательство. 1) Так как по предположению числовой ряд

$$a_o + a_1 x_o + a_2 x_o^2 + ... + a_n x_o^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_o^n$$

сходится, то его общий член $a_n x_o^n \to 0$, а это значит, что существует такое положительное число M, что все члены ряда по абсолютной величине меньше M. Перепишем ряд (2.2) в виде

$$a_o + a_1 x_o\left(\frac{x}{x_o}\right) + a_2 x_o^2\left(\frac{x}{x_o}\right)^2 + ... + a_n x_o^n\left(\frac{x}{x_o}\right)^n + ...$$

и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов

$$|a_o| + |a_1 x_o|\left|\frac{x}{x_o}\right| + |a_2 x_o^2|\left|\frac{x}{x_o}\right|^2 + \ldots + |a_n x_o^n|\left|\frac{x}{x_o}\right|^n + \ldots \qquad (*)$$

Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда

$$M + M\left|\frac{x}{x_o}\right| + M\left|\frac{x}{x_o}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_o}\right|^n + \ldots \qquad (**)$$

Брук Тейлор
1685 - 1731

При $|x| < |x_o|$ этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\left|\frac{x}{x_o}\right| < 1$ и, следовательно, сходится. Так как члены ряда (*) меньше соответствующих членов ряда (**), то по теореме о сравнении рядов этот ряд сходится абсолютно. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

1. Ряды Тейлора и Маклорена

Непрерывную дифференцируемую функцию $f(x)$ можно разложить в окрестности некоторой точки a в известный ряд Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (2.3)$$

Если разложение делается в окрестности начала координат, т.е. $a = 0$, то получается ряд Маклорена

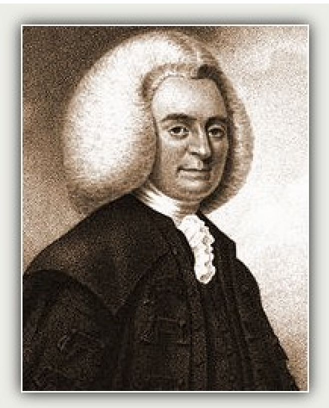
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \ldots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (2.4)$$

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функцию $\sin^2 x$.

Ответ: $\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad (-\infty < x < \infty)$.

Пример 2. Написать ряд Тейлора для функции $\frac{2}{x^3}$ в окрестности точки $x_o = -1$ и найти интервал сходимости.

Ответ: $\frac{2}{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(n+1)(n+2)(x+1)^n, \quad (-2 < x < 0)$.



Колин Маклорен
1696 - 1748

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию e^{-x^2}

Ответ: $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, \quad (-\infty < x < \infty)$.

Пример 4. Написать ряд Тейлора для функции $\ln(3x-11)$ в окрестности точки $x_o = 4$ и найти интервал сходимости.

Ответ: $\ln(3x-1) == \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n} (x-4)^n, \quad (\frac{11}{3}, < x < \frac{13}{3})$.

Пример 5. Разложить в ряд Маклорена функцию $\frac{x^3}{(1+x)^2}$.

Ответ: $\frac{x^3}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n\, x^{n+2}, \quad (-1 < x < 1)$.

Пример 6. Написать ряд Тейлора для функции $\frac{1}{3-5x}$ в окрестности точки $x_o = 2$ и найти интервал сходимости. **Ответ**: $\frac{1}{3-5x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 5^n \ (x-2)^n$, $(\frac{9}{5} < x < \frac{11}{5}]$.

Пример 7. Разложить в ряд Маклорена функцию $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\textbf{Ответ}: \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2^n\, n!} x^{2n+1}, \quad (-1 < x < 1).$$

Пример 8. Написать ряд Тейлора для функции $\frac{6}{x^4}$ в окрестности точки $x_o = -1$ и найти интервал сходимости. **Ответ**: $\frac{6}{x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n!} (x+1)^n$, $(-2 < x < 0]$.

