ГЛАВА 7. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Матрицы и действия с ними

Определение 1. *Матрицей* называется прямоугольная или квадратная таблица чисел (в общем случае любых элементов[1] a_{ij}, где i - номер строки, а j - номер столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.
Матрица в общем случае записывается в виде:

$$A_{nm} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

- прямоугольная матрица, содержащая $n = 2$ две строки и $m = 3$ три столбца.

Определение 2. Матрица, содержащая только одну строку, называется «*матрица – строка*».

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Определение 3 Матрица, содержащая только один столбец, называется «*матрица – столбец*»

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Определение 3. Матрица называется *квадратной*, если число строк равно числу столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Алгебра матриц

Под словом «алгебра», как всегда, понимается определение нуля, единицы, арифметических действий: суммы, разности, произведения, деления.

Определение 4. *Нуль – матрицей* называется матрица, у которой все элементы равны нулю

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Определение 5. *Единичной матрицей* называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы нули

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Определение 6. Две матрицы А и В называются *равными*, если у них на одинаковых местах стоят равные элементы.

$$a_{ij} = b_{ij}. \tag{1.6}$$

Определение 7. *Суммой двух матриц* А и В называется матрица С, если её элементы определяются по формуле

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \tag{1.7}$$

Определение 8. Для того, чтобы *умножить матрицу на число* λ, необходимо умножить на это число все элементы матрицы.

[1] В качестве элементов матрицы могут служить значки, обозначения действий, геометрические фигуры и т.п.

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

Определение 9. *Произведением двух матриц A* и *B* называется третья матрица С, элементы которой определяются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\ , \qquad (1.9)$$

то есть, необходимо элементы строки первой матрицы умножить на соответствующие элементы столбца второй матрицы и эти произведения сложить.

Замечание 1. Произведение матриц некоммутативно, то есть

$$A \times B \neq B \times A\ . \qquad (1.10)$$

Определение 10. Матрица B называется *обратной к матрице A*, если их произведение равно единичной матрице

$$B \times A = E\,. \qquad (1.11)$$

Правило 1. *Обратная матрица* обозначается как A^{-1} и вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A_d^{tr}\ , \qquad (1.12)$$

то есть, *обратная матрица равна транспонированной матрице алгебраических дополнений, делённой на определитель исходной матрицы.*

Замечание 2. Для вычисления обратной матрицы необходимо вычисление *определителей*.

§ 2. Определители

Определение 1. *Определителем* называется число, соответствующее квадратной матрице и вычисляемое по формуле

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}\,, \qquad (2.1)$$

где n - порядок определителя.

Определение 2. *Порядком* определителя называется число строк или столбцов определителя

Определение 3. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента, взятый со знаком плюс, если сумма $i+j$ чётная, и со знаком минус – если нечётная.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}\,. \qquad (2.2)$$

Определение 4. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, который остаётся после вычёркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент a_{ij}.

Пример1. Пусть дан определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (2.3)$$

Минором элемента a_{12} будет определитель

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (2.4)$$

а алгебраическим дополнением

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Вычисление обратной матрицы

Для получения матрицы, обратной к матрице A необходимо:
1) вычислить определитель исходной матрицы A.
Замечание 1. Если определитель равен нулю, то матрица называется *вырожденной* и не имеет обратной матрицы.
Составление матрицы алгебраических дополнений

$$A_d = \begin{vmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Транспонирование матрицы алгебраических дополнений

$$A_d^{tr} = \begin{vmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M13 & -M_{23} & M_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M13 & -M_{23} & M_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

§ 3. Решение систем линейных уравнений

Дана система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{jn}x_n = h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = h_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = h_m. \end{array}\right\} \quad (3.1)$$

a_{ij} - коэффициенты при неизвестных, где i первый индекс означает номер уравнения в системе, а j - второй индекс означает номер неизвестного, при котором стоит коэффициент, h_i - свободные члены, x_j - искомые решения.

Замечание 1. В общем случае система может содержать n уравнений с m числом неизвестных.

Определение 1. Если все свободные члены h_i равны нулю, то система (3.1) называется *однородной*. Если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля, то система называется *неоднородной*.

Замечание 2. Система (3.1) может иметь *единственное решение*, может быть *несовместной,* то есть, не иметь решения, и может *иметь множество решений.*

1. Основные методы решения систем линейных уравнений

Три основных метода решений систем уравнений: 1) метод Крамера, 2) матричный метод, 3) метод Гаусса. Рассмотрим эти методы решения на примере системы трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= h_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= h_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

1) Метод Крамера

По методу Крамера неизвестные системы уравнений определяются по формулам $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - определители, полученные из определителя системы Δ путём замены коэффициентов при соответствующем неизвестных на столбец свободных членов.

$$1)\ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

- определитель системы, составленный из коэффициентов a_{ij}.

$$2)\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

- $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - *вспомогательные определители*.

По методу Крамера решение получается в виде

$$3)\ x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{3.5}$$

2) Матричный метод

Пусть A - матрица коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{- матрица – столбец неизвестных,} \tag{3.7}$$

$$H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \text{ - матрица – столбец свободных членов.} \tag{3.8}$$

Система уравнений в матричном виде записывается так:

$$A \cdot X = H\,. \tag{3.9}$$

Умножим левую и правую часть уравнения (3.29) на обратную матрицу к исходной матрице A

$$(A^{-1}\cdot A)\cdot X = A^{-1}H\ .$$

В скобках $(A^{-1}\cdot A)$ получается единичная матрица E, которая, будучи умноженной на любую матрицу, оставляет её без изменений, то есть $E\cdot X = X$. Тогда решение системы получается в виде

$$X = A^{-1}H\ . \tag{3.10}$$

Таким образом, найдя обратную матрицу к матрице коэффициентов и умножив её на матрицу-столбец свободных членов, получают решение системы.

Замечание 5. Матричный метод решения систем линейных уравнений удобен в том случае, когда приходится решать систему уравнений с неизменными коэффициентами a_{ij}, а меняются только свободные члены.

3) Метод Гаусса

Сущность метода Гаусса заключается в том, чтобы свести заданную систему уравнений к равносильной системе уравнений *ступенчатого вида.*

Определение 15. Матрица называется *ступенчатой*, если первый элемент каждой строки стоит правее первого значащего элемента предыдущей строки. Например,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Определение 16. Система *B* называется *равносильной* системе *A*, если она отвечает следующему условию: у обеих систем решения соответственно равны или обе системы несовместны.

Для приведения системы уравнений к ступенчатому виду используются следующие свойства системы:

1) решения системы не изменятся, если два уравнения системы поменять местами;

2) решения системы не изменяться, если в уравнении системы все члены умножить на одно и то же отличное от нуля число;

3) решения системы не изменятся, если к одному уравнению системы прибавить другое уравнение, умноженное на отличное от нуля число.

Все эти свойства позволяют свести заданную систему уравнений к ступенчатому виду с помощью *элементарных преобразований.*

*Элементарные преобразования расширенной матрицы системы***:** к одной строке прибавляются соответствующие элементы параллельной строки, умноженные на отличное от нуля число, строки нулей отбрасываются. Заданную расширенную матрицу системы

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & h_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & h_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & h_3 \end{array}\right) \tag{3.12}$$

путём элементарных преобразований сводят к виду

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & h_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & h_2 \\ 0 & 0 & b_{33} & h_3 \end{array}\right). \tag{3.13}$$

Равносильная система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 &= p_1, \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 &= p_2, \\ b_{33}x_3 &= p_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

2. Исследование систем уравнений

Система уравнений может иметь 1) единственное решение, 2) множество решений или 3) быть несовместной, то есть, не иметь решений. Чтобы определить, имеет ли система решение, выполняется анализ системы.

Правило Крамера: *если определитель системы не равен нулю, то система уравнений имеет решение, и притом единственное.*

Замечание 6. Для исследования систем уравнений по правилу Крамера следует учесть, что если определитель системы равен нулю, то возможны два случая: либо система имеет множество решений, когда все определители $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, и система несовместна, если хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2, Δ_3 не равен нулю.

По расширенной ступенчатой матрице (3.13) тоже можно определить, к какому случаю относится система. Если система уравнений сводится к виду (3.14), то система имеет единственное решение. Если в системе остаются два уравнения, то есть матрица B имеет вид

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & h_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & h_2 \end{array}\right), \tag{3.15}$$

то система имеет множество решений.

Если матрица (3.13) имеет вид

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & h_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 \end{array}\right), \tag{3.16}$$

то система несовместна.

Замечание 7. Однородная система уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

всегда совместна, потому что неизвестные $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ всегда удовлетворяют эту систему.

Но здесь возможны два случая: 1) если система имеет только одно решение, то оно *тривиальное* $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. *Нетривиальное* решение система однородных уравнений может иметь только, если определитель системы *равен нулю*. Тогда в системе есть зависимые уравнения, которые должны быть отброшены. Тогда число уравнений меньше числа неизвестных, и заданная однородная система имеет множество решений. *Число зависимых неизвестных равно числу уравнений.* Остальные неизвестные являются свободными. Например, если число уравнений 5, а число неизвестных 8, то свободных неизвестных будет 3, и остальные зависимые неизвестные выражаются через эти три свободные неизвестные.