Тейлоровские разложения некоторых элементарных функций

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...,$$

$$\cos x = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \quad sh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...,$$

$$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

Замечание 5. Эти ряды сходятся для любого x.

2. Ряды Маклорена

Непрерывную дифференцируемую функцию $f(x)$ можно разложить в окрестности некоторой точки a в известный ряд Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 ... \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ... \qquad (2.5)$$

Если разложение делается в окрестности начала координат, т.е. $a = 0$, то получается ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 ... \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \qquad (2.6)$$

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функцию $\sin^2 x$.

$$\textbf{Ответ:} \sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad (-\infty < x < \infty).$$

Пример 2. Написать ряд Тейлора для функции $\frac{2}{x^3}$ в окрестности точки $x_o = -1$ и исследовать его сходимость. **Ответ**: $\frac{2}{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(n+1)(n+2)(x+1)^n$, $(-2 < x < 0)$.

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию e^{-x^2}.

$$\textbf{Ответ:} e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, \quad (-\infty < x < \infty).$$

Пример 4. Написать ряд Тейлора для функции $\ln(3x-11)$ в окрестности точки $x_o = 4$ и исследовать его сходимость.

$$\textbf{Ответ: } \ln(3x-1) == \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n}\left(x-4\right)^n, \quad (\frac{11}{3}, < x < \frac{13}{3}].$$

Пример 5. Разложить в ряд Маклорена функцию $\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$ и найти интервал сходимости.

$$\textbf{Ответ}: \frac{x^3}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n\, x^{n+2}, \quad (-1 < x < 1).$$

Пример 6. Написать ряд Тейлора для функции $\dfrac{1}{3-5x}$ в окрестности точки $x_o = 2$ и найти интервал сходимости. **Ответ**: $\dfrac{1}{3-5x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}5^n\left(x-2\right)^n, \quad (\dfrac{9}{5} < x < \dfrac{11}{5}].$

Пример 7. Разложить в ряд Маклорена функцию $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\textbf{Ответ}: \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5 ...(2n-1)}{2^n\, n!}x^{2n+1}, \quad (-1 < x < 1).$$

Пример 8. Написать ряд Тейлора для функции $\dfrac{6}{x^4}$ в окрестности точки $x_o = -1$ и исследовать его сходимость. **Ответ**: $\dfrac{6}{x^4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+3)!}{n!}\left(x+1\right)^n, \quad (-2 < x < 0].$

3. Биномиальный ряд

Название ряда происходит от слова «бином», потому что его коэффициенты определяются как в *биноме Ньютона*:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + ... + \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m + ...$$

Коэффициенты этого ряда представляют собой число сочетаний из n элементов по m

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \tag{2.7}$$

Тогда

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + ... + C_n^m a^{n-m}b^m + ... \tag{2.8}$$

По формуле (2.8) с учётом формулы (2.7) *биномиальный ряд* получается в виде

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}x^n + ... \tag{2.9}$$

Когда $n = -1$ получается известный ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ... \tag{2.10}$$

с радиусом сходимости ($R = 1$).

Замечание 7. Ряды (2.9) и (2.10) сходятся для $|x| < 1$.

.

Пример 9. Разложение в ряд *логарифмической функции*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$$

Замечание 6. Ряд сходится в интервале $(-1 < x < 1)$.

§ 3. Ряды Фурье

Определение 1. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (3.1)$$

называется *тригонометрическим рядом,* а постоянные числа $a_o, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ называются *коэффициентами* тригонометрического ряда.

Замечание 1. Если тригонометрический ряд сходится, то его сумма является *периодической функцией* $f(x)$ с периодом 2π

$$f(x)=f(x+2\pi).$$

Замечание 2. Для того, чтобы выяснить, как получаются коэффициенты ряда (3.1), рассмотрим свойства синусов и косинусов кратных дуг.