3. Примеры исследования и решения систем линейных уравнений

Пример 1. Исследовать и решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

1) *Решение по методу Крамера.* Определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(4\cdot 1 - 3\cdot 1) - 3(1\cdot 1 - 3\cdot 3) - 1(1\cdot 1 - 4\cdot 3) =$$

$$= 2\cdot 1 - 3(-8) - 1\cdot(-11) = 2 + 24 + 11 = 37.$$

Так как определитель не равен нулю, то по правилу Крамера система имеет единственное решение. Находим значения вспомогательных определителей:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 18 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 18 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 18 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot(4\cdot 1 - 3\cdot 1) - 3(18\cdot 1 - 8\cdot 3) - 1(18\cdot 1 - 8\cdot 4) =$$

$$= 5\cdot 1 - 3(-6) - 1\cdot(-14) = 5 + 18 + 14 = 37,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 18 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 18 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 18 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot(18\cdot 1 - 3\cdot 8) - 5(1\cdot 1 - 3\cdot 3) - 1(1\cdot 8 - 18\cdot 3) =$$

$$= 2\cdot(-6) - 5(-8) - 1\cdot(-46) = -12 + 40 + 46 = 74,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 18 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 18 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(4\cdot 8 - 18\cdot 1) - 3(1\cdot 8 - 18\cdot 3) + 5\cdot(1\cdot 1 - 4\cdot 3) =$$

$$= 2\cdot(14) - 3(-46) + 5\cdot(-11) = 28 + 138 - 55 = 111.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{37}{37} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{74}{37} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{111}{37} = 3.$$

Полученные значения неизвестных $x_1 = 1;\quad x_2 = 2;\quad x_3 = 3$ необходимо проверить путём подстановки в заданную систему уравнений.

Проверка

$$\begin{cases} 2\cdot 1 + 3\cdot 2 - 1\cdot 3 == 2 + 6 - 3 = 5, \\ 1\cdot 1 + 4\cdot 2 + 3\cdot 3 = 1 + 8 + 9 = 18, \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 = 3 + 2 + 3 = 8. \end{cases}$$

Справа получены значения равные свободным членам, следовательно, полученное решение верно.

Ответ: $x_1 = 1;\quad x_2 = 2;\quad x_3 = 3.$

2) Решение этой же системы *матричным методом*

Решение заданной системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

матричным методом Для этого ищется обратная матрица по формуле (3.10) $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A_d^{tr}$.

Определитель в данном случае уже получен выше $\Delta = 37$.

Порядок определения обратной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A_d^{tr}$ следующий:

1. определяется *матрица алгебраических дополнений*, то есть, вместо каждого элемента матрицы коэффициентов A ставится его алгебраическое дополнение:

$$A_{ad} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -11 \\ -4 & 5 & 7 \\ 13 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Полученная матрица *транспонируется*

$$A_{ad}^{tr} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 13 \\ 8 & 5 & -7 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Отсюда делением на определитель получается *обратная матрица*.

$$A^{-1} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 13 \\ 8 & 5 & -7 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. По формуле (3.30) получается искомое решение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 13 \\ 8 & 5 & -7 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 1\cdot 5 - 4\cdot 18 + 13\cdot 8 \\ 8\cdot 5 + 5\cdot 18 - 7\cdot 8 \\ -11\cdot 5 + 7\cdot 18 + 5\cdot 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 1\cdot 5 - 4\cdot 18 + 13\cdot 8 \\ 8\cdot 5 + 5\cdot 18 - 7\cdot 8 \\ -11\cdot 5 + 7\cdot 18 + 5\cdot 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 5 - 72 + 104 \\ 40 + 90 - 56 \\ -55 + 126 + 40 \end{pmatrix} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 37 \\ 74 \\ 111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда решение заданной системы записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3) Решение *методом Гаусса*.

Получение ступенчатой расширенной матрицы B системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 18 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -7 & -31 \\ 1 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & -11 & -8 & -46 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & 5 & 7 & 31 \\ 0 & -11 & -8 & -46 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & 5 & 7 & 31 \\ 0 & -1 & 6 & 16 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & 37 & 111 \\ 0 & -1 & 6 & 16 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & -1 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Отсюда можно записать ступенчатую систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 18, \\ \quad\; - x_2 + 6x_3 = 16, \\ \qquad\qquad x_3 = 3. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем

$-x_2 = 16 - 6 \cdot x_3 = 16 - 6 \cdot 3 = -2$, отсюда $x_2 = 2$.

Из первого уравнения

$x_1 = -4x_2 - 3x_3 + 18 = -4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 18 = -8 - 9 + 18 = -17 + 18 = 1$, то есть, $x_1 = 1$

Ответ $x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$

Пример 2. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 18, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 25. \end{cases}$$

Исследование выполняется по методу Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 18 \\ 3 & 7 & 2 & 25 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -7 & -31 \\ 1 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & -5 & -7 & -29 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & 5 & 7 & 31 \\ 0 & -5 & -7 & -29 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & 5 & 7 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

В последней строчке получилось, что нуль равен двум, то есть невозможное равенство.

Ответ: система уравнений несовместна и решений не имеет.

Пример 3. Дана система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 18, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 23. \end{cases}$$

Исследуем систему по методу Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 18 \\ 3 & 7 & 2 & 23 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -7 & -31 \\ 1 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & -5 & -7 & -31 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & -5 & -7 & -31 \\ 0 & -5 & -7 & -31 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 18 \\ 0 & 5 & 7 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В третьей строчке получены нули. Следовательно третье уравнение является следствием двух первых и должно быть отброшено. Получилась система двух уравнений с тремя неизвестными, которая имеет множество решений. Запишем её сразу в ступенчатой форме

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 18, \\ \quad 5x_2 + 7x_3 = 31. \end{cases}$$

Считая неизвестную величину x_3 свободной, запишем систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 18 - 3x_3, \\ \quad 5x_2 = 31 - 7x_3. \end{cases}$$

Из второго уравнения сразу получаем выражение x_2 через x_3 в виде $x_2 = \dfrac{31 - 7x_3}{5}$.

Отсюда получаем

$$x_1 = 18 - 3x_3 - 4x_2 = 18 - 3x_3 - 4\frac{31 - 7x_3}{5} =$$

$$= \frac{18 \cdot 5 - 3 \cdot 5x_3 - 4 \cdot 31 + 4 \cdot 7x_3}{5} = \frac{90 - 15x_3 - 124 + 28x_3}{5} == \frac{-34 + 13x_3}{5}.$$

Общее решение системы имеет вид.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-34+13x_3}{5}, \\ x_2 = \dfrac{31-7x_3}{5}. \end{cases}$$

Общее решение можно записать в параметрическом виде следующим образом:

$$x_1 = \frac{-34+13t}{5}; \quad x_2 = \frac{31-7t}{5}; \quad x_3 = t.$$

Таким образом, получают множество решений заданной системы. Для проверки можно выбрать одно из множества не равных нулю частных решений. Например, пусть $t = 3$. Давая x_3 или параметру t разные значения, получают соответствующие значения x_1 и x_2.

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-34+13\cdot 3}{5} = \dfrac{-34+39}{5} = \dfrac{5}{5} = 1, \\ x_2 = \dfrac{31-7\cdot 3}{5} = \dfrac{31-21}{5} = \dfrac{10}{5} = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Отсюда частное решение получается в виде

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Для проверки решения подставим это частное решение в исходную систему

$$\begin{cases} 2\cdot 1 + 3\cdot 2 - 1\cdot 3 = 2 + 6 - 3 = 5, \\ 1\cdot 1 + 4\cdot 2 + 3\cdot 3 = 1 + 8 + 9 = 18, \\ 3\cdot 1 + 7\cdot 2 + 2\cdot 3 = 3 + 14 + 6 = 23. \end{cases}$$

Таким образом, проверка подтвердила правильность полученного общего решения

$$x_1 = \frac{-34+13t}{5}; \quad x_2 = \frac{31-7t}{5}; \quad x_3 = t.$$

Пример 4. Решить систему однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -5 & -7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, в системе есть зависимое уравнение, которое необходимо отбросить. Пусть это будет третье уравнение. Тогда система получается в виде

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

В качестве независимого неизвестного выберем x_3 и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = x_3, \\ x_1 + 4x_2 = -3x_3. \end{cases}$$

Решим эту систему по методу Крамера.
Определитель системы равен

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5 .$$

Вспомогательные определители получаются в виде

$$\begin{vmatrix} x_3 & 3 \\ -3x_3 & 4 \end{vmatrix} = 4x_3 - 3 \cdot (-3x_3) = 4x_3 + 9x_3 = 13x_3 ,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & x_3 \\ 1 & -3x_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3x_3) - 1 \cdot x_3 = -6x_3 - x_3 = -7x_3 .$$

Общее решение получается в виде

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13x_3}{5}, \\ x_2 = \dfrac{-7x_3}{5}. \end{cases}$$

и в параметрическом виде

$$\begin{cases} x_1 = 13t, \\ x_2 = -7t, \\ x_3 = 5t. \end{cases}$$

Найдём частное решение для проверки решения при $t = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = 13, \\ x_2 = -7, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

Проверка

$$\begin{cases} 2 \cdot 13 + 3(-7) - 1 \cdot 5 = 26 - 21 - 5 = 0, \\ 1 \cdot 13 + 4(-7) + 3 \cdot 5 = 13 - 28 + 15 = 0, \\ 3 \cdot 13 + 7\,(-7) + 2 \cdot 5 = 39 - 49 + 10 = 0. \end{cases}$$

Проверка подтвердила правильность решения. Отсюда

Решение равно $\begin{cases} x_1 = 13t, \\ x_2 = -7t, \\ x_3 = 5t. \end{cases}$

ГЛАВА 8. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТРОНОЙ АЛГЕБРЫ

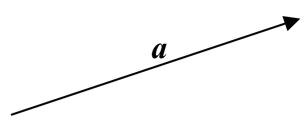


Рис. 67

Определение 1. *Вектором* называется величина, характеризуемая числом и направлением.
Геометрическим образом вектора может служить направленный отрезок, длина (модуль) которого есть число, а направлением служит сам отрезок (рис. 67).