Пусть $(c, c+2\pi)$ - любой промежуток длины 2π. Тогда интегралы

$$\int_c^{c+2\pi}\cos kx\,d\,x=\left.\frac{\sin kx}{k}\right|_c^{c+2\pi}=0 \text{ при } k=\pm1,\pm2,\pm3,...$$

$$\int_c^{c+2\pi}\sin kx\,d\,x=-\left.\frac{\cos kx}{k}\right|_c^{c+2\pi}=0 \text{ при } k=\pm1,\pm2,\pm3,...$$

Используя известные формулы тригонометрии

$$\sin kx\cos lx=\frac{\sin(k+l)x+\sin(k-l)x}{2},$$

$$\sin kx\sin lx=\frac{\cos(k-l)x-\cos(k+l)x}{2}, \qquad (3.2)$$

$$\cos kx\cos lx=\frac{\cos(k+l)x+\cos(k-l)x}{2},$$

можно доказать, что интегралы от произведений синусов и косинусов разных аргументов равны нулю, т.е.

$$\int_c^{c+2\pi}\sin kx\cos lx\,d\,x=0,\quad \int_c^{c+2\pi}\cos kx\cos lx\,d\,x=0,\quad \int_c^{c+2\pi}\sin kx\sin lx\,d\,x=0 \qquad (3.3)$$

для всех случаев, когда $k\neq l$.

Если же $k=l$, получается

$$\int_c^{c+2\pi}\cos^2 kx\,d\,x=\int_c^{c+2\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}d\,x=\pi,$$

$$\int_c^{c+2\pi}\sin^2 kx\,d\,x=\int_c^{c+2\pi}\frac{1-\cos 2kx}{2}d\,x=\pi, \qquad (3.4)$$

$$\int_c^{c+2\pi}\sin kx\cos kx\,d\,x=\frac{1}{2}\int_c^{c+2\pi}\sin 2kx\,d\,x=0.$$

Пусть задано множество

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ... \qquad (3.5)$$

Лемма 1. *Интегралы от произведения любых двух различных функций множества* (3.5) *по любому промежутку длины* 2π *равен нулю.*

Замечание 3. Это свойство называется свойством *ортогональности* множества (3.5) на указанном промежутке.

1. **Определение коэффициентов ряда Фурье**

Для определения коэффициентов тригонометрического ряда разложения периодических функций проинтегрируем обе части равенства

$$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

по промежутку $(-\pi,\pi)$.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,d\,x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_o}{2}\,d\,x+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,d\,x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,d\,x).$$

На основании леммы все интегралы под знаком суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ равны нулю. Отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,d\,x=\frac{a_o}{2}\cdot 2\,\pi=a_o\,\pi.$$

Тогда
$$a_o=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,d\,x. \qquad (3.6)$$

Для определения других постоянных коэффициентов достаточно умножить левую и правую части равенства (3.1) на $\cos nx$ и $\sin nx$ поочерёдно и проинтегрировать на промежутке $(-\pi,\pi)$.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,d\,x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_o}{2}\cos nxd\,x+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxd\,x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxd\,x).$$

Все интегралы, кроме случая $k=n$, когда $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,d\,x=\pi$, равны нулю. Отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,d\,x=a_n\,\pi.$$

Тогда

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,d\,x. \qquad n=\pm1,\pm2,\pm3,... \qquad 3.7)$$

Аналогично получается

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,d\,x. \qquad n=\pm1,\pm2,\pm3,... \qquad 3.8)$$

Замечание 3. Полученные формулы справедливы при интегрировании по любому промежутку длиной $2\,\pi$.

Замечание 4. В полученный ряд Фурье можно разложить любую функцию, отвечающую условиям Дирихле.