§ 1. Алгебра векторов

Замечание 1. *Алгебра векторов* определяется, как и всякая алгебра, нулём, единицей, равенством, суммой, разностью векторов, произведением векторов.

Определение 2. *Нуль – вектором* называется вектор, модуль которого равен нулю, а направление *неопределённо.*

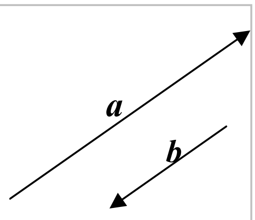


Рис. 68

Определение 3. *Единичным вектором* называется вектор, модуль которого равен единице.

Замечание 2. *Единичный вектор* используется для задания направления.

Определение 4. Два вектора называются *коллинеарными*, если они расположены на параллельных прямых (рис. 68).

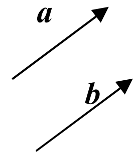


Рис. 69.

Определение 5. Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *равными*, если равны их модули, если они коллинеарны и направлены в одну и ту же сторону (рис. 69).

Определение 6. Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости (рис. 70).

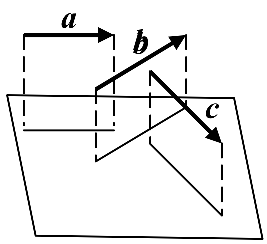


Рис. 70

Замечание 3. *Два вектора всегда компланарны*.

Определение 7. *Суммой двух векторов* называется диагональ параллелограмма, построенного на векторах – слагаемых (рис. 71)

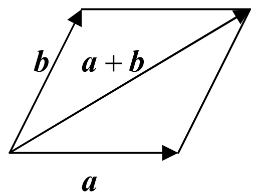


Рис. 71

Для построения суммы двух векторов необходимо через конец первого вектора построить второй вектор, а потом соединить начало первого вектора с концом второго.(рис. 72).

Замечание 4. Правило построения суммы двух векторов можно распространить на сумму n векторов.

Для построения разности двух векторов нужно построить оба вектора из одной точки, а потом провести вектор из конца вычитаемого вектора в конец первого (к уменьшаемому) (рис. 73)

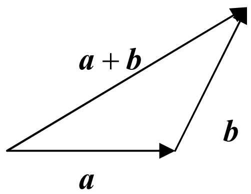


Рис. 72.

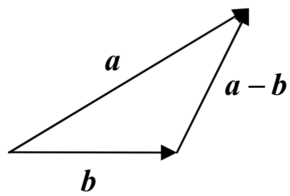


Рис. 73.

Определение 8. При умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ получается вектор $\boldsymbol{b}$, отвечающий следующим трём условиям:

1) модуль вектора $\boldsymbol{b}$ равен произведению модуля вектора $\boldsymbol{a}$ на модуль числа λ

$$|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\lambda|;$$

2) вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$;

3) вектор $\boldsymbol{b}$ направлен в ту же сторону, что вектор $\boldsymbol{a}$, а если число $\lambda > 0$, и в противоположную, если $\lambda < 0$.

Замечание 5. В алгебре векторов существуют два произведения векторов: скалярное и векторное.

§ 2. Скалярное произведение

К понятию скалярного произведения векторов привела задача определения работы A силы $\boldsymbol{F}$ при перемещении по пути $\boldsymbol{l}$. Работа равна произведению силы на путь $A = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{l}| \cdot \cos\alpha$ (рис. 74). Отсюда получается следующее определение скалярного произведения двух векторов.

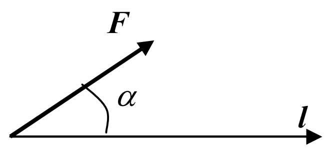


Рис. 74.

Определение 9. Скалярным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\alpha\,. \qquad (2.1)$$

Определение 10. Три взаимно перпендикулярных единичных вектора $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ образуют *базис*, в котором можно построить любой заданный вектор $\boldsymbol{a}$. В этом случае $\boldsymbol{a}$ можно записать в виде суммы трёх векторов, направленных по ортам

$$\boldsymbol{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}\,. \qquad (2.2)$$

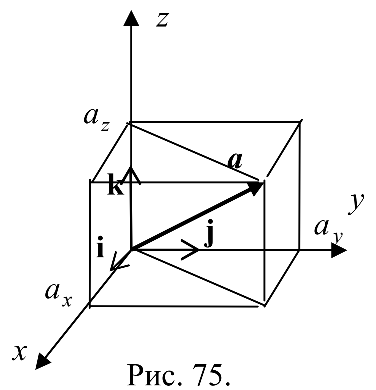


Рис. 75.

Определение 11. Числа a_x, a_y, a_z называются координатами или проекциями вектора $\boldsymbol{a}$ (рис. 75)

Определение 12. *Проекцией вектора на ось* называется число, равное длине отрезка, отсекаемого на оси перпендикулярами, опущенными на неё из начала и конца вектора (длина отрезка ab - проекция) (Рис. 76).

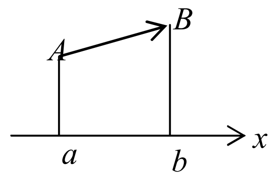


Рис. 76.

Замечание 6. Кроме записи в форме (2.2) можно записать вектор так: $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ или $\boldsymbol{a}=\{X,Y,Z\}$.

Пусть заданы два вектора $\boldsymbol{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$. Получим их скалярное произведение

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(X_1\mathbf{i}+Y_1\mathbf{j}+Z_1\mathbf{k})\cdot(X_2\mathbf{i}+Y_2\mathbf{j}+Z_2\mathbf{k})=\\&=X_1X_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+X_1Y_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+X_1Z_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+\\&+Y_1X_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+Y_1Y_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+Y_1Z_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+\\&+Z_1X_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+Z_1Y_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}+Z_1Z_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Произведения, входящие в формулу (2.3), вычисляются по формуле (2.1)

Например, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}|\cdot|\boldsymbol{i}|\cdot\cos 0=1\cdot1\cdot1=1$ или $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{i}|\cdot|\boldsymbol{j}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}=1\cdot1\cdot0=0$ и т.д.

Таблица *скалярного произведения ортов*

	i	**j**	**k**
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

Применяя эту таблицу к формуле (2.3), получим скалярное произведение в виде

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2\,. \qquad (2.4)$$

Замечание 7. Скалярное произведение двух векторов равно нулю в двух случаях: 1) если один из векторов нуль – вектор; 2) если векторы взаимно – перпендикулярны.

Следствие 1. Признаком перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0\,. \qquad (2.5)$$

Замечание 8. Скалярное произведение *коммутативно*, то есть

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\,. \qquad (2.6)$$

Замечание 9. Квадрат вектора при скалярном произведении равен *квадрату модуля*

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2, \qquad (2.7)$$

в координатном виде квадрат вектора записывается так:

$$\boldsymbol{a}^2=X^2+Y^2+Z^2\,. \qquad (2.8)$$

Замечание 10. Модуль вектора определяется по формуле (2.9) как (диагональ прямоугольного параллелепипеда на рис. 75)

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \,. \tag{2.9}$$

Замечание 11. Единичный вектор, соответствующий вектору $\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, получается если разделить вектор $\boldsymbol{a}$ на его модуль

$$\boldsymbol{a_o} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}\mathbf{i} + \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}\mathbf{j} + \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\mathbf{k} \,. \tag{2.10}$$

Проекции единичного вектора $\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$ равны косинусам углов между проекциями на оси и вектором. Эти косинусы называются направляющими косинусами и обозначаются как $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Отсюда координаты единичного вектора - это направляющие косинусы

$$\boldsymbol{a_o} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k} \,. \tag{2.11}$$

Замечание 12 Так как координатами единичного вектора являются направляющие косинусы, то можно записать, что сумма квадратов направляющих косинусов всегда равна единице.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \,. \tag{2.12}$$

Замечание 13. Из (2.12) следует, что можно задавать только два угла вектора с осями координат, потому что третий является зависимым и получается из равенства (2.12).

§ 3. Векторное произведение двух векторов

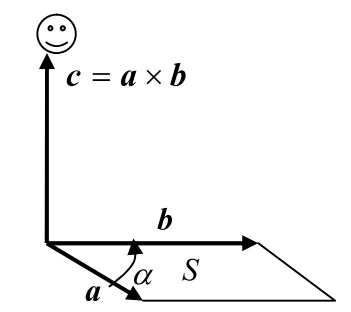


Рис. 77.

К понятию векторного произведения приводит задача определения момента M силы. Кроме численного значения произведения силы $\boldsymbol{F}$ на плечо $\boldsymbol{r}$, необходимо указать вокруг какой оси происходит вращение и в каком направлении. Это и выполняется с помощью вектора, который является осью момента и равен произведению силы на плечо.

Определение 13. Векторным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется третий вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, отвечающий следующим трём условиям (рис. 77):
Модуль вектора $\boldsymbol{c}$ численно равен площади S параллелограмма, построенного на векторах сомножителях, то есть

$$|\boldsymbol{c}| = S = |a| \cdot |b| \cdot \sin\alpha \,. \tag{3.1}$$

Вектор $\boldsymbol{c}$ направлен перпендикулярно к плоскости векторов сомножителей и вектор $\boldsymbol{c}$ направлен в такую сторону, что если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{c}$, то кратчайший путь от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ направлен против часовой стрелки.
Пусть заданы два вектора $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$. Их векторное произведение получается так:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k}) \times (X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k}) = \\ &= X_1X_2\mathbf{i}\times\mathbf{i} + X_1Y_2\mathbf{i}\times\mathbf{j} + X_1Z_2\mathbf{i}\times\mathbf{k} + \\ &+ Y_1X_2\mathbf{j}\times\mathbf{i} + Y_1Y_2\mathbf{j}\times\mathbf{j} + Y_1Z_2\mathbf{j}\times\mathbf{k} + \\ &+ Z_1X_2\mathbf{k}\times\mathbf{i} + Z_1Y_2\mathbf{k}\times\mathbf{j} + Z_1Z_2\mathbf{k}\times\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Произведения ортов вычисляются по определению векторного произведения 13. Например, $|\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{i}| \cdot |\boldsymbol{i}| \cdot \sin 0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ или $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$. Результаты векторного произведения ортов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ приведено в таблице и приводят к формуле (3.2)

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	0	$\boldsymbol{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\boldsymbol{k}$	0	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	0

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &== X_1Y_2\mathbf{k} - X_1Z_2\mathbf{j} - Y_1X_2\mathbf{k} + Y_1Z_2\mathbf{i} + Z_1X_2\mathbf{j} - Z_1Y_2\mathbf{i} = \\ &= (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\mathbf{i} - (X_1Z_2 - Z_1X_2)\,\mathbf{j} + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\,\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Так как запомнить формулу (3.3) сложно, то можно записать эту формулу в виде определителя, у которого в первой строке стоят орты, во второй – координаты первого вектора, а в третьей – координаты второго вектора.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Замечание 14. Векторное произведение двух векторов равно *нулю в двух случаях*:

1) если один из векторов – *нуль – вектор*;

2) если векторы *коллинеарны*.

Следствие 2. Условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю векторного произведения (3.5). Из равенства нулю определителя следует, что вторая и третья строчки должны быть пропорциональны, то есть

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}. \tag{3.5}$$

Замечание 13. Выражение (3.5) определяет условие коллинеарности двух векторов. Это можно получить из геометрических соображений.

Замечание 14. Векторное произведение *некоммутативно*, потому что

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\,\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}. \tag{3.6}$$

§ 4. Смешанное произведение трёх векторов

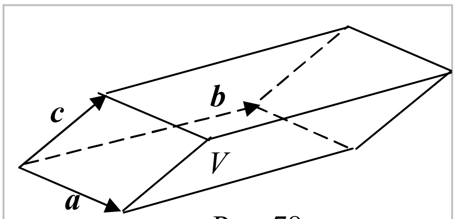


Рис. 78.

Определение 14. *Смешанным произведением* трёх векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называется векторно – скалярное произведение $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ (рис. 78).

Теорема о смешанном произведении

Смешанное произведение трёх некомпланарных векторов численно равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, взятое со знаком плюс, если тройка векторов правая, и со знаком минус – если левая

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \pm \boldsymbol{V}. \tag{4.1}$$

В координатной форме это записывается так:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{4.2}$$

Замечание 15. Смешанное произведение *равно нулю* в трёх случаях: 1) если один из векторов *нуль – вектор*, 2) если два вектора *коллинеарны*, 3) если все три вектора – сомножители *компланарны*.

Следствие 3. Условием компланарности трёх векторов является равенство нулю смешанного произведения.

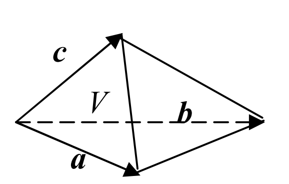


Рис. 79.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (4.3)$$

Замечание 16. Для смешанного произведения справедливы циклические перестановки

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}. \qquad (4.4)$$

Следствие 3. Смешанное произведение используется для определения объёма параллелепипеда

$$\boldsymbol{V}_{\Pi}=\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \qquad (4.5)$$

и трёхгранной пирамиды (рис. 79)

$$\boldsymbol{V}_{\Lambda}=\pm\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}). \qquad (4.6)$$

Пример. Даны три вектора $\boldsymbol{a}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\boldsymbol{b}=-4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\boldsymbol{c}=7\mathbf{i}-5\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ (рис. 80).

1) Найти скалярное и векторное произведения векторов $\boldsymbol{a}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{b}=-4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k}$;

2) Найти косинус угла между этими векторами $\boldsymbol{a}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{b}=-4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k}$;

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

4) Найти объём пирамиды, построенной на всех трёх векторах.

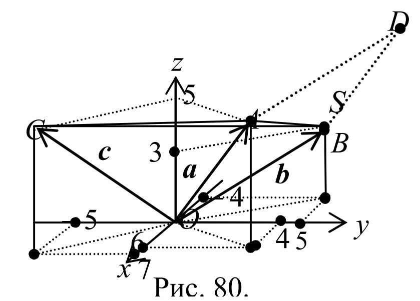


Рис. 80.

Решение.

1) *Скалярное произведение* получается по формуле

($\boldsymbol{a}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{b}=-4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k}$).

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6\cdot(-4)+4\cdot5+5\cdot3=-24+20+15=11.$$

2) *Векторное произведение* получается по формуле

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 4 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}=\mathbf{i}(4\cdot3-5\cdot5)-\mathbf{j}(4\cdot3-(-4)\cdot5)+\mathbf{k}(4\cdot5-(-4)\cdot4)=$$

$$=\mathbf{i}(12-25)-\mathbf{j}(12+20)+\mathbf{k}(20+16)=-13\mathbf{i}-32\mathbf{j}+36\mathbf{k}.$$

3) *Площадь параллелограмма OADB* равна модулю векторного произведения векторов – сторон параллелограмма.

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|-13\mathbf{i}-32\mathbf{j}+36\mathbf{k}|=\sqrt{(-13)^2+(-32)^2+36^2}=\sqrt{169+1024+1296}=\sqrt{2489}\approx49{,}89\text{ кв.ед.}$$

4) Объём параллелограмма вычисляется по формуле $\boldsymbol{V}_{\Lambda}=\pm\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$. Тогда

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \\ 7 & -5 & 5 \end{vmatrix}=6\cdot(5\cdot5-3\cdot(-5))-4\cdot((-4)\cdot5-3\cdot7)+5\cdot((-4)\cdot(-5)-7\cdot5)=$$

$$=6\cdot(25+15)-4\cdot(-20-21)+5\cdot(20-35)=6\cdot40+4\cdot41+5\cdot(-15)=240+164-75=329.$$

Отсюда объём пирамиды *OABC* равен $\boldsymbol{V}_{\Lambda}=\frac{329}{6}\approx54{,}83$ куб. ед.

ГЛАВА 9. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Аналитическая геометрия на плоскости

1. Прямая на плоскости

Определения прямой, как геометрической фигуры, не существует. Все представляют себе, что такое прямая линия, но понятие прямой принимается, как неопределимое. Уравнение прямой даёт представление о положении прямой на плоскости или в пространстве. Для задания положения прямой необходимо задать либо две точки, через которые эта прямая проходит, либо точку и направление. Для задания уравнения прямой на плоскости задаётся угловой коэффициент. Определение 1. Угловым коэффициентом k прямой называется Определение 1. Угловым коэффициентом k прямой называется тангенс угла φ, который прямая составляет с положительным направлением оси Ох (рис. 81)

$$k = \mathrm{tg}\varphi . \tag{1.1}$$

1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнением прямой с угловым коэффициентом называется уравнение, в которое входят координаты точки $B(0,b)$ пересечения прямой с осью Oy и угловой коэффициент k. Из подобия треугольников BMA (рис. 81) можно записать соотношение

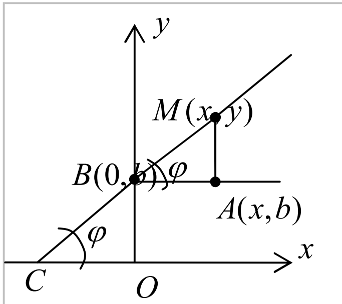


Рис. 81.

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{MA}{BA} = \frac{y-b}{x}$$

Отсюда

$$k = \frac{y-b}{x} \Rightarrow y = kx + b$$

$$\boxed{y = kx + b} \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) и является уравнением прямой с угловым коэффициентом.

2) *Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении*

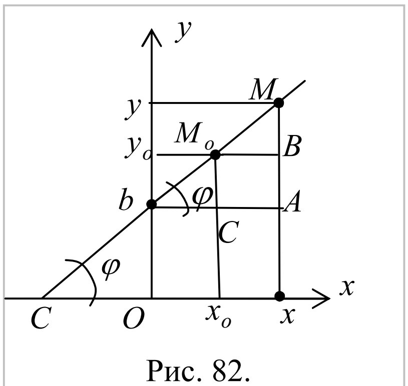


Рис. 82.