Условия Дирихле. Функция удовлетворяет *условиям Дирихле*, если она:

1) непрерывна на промежутке $(-\pi,\pi)$, или имеет на этом промежутке конечное число точек разрыва первого рода;
2) если промежуток $(-\pi,\pi)$ можно разбить на конечное число таких промежутков, в каждом из которых функция $f(x)$ меняется монотонно.

Теорема Дирихле: *Если функция* $f(x)$, *заданная в промежутке* $(-\pi, \pi)$, *удовлетворяет условиям Дирихле, то ряд Фурье этой функции сходится во всём промежутке* $(-\pi, \pi)$ *и сумма этого ряда*

1) равна $f(x)$ во всех точках непрерывности $f(x)$, лежащих внутри промежутка,

2) равна

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{3.9}$$

во всех точках разрыва непрерывности;

3) равна

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} \tag{3.10}$$

на концах промежутка, т.е. при $x=-\pi$ и $x=\pi$.

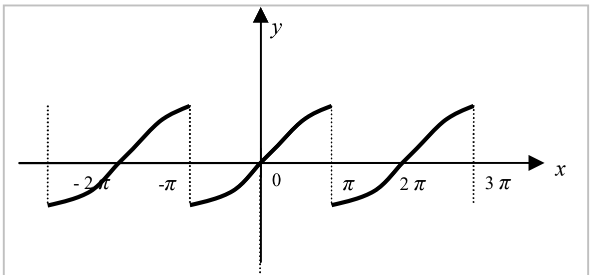


Рис. 58

Замечание 5. Члены ряда (рис. 58) – периодические функции с периодом 2π. Если ряд сходится на промежутке $(-\pi, \pi)$, то он сходится и при всех вещественных x, и сумма ряда периодически повторяет те значения, которые она даёт на промежутке $(-\pi, \pi)$

Лемма 2. *Если* $f(x)$ *есть чётная функция в промежутке* $(-a, a)$, *т.е.* $f(-x)=f(x)$, *то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

и если $f(x)$ *- нечётная функция на этом промежутке, т.е.* $f(-x)=-f(x)$, *то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

2. Разложение в промежутке $(0, \pi)$

Если применить лемму о чётных и нечётных функциях к интегралам, определяющим коэффициенты Фурье, получим

1) $f(x)$ - чётная функция

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = 0, \tag{3.11}$$

2) $f(x)$ - нечётная функция

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \tag{3.12}$$

Тогда разложение функций имеет вид

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad \text{для } f(x) \text{ чётной}, \tag{3.13}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \text{ для } f(x) \text{ нечётной}. \tag{3.14}$$

Замечание 11. При разложении в ряд Фурье непериодической функции на отрезке $(0, l)$ нужно сделать её периодической путём дополнения на отрезке $\left[-l, 0\right]$ либо чётной, либо нечётной функцией, совпадающей с заданной на $(0, l)$ (рис. 59).

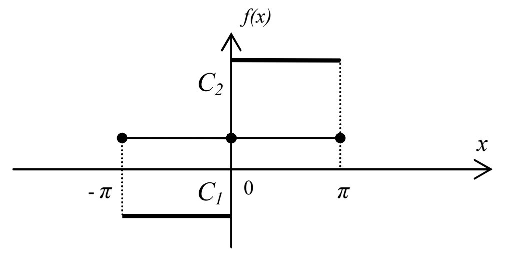


Рис. 59.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} C_1 & \text{ïðè} \quad -\pi < x < 0, \\ C_2 & \text{ïðè} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Решение.

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} C_1 d\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} C_2 d\,x = C_1 + C_2,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} C_1 \cos kx\, d\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} C_2 \cos kx\, d\,x = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} C_1 \sin kx\, d\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} C_2 \sin kx\, d\,x = \frac{1}{k\,\pi}\left[C_1\left(-\cos kx\right)\Big|_{-\pi}^{0} + C_2\left(-\cos kx\right)\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= (C_1 - C_2)\frac{\cos k\,\pi - 1}{k\,\pi} = (C_1 - C_2)\frac{(-1)^k - 1}{k\,\pi}.$$

Если k - чётное, то $b_k = 0$, при нечётном k $\quad b_k = -\dfrac{2(C_1 - C_2)}{\pi\, k}.$

Ответ:

$$f(x) = \frac{C_1 + C_2}{2} - \frac{2\left(C_1 - C_2\right)}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right] == \begin{cases} C_1 & \text{ïðè} \quad -\pi < x < 0, \\ C_2 & \text{ïðè} \quad 0 < x < \pi, \\ \dfrac{C_1 + C_2}{2} & \text{ïðè} \quad x = 0, \pm\pi. \end{cases}$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ в промежутке $(-\pi, \pi)$.

Решение. Эта функция нечётная, поэтому все коэффициенты $a_k = 0$. Коэффициенты b_k определяются по формуле (рис. 60).

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\, d\,x. = \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{x\cos kx}{k}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\, d\,x\right\} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos k\pi}{k}\right] = \frac{2\,(-1)^{k-1}}{k}.$$

Ответ: $f(x) = 2\left[\dfrac{\sin x}{1} - \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} - .... + \dfrac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k} + ...\right] = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi, \\ 0 & x = \pm\pi. \end{cases}$

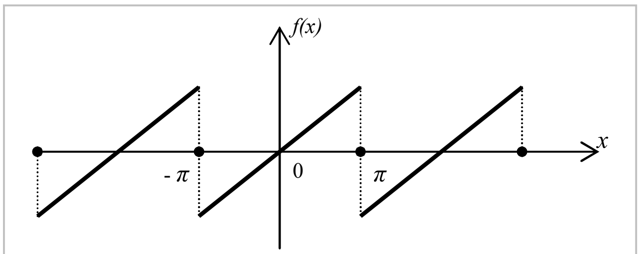


Рис. 60.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$.

Решение. Эта функция чётная, поэтому все коэффициенты $b_k = 0$. Коэффициенты a_k определяются по формулам

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 d\,x = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx\,d\,x = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2 \sin kx}{k}\bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\sin kx\,d\,x\right\} =$$

$$= \frac{4}{\pi k}\left\{\frac{x\cos kx}{k}\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,d\,x\right\} = \frac{4}{\pi k}\frac{\pi\cos k\pi}{k} = \frac{4}{k^2}(-1)^k.$$

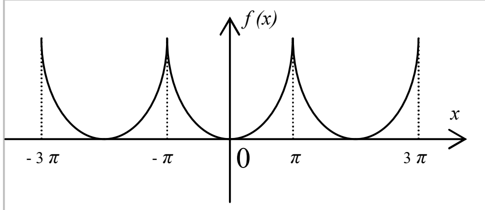


Рис. 61.

Ответ: (рис. 61) $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \dfrac{\cos k\,x}{k^2} \quad (-\pi < x < \pi)$.

3. Разложение периодических функций на интервале длиной $2\,l$

Замечание 12. Теорема Дирихле остаётся верной и для промежутка $(-l, l)$ с тем, что ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi\,x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi\,x}{l}\right),$$

причём коэффициенты a_k и b_k определяются по формулам (3.15) и (3.16). Аналогично для чётных и нечётных функций при разложении по косинусам и синусам для $f(x)$ на промежутке $(-l, l)$.

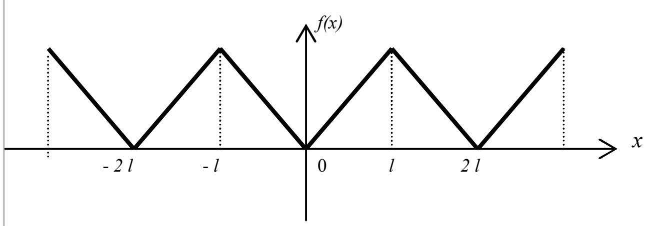


Рис. 62.