Пусть задан угловой коэффициент k и точка $M_o(x_o, y_o)$. Из треугольника (рис. 82) определяется угловой коэффициент в виде $k = tg\,\varphi = \dfrac{y-y_o}{x-x_o}$. Отсюда выводится необходимое уравнение

$$y - y_o = k(x - x_o) \tag{1.3}$$

3) *Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки* $M_1(x_1, y_1)$ **и** $M_2(x_2, y_2)$ (рис.83). Из подобия треугольников M_1M_2A и MM_1B легко получить выражение

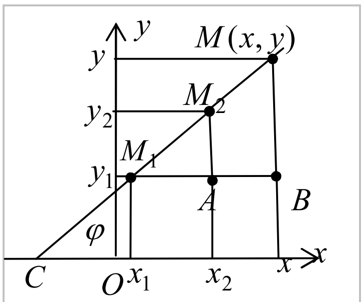


Рис. 83.

$$\frac{MB}{M_2A} = \frac{M_1B}{M_1A},$$

откуда можно записать искомое уравнение в виде:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{1.4}$$

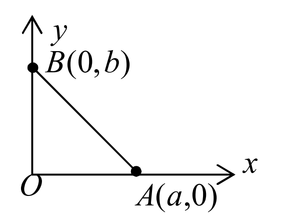


Рис. 84

это и есть уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

4) *Уравнение прямой «в отрезках» на осях*

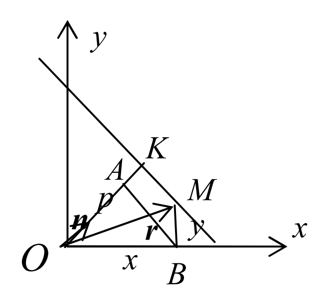


Рис. 85.

Это уравнение легко получить из уравнения (1.4), если задать точки пересечения прямой с осями координат. Подставляя координаты точек A и B в уравнение (1.4), получим

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}.$$

Откуда легко получить $\frac{y}{b}=\frac{x}{-a}+\frac{-a}{-a}$ и, наконец, уравнение прямой «в отрезках» (рис. 84)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{1.5}$$

5) *Нормальное уравнение прямой*

Название уравнения происходит из начальных данных. Уравнение составляется по единичному вектору нормали $\boldsymbol{n}$ и расстоянию между прямой и началом координатной системы p. Совершенно очевидно, что проекция любой точки прямой $M(x,y)$ на направление нормали попадёт в точку *K*. Следовательно, величина проекции любой точки на нормаль равна *p*. Используя то, что скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю, запишем нормальное уравнение прямой в векторном виде (рис. 85

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=p$$

или

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}-p=0. \tag{1.6}$$

В координатной форме уравнение получается из равенства $OA+AK=p$, если учесть, что угол между нормалью $\boldsymbol{n}$ и осью Ox равен α и угол между AB и BM тоже равен α. Тогда отрезок $OA=x\cos\alpha$, а отрезок $AK=y\sin\alpha$.

Уравнение (1.6) в координатной форме принимает вид

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \tag{1.6*}$$

Если проанализировать уравнения (1.2) – (1.6), то видно, что все уравнения прямой содержат координаты точек (x,y) в первой степени. Следовательно, можно предположить, что любое уравнение, содержащее переменные (x,y) в первой степени, представляют собой уравнение прямой на плоскости. Отсюда записывают общее уравнение прямой в виде

$$Ax+By+C=0. \tag{1.7}$$

Для того, чтобы доказать, что уравнение (1.7) является уравнением прямой линии, достаточно показать, что это уравнение всегда можно преобразовать к нормальному уравнению прямой. Для этого достаточно показать, что

$$\sqrt{A^2+B^2}\neq 0.$$

Так как в нормальном уравнении $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, достаточно получить в уравнении (1.7) $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Для этого нужно поделить уравнение (1.7) на $\sqrt{A^2+B^2}$, то есть получить выражение

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0. \qquad (1.7^*)$$

Знак $\pm C/\sqrt{A^2+B^2}$ выбирается так, чтобы получался минус, как в (1.6*). Совершенно очевидно, что корень $\sqrt{A^2+B^2}$ не может быть равен нулю, потому что для этого нужно, чтобы $A=0$ и $B=0$ одновременно. Но этого не может быть, потому что тогда не будет уравнения (1.7). Таким образом, уравнение (1.7*) является нормальным уравнением прямой.
Легко показать, что из уравнения (1.6) можно получить все записанные выше уравнения прямой.

6) *Анализ уравнений прямой*

Уравнения с угловым коэффициентом (1.2) и (1.3) не могут быть применены для описания прямых, параллельных оси Oy, потому что тангенс прямого угла равен $k=\infty$. Уравнение (1.4) не может быть использовано в случае, когда прямая параллельна одной из осей координат. Уравнение прямой «в отрезках» не годится, когда прямая проходит через начало координат. Нормальное уравнение прямой не зависит от положения прямой. Оно пригодна для любого её положения.
Так как общее уравнение прямой (1.7), может быть сведено к нормальному, оно тоже может описать любую прямую. Если $C=0$, то прямая проходит через начало координат, и её уравнение имеет вид $Ax+By=0$. Если А = 0, то прямая параллельна оси Ox, то есть $y=const$, и если В = 0, то уравнение имеет вид $x=const$.
Вывод: для описания прямой общего положения можно использовать уравнения (1.6) и (1.7).

7) *Взаимное положение двух прямых*

Взаимное положение двух прямых характеризуется точкой пересечения, если прямые не параллельны и углом между ними. Пусть даны уравнения с угловым коэффициентом двух прямых (рис. 86)

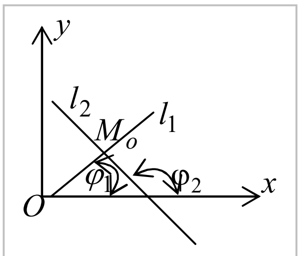


Рис. 86.

$$y=k_1x+b_1, \text{ (а)}$$
$$y=k_2x+b_2. \text{ (б)}$$

Для того, чтобы найти точку пересечения, необходимо решить систему уравнений $\begin{cases} k_1x-y=-b_1, \\ k_2x-y=-b_2. \end{cases}$

Если решать систему уравнений по Крамеру, то получим

$$\Delta=\begin{vmatrix} k_1 & -1 \\ k_2 & -1 \end{vmatrix}=k_2-k_1,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -b_1 & -1 \\ -b_2 & -1 \end{vmatrix}=b_1-b_2,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} k_1 & -b_1 \\ k_2 & -b_2 \end{vmatrix}=-k_1b_2+k_2b_1.$$

Отсюда координаты точки пересечения равны

$$x_o = \frac{b_1 - b_2}{k_1 - k_2}, \; y_o = \frac{-k_1 b_2 + k_2 b_1}{k_1 - k_2}. \tag{1.8}$$

Тангенс угла между прямыми l_1 и l_2 определяется по формуле $\mathrm{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \dfrac{\mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi_1}{1 + \mathrm{tg}\varphi_1 \mathrm{tg}\varphi_2}$.

Отсюда

$$\mathrm{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{1.9}$$

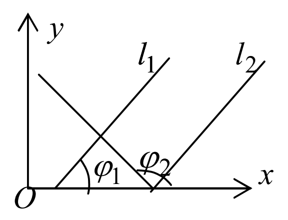


Рис. 87.

8) *Условие параллельности двух прямых*

Пусть две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом (а) и (б). Эти прямые будут параллельны, если их угловые коэффициенты равны между собой, что видно из формулы (1.8). Тогда условие параллельности двух прямых можно записать так:

$$k_1 = k_2. \tag{1.10}$$

9) *Условие перпендикулярности двух прямых*

Если прямые l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны (рис. 87), то углы относятся как $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$. Тогда $\mathrm{tg}\varphi_2 = -\mathrm{ctg}\varphi_1$. Учитывая, что $\mathrm{ctg}\varphi_1 = -\dfrac{1}{\mathrm{tg}\varphi_1}$, получим $\mathrm{tg}\varphi_2 = -\dfrac{1}{\mathrm{tg}\varphi_1}$, откуда можно записать

$$k_2 = -1/k_1. \tag{1.11}$$

Это же можно получить из формулы (1.9). Тангенс прямого угла стремится к бесконечности. Это получится, если знаменатель стремится к нулю. Из равенства $1 + k_1 k_2 = 0$ получается формула (1.11), которая и даёт условие перпендикулярности двух прямых.

§ 2. Аналитическая геометрия в пространстве

1. Плоскость

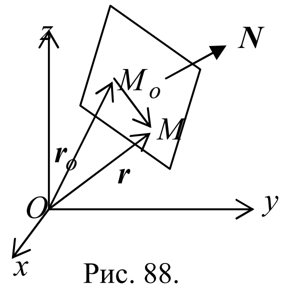


Рис. 88.

Что такое плоскость нельзя определить так же, как нельзя было определить, что такое прямая линия. Уравнение плоскости задаёт нам не свойства плоскости, а её положение в пространстве, потому что все плоскости как геометрические фигуры одинаковы, а отличаются одна от другой только своим положением в пространстве.

1) *Уравнение плоскости с заданной нормалью и точкой* M_o

Для того, чтобы задать положение плоскости в пространстве, нужно задать вектор нормали к ней $\boldsymbol{N}$. Для того, чтобы зафиксировать положение плоскости в пространстве, необходимо задать точку, через которую эта плоскость проходит. Для вывода уравнения плоскости, необходимо учесть, что любая прямая, лежащая на плоскости, перпендикулярна нормали к этой плоскости (рис. 88). Это можно записать так:

$$\overline{M_o M} \perp \vec{N}.$$

Условие перпендикулярности двух векторов записывается в виде равенства нулю их скалярного произведения. Отсюда

$$\boldsymbol{N} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_o) = 0. \tag{2.1}$$

Это и есть векторное уравнение плоскости, для которого известны нормаль $\boldsymbol{N}$ и радиус вектор $\boldsymbol{r_o}$ фиксированной точки M_o. Для того, чтобы получить это уравнение в координатной форме, нужно все векторы записать через их координаты (проекции)
Вектор нормали

$$\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}. \qquad (2.2)$$

Радиус вектор текущей точки

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \qquad (2.3)$$

Радиус – вектор фиксированной точки

$$\boldsymbol{r_o} = x_o\boldsymbol{i} + y_o\boldsymbol{j} + z_o\boldsymbol{k}. \qquad (2.4)$$

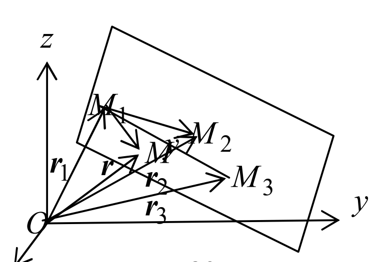


Рис. 89.

Из уравнения (2.1) получается уравнение плоскости в координатной форме

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0. \qquad (2.1^*)$$

2) *Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки*

Даны координаты трёх точек: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Если соединить точки $M(x, y, z), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ (рис. 89) с точкой $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то получим три вектора, принадлежащих данной плоскости, которые в векторной форме записываются как разности векторов

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1), \quad (\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r}_1), \quad (\boldsymbol{r_3} - \boldsymbol{r}_1).$$

Используя условие компланарности трёх векторов в виде *равенства нулю смешанного произведения*, получим векторное уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки в виде

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r}_1) \cdot (\boldsymbol{r_3} - \boldsymbol{r}_1) = 0. \qquad (2.5)$$

В координатной форме это уравнение записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.5^*)$$

3) *Нормальное уравнение плоскости*

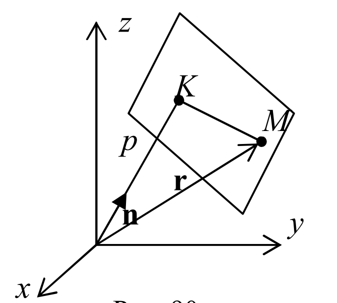


Рис. 90

Нормальное уравнение плоскости строится таким же образом, как нормальное уравнение прямой на плоскости. Задаётся единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ и расстоянию между плоскостью и началом координатной системы p. Проекция любой точки плоскости $M(x, y, z)$ на направление нормали попадёт в точку *K*. Следовательно величина проекции любой текущей точки плоскости на нормаль равна *p*.

Используя то, что скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю, запишем нормальное уравнение плоскости в векторном виде (рис. 90)

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} - p = 0. \qquad (2.6)$$

Координаты радиусов – векторов $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ и нормали $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}$. Отсюда нормальное уравнение плоскости в координатной форме имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0\,. \qquad (2.6^*)$$

Если проанализировать все уравнения плоскости (2.1*), (2.5*) и (2.6*), то видно, что координаты x, y и z входят в первой степени. Учитывая это, можно записать общее уравнение плоскости.

4) *Общее уравнение плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0\,. \qquad (2.7)$$

Для того чтобы доказать, что уравнение (2.7) всегда при любых коэффициентах выражает уравнение плоскости, достаточно показать, что это уравнение всегда можно свести к нормальному уравнению плоскости, описывающее плоскость любого положения. Учитывая, что направляющие косинусы удовлетворяют уравнению

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,. \qquad (2.8)$$

Для того, чтобы свести уравнение (2.7) к уравнению (2.6*), поделим его на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z \pm \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0\,.$$

Легко видеть, что $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ не может равняться нулю, потому что невозможно, чтобы все коэффициенты уравнения (2.7) равнялись нулю одновременно. Следовательно, уравнение (2.7) является уравнением плоскости любого положения, т.е. *общим* уравнением плоскости.

5) *Анализ общего уравнения плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$

Если $A = 0$, то $By + Cz + D = 0$. Таким образом, положение плоскости не зависит от x, отсюда следует, что плоскость параллельна оси Ox. Аналогично получаются положения плоскостей, у которых $B = 0$ и $C = 0$. Все возможные случаи положения плоскости показаны на пис.91-98.

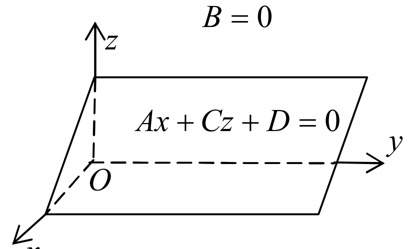


Рис. 91.

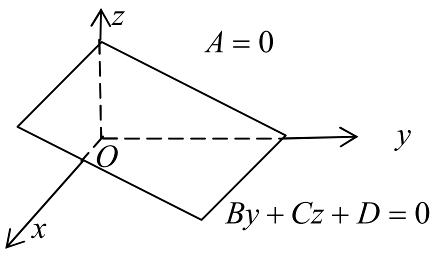


Рис. 92.

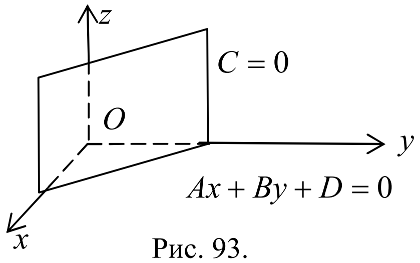


Рис. 93.

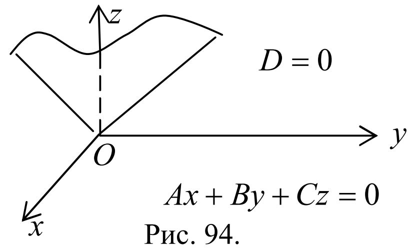


Рис. 94.

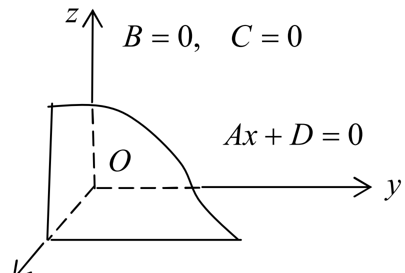


Рис. 95.

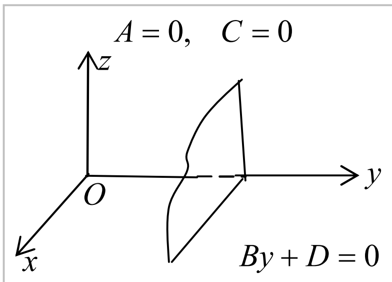


Рис. 96.

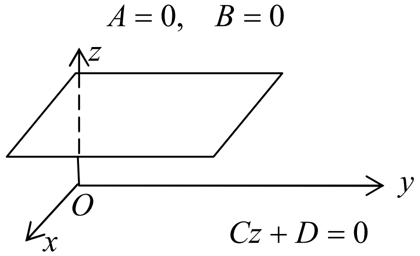


Рис. 97.

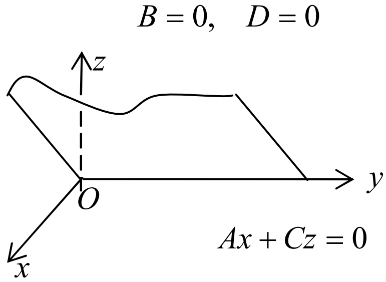


Рис. 98.

6) *Взаимное положение двух плоскостей*

Взаимное положение двух плоскостей определяется углом между ними и линией пересечения. *Угол между двумя плоскостями* равен углу между их нормалями. Пусть плоскости заданы общими уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Если решить их совместно, как систему уравнений, то получим линию их пересечения. Из линейной алгебры известно, что, если неизвестных больше, чем уравнений, то система имеет множество решений. В данном случае это точки, принадлежащие линии пересечения. Для упрощения решения можно одну переменную, например, z положить равной нулю. Тогда останется решить систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y &= -D_1, \\ A_2x + B_2y &= -D_2. \end{aligned}\right\} \quad (l) \tag{2.10}$$

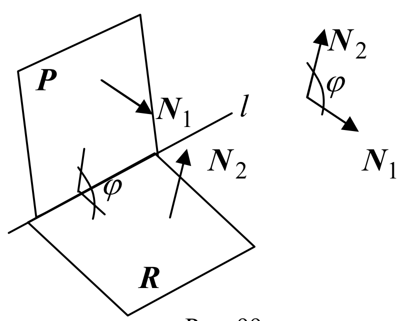


Рис. 99.

Нормали этих плоскостей имеют вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N_1} &= A_1\boldsymbol{i} + B_1\boldsymbol{j} + C_1\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{N_2} &= A_2\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + C_2\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Определение 1. *Углом между двумя плоскостями* называется угол, который образуют линии пересечения этих плоскостей с плоскостью, перпендикулярной линии их пересечения (рис. 99).

Замечание 1. Практически можно получить множество разных углов при пересечении заданных плоскостей произвольной плоскостью. Однако из всех углов для определения выбирается только угол в плоскости, перпендикулярной линии l. Можно дать второе определение угла между двумя плоскостями.

Определение 2. Угол между двумя плоскостями *равен углу между их нормалями*.