Для чётных функций ряд имеет вид: $\dfrac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\dfrac{k\pi\,x}{l}$, а коэффициенты определяются по формулам

$$a_o = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\,d\,x, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,d\,x. \qquad (3.15)$$

Для нечётных функций ряд имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\dfrac{k\pi\,x}{l}$, а соответствующие коэффициенты -

$$b_k = \frac{2}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi\,x}{l}\,d\,x. \qquad (3.16)$$

Пример 4. Разложить в ряд Фурье чётную функцию $f(x) = |x|$ с периодом $2\,l$, которая задана на отрезке $[-l, l]$

Решение. Функция . $f(x) = |x|$ - чётная, значит все коэффициенты $b_k = 0$.

$$a_o = \frac{2}{l}\int_0^{l} x\,d\,x = l,$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^{l} x)\cos\frac{k\pi\,x}{l}\,d\,x = \frac{2\,l}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos kx dx = \frac{2\,l}{\pi^2}\left[\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{при } k - \text{чётном}, \\ -\dfrac{4\,l}{\pi^2 k^2} & \text{при } k - \text{нечётном}. \end{cases}$$

Ответ $x=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{k}x}{1}+\frac{\cos\frac{3\pi}{k}x}{3^2}+...+\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi}{k}x}{(2n+1)^2}+...\right]$ (рис. 62).

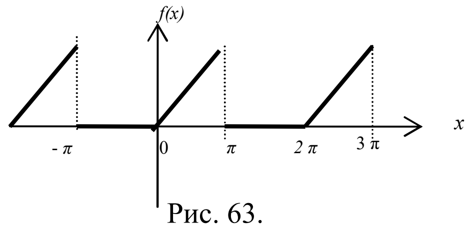


Рис. 63.

Замечание 13. При разложении в ряд Фурье непериодической функции на отрезке $(0, l)$ нужно сделать её периодической путём дополнения на отрезке $[-l, 0]$ либо чётной, либо нечётной функцией, совпадающей с заданной на $(0, l)$.

Пример 5. Разложить в ряд Фурье чётную функцию

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{ïðè} \quad -\pi<x<0,\\ x & \text{ïðè} \quad 0<x<\pi.\end{cases}$$

Решение.

$$a_o=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cdot dx=\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{x\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx\right\}=\frac{1}{\pi k}\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}= \;=\begin{cases}-\frac{2}{\pi k^2} & \text{ïðè} \quad k-\text{íå÷¸òíî},\\ 0 & \text{ïðè} \quad k-\text{÷¸òíî}.\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right\}=-\frac{\pi}{\pi k}\cos k\pi= \;=\begin{cases}\frac{1}{k} & \text{ïðè} \quad k-\text{íå÷¸òíî},\\ -\frac{1}{k} & \text{ïðè} \quad k-\text{÷¸òíî}.\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+...\right)+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+...\right)$ (рис. 63).

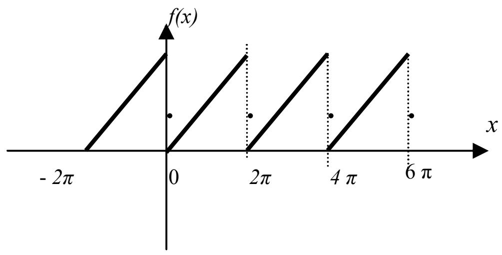


Рис. 64.

Пример 6. Пусть дана функция $f(x)=x$ с периодом 2 π.

Решение. $a_o=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cdot dx=2\pi;$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{2\pi}=-\frac{2}{n}.$$

Ответ: $f(x)=\pi-2\sin x-\frac{2}{2}\sin 2x-\frac{2}{3}\sin 3x-...$ (рис. 64).

Если сделать функцию $f(x)=x$ с периодом 2 π *нечётной* на $l=2\pi$, то получим (рис.65) $a_o=0;\quad a_k=0.$

$$b_k=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\sin\frac{kx}{2}dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{2x\cos\frac{kx}{2}}{k}\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{2}{k}\int_0^{2\pi}\sin\frac{kx}{2}dx\right]=\frac{1}{\pi}\frac{-4\pi\cos k\pi}{k}=\frac{4(-1)^{k+1}}{k}.$$

Если сделать функцию $f(x) = x$ с периодом 2π *чётной* на $l = 2\pi$, то получим $b_k = 0$, а остальные коэффициенты

$$a_o = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} x \cdot d\,x = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos\frac{kx}{2}\,d\,x = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2x\sin\frac{kx}{2}}{k} + \frac{4\cos\frac{kx}{2}}{k^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^k - 1}{k^2} == \begin{cases} 0 & \text{ïðè } \; k - \text{÷¸òíî}, \\ -\dfrac{8}{\pi k^2} & \text{ïðè } \; k - \text{íå÷¸òíî}. \end{cases}$$

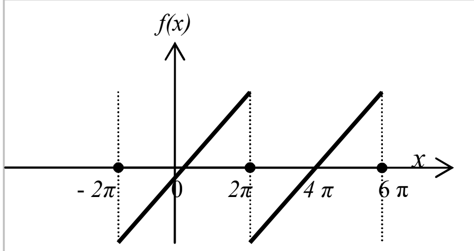


Рис.65.

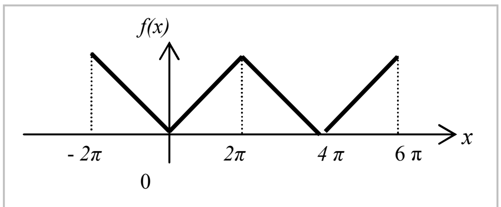


Рис.66.

Ответ: $x = \pi - \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{x(2k-1)}{2}}{(2k-1)^2}$ (рис. 66).

Замечание 14. Отсюда легко получить разложение в ряд квадрата π следующим образом.

При $x = 0$ получается $\dfrac{\pi^2}{8} = 1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + ...$ и $\pi^2 = 8\left(1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + ...\right)$.

§ 4. Интеграл Фурье

1. Пусть функция $f(x)$ определена на $(-\infty, \infty)$ и абсолютно интегрируема на нём, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,d\,x = Q, \tag{4.1}$$

и пусть она раскладывается в ряд Фурье на любом интервале $(-l, l)$

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{4.2}$$

где

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,d\,t \qquad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,d\,t. \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.2), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\,l}\int_{-l}^{l} f(t)\,d\,t + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,d\,t\right)\cos\frac{k\pi x}{l} + \left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,d\,t\right).\sin\frac{k\pi x}{l} =$$

$$= \frac{1}{2\,l}\int_{-l}^{l} f(t)\,d\,t + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\frac{k\pi t}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} + \sin\frac{k\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\right]d\,t.$$

$$f(x) = \frac{1}{2\,l}\int_{-l}^{l} f(t)\,d\,t + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\,d\,t. \tag{4.4}$$

Перейдём к пределу при $l \to \infty$

1) $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{2\,l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\;d\,t=\lim\limits_{l\to\infty}\frac{Q}{2l}=0$;

2) рассмотрим интеграл по определению как предел последовательности интегральных сумм, для чего введём обозначения

$$\alpha_1=\frac{\pi}{l},\,\alpha_2=\frac{2\pi}{l},\,\alpha_3=\frac{3\pi}{l},\,...,\alpha_k=\frac{k\pi}{l},\,....$$

тогда, домножая и деля на $\frac{\pi}{l}$, получим

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha_k(t-x)\,d\,t\,\frac{\pi}{l}\right]=\lim_{\substack{l\to\infty\\(\Delta\alpha\to 0)}}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha_k(t-x)\,d\,t\right]\Delta\alpha_k=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha_k(t-x)\,d\,\alpha.$$

Замечание 1. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha_k(t-x)\,d\,\alpha=F(\alpha_k)$, т.е является функцией α_k, которая меняется от $\frac{\pi}{l}$ до ∞.