Отсюда можно просто использовать, что косинус угла между двумя векторами равен их скалярному произведению, делённому на модули этих векторов. Отсюда:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{N}_1 \cdot \boldsymbol{N}_2}{|\boldsymbol{N}_1||\boldsymbol{N}_1|}, \qquad (2.12)$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (2.12^*)$$

2. Прямая в пространстве

Прямую в пространстве в координатной форме невозможно задать одним уравнением. Она является линией пересечения двух плоскостей. Однако можно записать векторное уравнение прямой. Для определения положения прямой в пространстве необходимо задать либо две точки, либо точку и направление. Направление прямой задаётся направляющим вектором (рис.100)

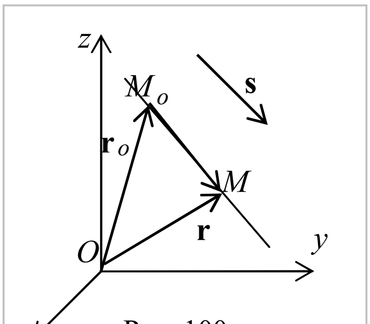


Рис. 100.

$$\mathbf{s} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}. \qquad (2.13)$$

Для составления уравнения прямой используется условие, что вектор $\overrightarrow{M_oM}$ коллинеарен вектору $\mathbf{s}$. Вектор $\overrightarrow{M_oM}$ равен разности векторов

$$\overrightarrow{M_oM} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_o.$$

Условие коллинеарности имеет вид $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \parallel \mathbf{s}t$. Отсюда можно записать

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_o = \mathbf{s}t,$$

где t параметр, который показывает, сколько раз вектор $\mathbf{s}$ укладывается на отрезке прямой $\overrightarrow{M_oM}$, то есть расстояние от фиксированной точки $\mathbf{r}_o$ до текущей точки $\mathbf{r}$. Отсюда векторное уравнение прямой имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{s}t. \qquad (2.14)$$

Уравнение прямой в координатной форме записывается так:

$$\left.\begin{aligned} x - x_o &= mt, \\ y - y_o &= nt, \\ z - z_o &= pt. \end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

и называется *параметрическим уравнением прямой*.

Если задать прямую как линию пересечения двух плоскостей, то получается общее уравнение прямой, которое записывается в виде системы уравнений этих плоскостей

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}\right\}. \qquad (2.16)$$

1) Угол между двумя прямыми

Определение 3. Углом φ между двумя прямыми в пространстве называется угол между их направляющими векторами $\mathbf{s}_1 = m_1\mathbf{i} + n_1\mathbf{j} + p_1\mathbf{k}$ и $\mathbf{s}_2 = m_2\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + p_2\mathbf{k}$ (рис. 101).

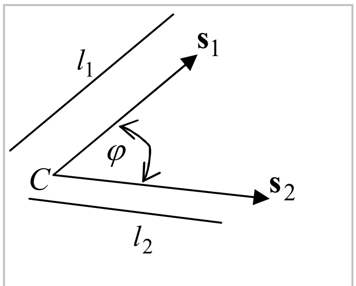


Рис. 101.

Косинус угла между двумя векторами равен их скалярному произведению, деленному на произведение их модулей

В векторном виде

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|}, \tag{2.17}$$

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{2.17*}$$

2) Угол между прямой и плоскостью

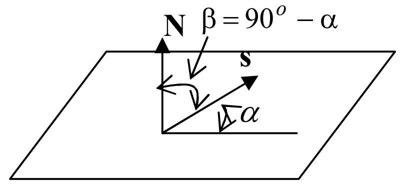


Рис. 102..

Определение 4. Углом между прямой и плоскостью α называется угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

Если мы определим косинус угла β между нормалью плоскости $\mathbf{N}$ и направляющим вектором прямой $\mathbf{s}$, то мы определим косинус дополнительного угла, а не угла между прямой и плоскостью. Но косинус этого угла равен синусу угла между прямой и плоскостью, то есть $\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha = \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{N}||\mathbf{s}|}$ (рис. 102)

$$\sin\alpha = \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{N}||\mathbf{s}|} \tag{2.18}$$

или в координатной форме

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{2.18*}$$

3. Пространственная кривая

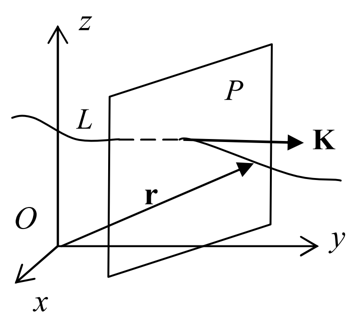


Рис. 103.

1) Способы задания пространственных кривых

Векторное задание пространственной кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \tag{2.19}$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}. \tag{2.19*}$$

В координатной форме параметрическое задание пространственной кривой:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned}\right\}. \tag{2.20}$$

Как линия пересечения двух криволинейных поверхностей

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= 0, \\ F_2(x,y,z) &= 0. \end{aligned}\right\}. \tag{2.21}$$

2) **Уравнение касательной прямой, проходящей через точку $M(\mathbf{r}_o)$, где**

$$\mathbf{r}_o = x_o\mathbf{i} + y_o\mathbf{j} + z_o\mathbf{k}$$

- *радиус-вектор точки на кривой L, записывается в виде*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \lambda \mathbf{r}', \tag{2.22}$$

где

$$\mathbf{r_o} = x(t_o)\,\mathbf{i} + y(t_o)\,\mathbf{j} + z(t_o)\,\mathbf{k} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k} \tag{2.23}$$

и в точке t_o

$$\mathbf{r}'(t_o) = x'(t_o)\,\mathbf{i} + y'(t_o)\,\mathbf{j} + z'(t_o)\,\mathbf{k}\,. \tag{2.24}$$

Уравнение касательной прямой можно записать в виде:

$$\frac{x - x_o}{x'(t_o)} = \frac{y - y_o}{y'(t_o)} = \frac{z - z_o}{z'(t_o)}, \tag{2.25}$$

где вектор касательной имеет вид

$$\mathbf{K} = x'(t_o)\mathbf{i} + y'(t_o)\mathbf{j} + z'(t_o)\mathbf{k}\,. \tag{2.26}$$

3) Уравнение нормальной плоскости P (множество прямых, нормальных к кривой в точке, образуют *нормальную плоскость*), как плоскости, заданной векторно, запишется в виде

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) = 0\,, \tag{2.27}$$

где **нормаль** плоскости равна вектору *касательной* к кривой L в точке $\mathbf{r}_o$: $\mathbf{N} = \mathbf{k}$.

В координатной форме уравнение нормальной плоскости имеет вид:

$$\mathbf{N} = \mathbf{K} = x'(t_o)\mathbf{i} + y'(t_o)\mathbf{j} + z'(t_o)\mathbf{k}\,. \tag{2.28}$$

Введя обозначения

$$A = x'(t_o), \quad B = y'(t_o), \quad C = z'(t_o), \tag{2.29}$$

а также используя уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $\mathbf{r}_o = x_o\,\mathbf{i} + y_o\,\mathbf{j} + z_o\,\mathbf{k}$ в заданном направлении, которая записывается в векторном виде $\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) = 0$, а в координатной форме

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0\,, \tag{2.30}$$

где $A = x'(t_o), \quad B = y'(t_o), \quad C = z'(t_o)$.

Эту плоскость можно записать в виде общего уравнения плоскости

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0\,, \tag{2.31}$$

где $D = -(A\,x_o + B\,y_o + C\,z_o)$.

5. Кривые второго порядка (*конические сечения* на рис. 95)

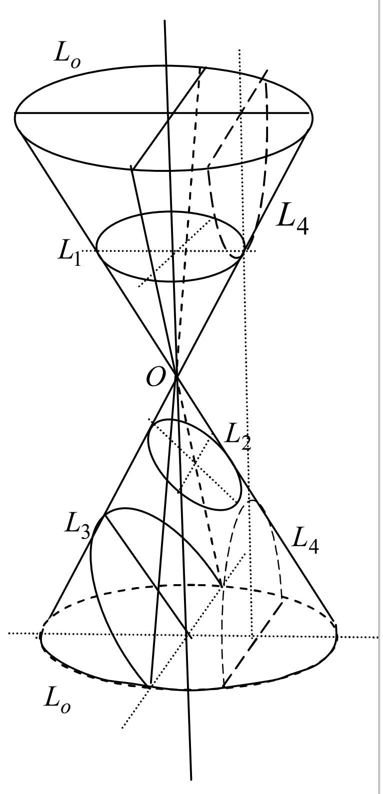


Рис. 104.

Все кривые второго порядка являются сечениями прямого кругового конуса. На рис. 104 показаны все конические сечения. Если прямой круговой конус рассечь плоскостью, перпендикулярной его оси, то эта плоскость пересечёт поверхность конуса по окружности. В данном случае это окружности L_o, L_1, L_o. Если секущая плоскость пересекает этот конус под углом, то в пересечении получится эллипс L_2. Если секущая плоскость параллельна какой-нибудь образующей конуса, то в сечении получится парабола L_3. Если пересечь прямой круговой конус плоскостью, параллельной его оси, то она пересечёт его по двум ветвям гиперболы L_4.

1) *Вывод уравнения окружности* (L_1 на рис. 104.)

Определение 5. *Окружностью* называется геометрическое место точек, равноудалённых от одной точки, центра окружности.
Пусть дана точка – центр окружности $O(x_o, y_o)$ и расстояние точек окружности от центра R.
Расстояние текущей точки $M(x, y)$ от центра равно $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}$ и равно R. Отсюда получается равенство $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}=R$, из которого получается *уравнение окружности* в виде6

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2. \qquad (2.32)$$

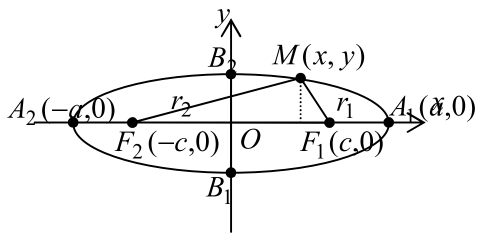


Рис. 105

2) *Вывод уравнения эллипса* (L_2 на рис. 104, рис.105)

Определение 6. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Совершенно очевидно, что сумма расстояний $r_1+r_2=2a$ (точки A_1 и A_2 принадлежат эллипсу). Расстояние между фокусами F_1 и F_2 равно $2c$. Отсюда следует, что $a>c$ (рис.96). Каждое из расстояний равно соответственно

$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и $r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$.