По определению определённого интеграла, как предела последовательности интегральных сумм

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}F(\alpha_k)d\alpha_k=\int\limits_{0}^{\infty}F(\alpha)d\alpha.,$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dt\right)d\alpha\,. \tag{4.5}$$

В точках разрыва выполняется равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,d\,t\right)d\alpha=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,. \tag{4.6}$$

Выражение (4.4) можно переписать в виде

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,tdt\right)\cos\alpha\,x\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha\,tdt\right)\sin\alpha\,x\,d\alpha\,. \tag{4.7}$$

Каждый из интегралов, стоящих в скобках, существует по условию (4.1), а, следовательно, абсолютно интегрируем. Эти интегралы отвечают следующим условиям:

1) если $f(x)$ - чётная функция, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,t\,dt=2\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,t\,dt\,,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha\,t\,dt=0.$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,t\,dt\right)\cos\alpha\,x\,d\alpha\,. \tag{4.8}$$

2) если $f(x)$ - нечётная функция, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,t\,dt=0.$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha\,t\,dt=2\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\sin\alpha\,t\,dt\,,$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha\,. \qquad (4.9)$$

В точках разрыва функция определяется по формуле

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Замечание 16. Интегралы, стоящие в скобках, являются функциями α, т.е.

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt,\quad B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

Тогда

$$f(x)=\int_0^\infty\left[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x\right]d\alpha\,. \qquad (4.10)$$

Положим в формуле (4.9)

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt. \qquad (4.11)$$

Тогда

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha.$$

Замечание 17. $F(\alpha)$ - это косинус – преобразование Фурье.

Аналогично вводится обозначение

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt. \qquad (4.12)$$

Тогда

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Phi(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha.$$

$\Phi(\alpha)$ - это синус – преобразование Фурье.

1. Интеграл Фурье в комплексной форме

В формуле (4.12)

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt\right)d\alpha \qquad (4.13)$$

в скобках стоит чётная функция $\cos\alpha(t-x)$ по α .

$$\int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,d\,t\right)d\alpha=0 \qquad (4.14)$$

(при любом M) так как $\sin\alpha(t-x)$ - нечётная функция.

Очевидно, что

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,d\,t\right)d\alpha=0. \qquad (4.15)$$

Умножим (4.14) на $\frac{i}{2\pi}$ и сложим с (4.15). Тогда

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\big(\cos\alpha(t-x)+i\sin\alpha(t-x)\big)dt\right]d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha(t-x)}dt\right]d\alpha.$$

Отсюда
$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha(t-x)}dt\right]d\alpha\,. \tag{4.16}$$

Тогда
$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\alpha t}dt\right]e^{-i\alpha x}\;d\alpha\,. \tag{4.17}$$

Это и есть *интеграл Фурье в комплексной форме*.

3. Получение преобразования Фурье

Введём обозначения
$$F^*(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\alpha t}dt \tag{4.18}$$

и получим
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\;d\alpha\,. \tag{4.19}$$

Замечание 1. $F^*(\alpha)$ - это преобразование Фурье для функции $f(t)$.

Замечание 2. $f(x)$ - это *обратное преобразование Фурье*.

3. Основные формулы преобразований Фурье

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\Phi(\alpha)\sin\alpha\,x\,d\alpha.,$$

где *синус – преобразование Фурье* $\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\sin\alpha\,t\,dt.$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}F(\alpha)\cos\alpha\,x\,d\alpha.,$$

где *косинус – преобразование Фурье* $F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\alpha\,t\,dt$.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F^*(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\;d\alpha$, где $F^*(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\alpha t}dt$ - преобразование Фурье.