Тогда $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$.

Отсюда $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-\sqrt{(x+c)^2+y^2}+2a$. Возведение в квадрат обеих частей даёт

$$(x-c)^2+y^2=(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2.$$

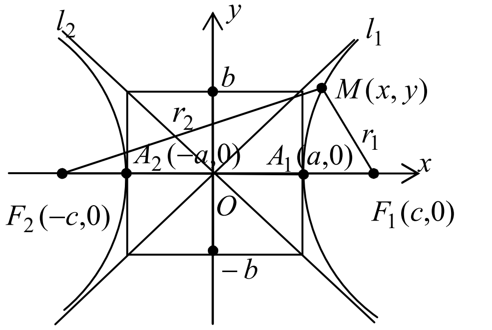


Рис. 106.

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим $-4xc=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2$, откуда, деля на 4, имеем $xc+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, дальше, деля на a, получаем $a+x\frac{c}{a}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Возведя в квадрат, имеем $a^2+2xc+x^2\left(\frac{c}{a}\right)^2=x^2+2xc+c^2+y^2$, откуда $1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}$. Так как $a>c$, то можно ввести обозначение $a^2-c^2=b^2$. Тогда *уравнение эллипса* получается в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2.33)$$

3) *Вывод уравнения гиперболы*

Определение 7. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (рис. 106).

Из определения можно записать, что $r_1 - r_2 = 2a$. Вывод уравнения гиперболы полностью совпадает с выводом уравнения эллипса, но разница в том. что у гиперболы $a < c$. В этом случае в уравнении $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2}$ разность $a^2 - c^2 = -b^2$. И уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2.34)$$

Уравнения асимптот гиперболы l_1 и l_2 имеют вид

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad (2.35)$$

4) *Вывод уравнения параболы* **(**L_3 на рис. 104).

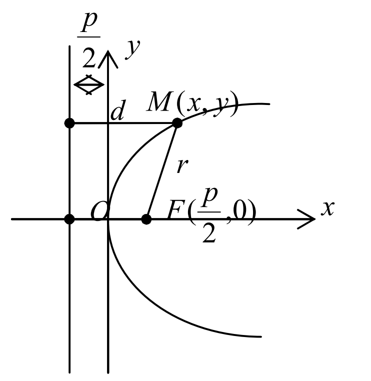


Рис. 107.

Определение 8. *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудалённых от точки, называемой фокусом, и прямой, называемой директрисой (рис. 107).

Для вывода уравнения параболы запишем равенство $r = d$, где $r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, $d = x + \frac{p}{2}$. Отсюда $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$. Возведение в квадрат даёт $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$, откуда, раскрывая скобки и приводя подобные, получаем из

$x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ уравнение параболы в виде

$$y^2 = 2px. \qquad (2.36)$$

Если вершина параболы расположена в точке $M_o(x_o, y_o)$, а ветви направлены вправо или влево, то уравнение запишется так

$$(y - y_o)^2 = \pm 2p(x - x_o) \qquad (2.37)$$

Если ветви параболы направлены вверх или вниз, то уравнение запишется в виде

$$(x - x_o)^2 = \pm 2p(y - y_o) \qquad (2.38)$$

Знаки в формулах (2.37) и (2.38) зависят от направления оси параболы.

§ 3. Коэффициенты Ламе

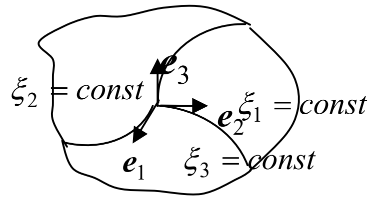


Рис. 108.

Положение точки M в пространстве задаётся радиусом – вектором

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \qquad (3.1)$$

но во многих задачах выгоднее переходить к более удобным криволинейным координатам ξ_1, ξ_2, ξ_3 (рис. 108), которые выражаются так

$$\xi_1(\mathbf{r}) = \xi_1(x_1, x_2, x_3), \quad \xi_2(\mathbf{r}) = \xi_2(x_1, x_2, x_3), \quad \xi_3(\mathbf{r}) = \xi_3(x_1, x_2, x_3). \qquad (3.2)$$

И обратно можно выразить радиус – вектор как $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а, следовательно, можно выразить x_1, x_2, x_3 через ξ_1, ξ_2, ξ_3 следующим образом:

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \qquad (3.3)$$

Пусть заданы поверхности равного уровня

$$\xi_1(\mathbf{r}) = const, \quad \xi_2(\mathbf{r}) = const, \quad \xi_3(\mathbf{r}) = const. \tag{3.4}$$

Каждое равенство образует некоторое семейство поверхностей. Через произвольную точку М проходит по одной поверхности каждого семейства. Эти поверхности называются координатными. Линии пересечения называются координатными линиями.

Замечание 1. На координатной линии ξ_1 меняется только координата ξ_1, а остальные координаты ξ_2, ξ_3 остаются постоянными.

Введём в рассмотрение единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, направленные по касательным к координатным линиям в точке M в сторону возрастания, соответственно, переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3. Рассмотрим радиус – вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и составим производную $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}$.

Поскольку при дифференцировании ξ_2 и ξ_3 считаются постоянными, годографом вектора $\mathbf{r}$ является координатная линия ξ_1, а потому вектор $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}$ имеет направление касательной к координатной линии ξ_1, то есть

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} = H_1 \mathbf{e}_1, \tag{3.5}$$

где H_1 - длина вектора $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}$. В силу того, что $\mathbf{e}_1$ единичный вектор, справедливо равенство

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right)^2 \tag{3.6}$$

или так как

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\mathbf{e}_1, \tag{3.7}$$

то

$$H_1^2 = (\partial x_1/\partial \xi_1)^2 + (\partial x_2/\partial \xi_1)^2 + (\partial x_3/\partial \xi_1)^2. \tag{3.8}$$

Аналогичные рассуждения приводят к формулам

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} = H_1 \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = H_2 \mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3} = H_3 \mathbf{e}_3. \tag{3.9}$$

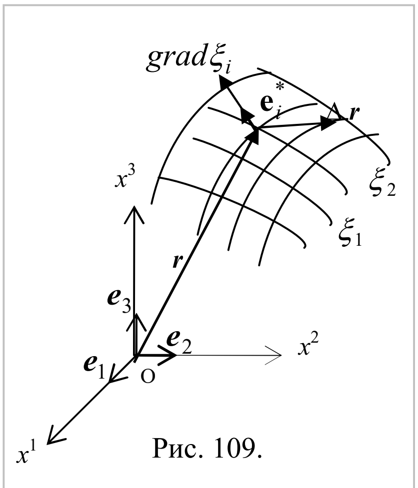


Рис. 109.

где

$$H_i^2 = (\partial x_1/\partial \xi_i)^2 + (\partial x_2/\partial \xi_i)^2 + (\partial x_3/\partial \xi_i)^2. \tag{3.10}$$

Определение 1. Значения H_1, H_2, H_3 называются *коэффициентами Ламе*.

Рассмотрим, три вектора $\mathrm{grad}\xi_i$, то есть $\mathrm{grad}\xi_1$, $\mathrm{grad}\xi_2$, $\mathrm{grad}\xi_3$. Каждый из векторов $\mathrm{grad}\xi_i$ направлен по нормали к координатной поверхности $\xi_i = \mathrm{const}$. Если ввести обозначение вектора нормали к поверхности в виде $\mathbf{e}_i^*$ в направлении возрастающих значений ξ_i (от одной координатной поверхности к другой на рис. 109), то получим

$$grad\xi_i = h_i \mathbf{e}_i^*, \quad (i = 1,2,3), \tag{3.11}$$

где h_i длина вектора $grad\xi_i$. Очевидно, что

$$h_i^2 = (grad\,\xi_i)^2 = (\partial \xi_i/\partial x_1)^2 + (\partial \xi_i/\partial x_2)^2 + (\partial \xi_i/\partial x_3)^2, \quad (i = 1,2,3). \tag{3.12}$$

Величины h_1, h_2, h_3 являются дифференциальными параметрами первого порядка.

Коэффициенты Ламе определяются по формулам

$$H_i = \sqrt{\left(\partial x_1 / \partial \xi_{\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\partial x_2 / \partial \xi_{\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\partial x_3 / \partial \xi_{\mathrm{i}}\right)^2}\ . \qquad (3.13)$$

Замечание 2. Обычно используются ортогональные криволинейные координаты.

1) *Смысл коэффициентов Ламе*

Следует вспомнить из курса дифференциальной геометрии, что приращение радиуса – вектора связано с приращением дифференциала длины дуги пространственной кривой и модуль дифференциала радиуса – вектора равен дифференциалу длины дуги

$$\left|\mathrm{d}\,\mathbf{r}\right| = \mathrm{d}\,s\,, \qquad (3.14).$$

но с другой стороны

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} d\,\xi_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} d\,\xi_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3} d\,\xi_3 = H_1 d\,\xi_1 \mathbf{e}_1 + H_2 d\,\xi_2 \mathbf{e}_2 + +H_3 d\,\xi_3 \mathbf{e}_3\,, \qquad (3.15)$$

$$d\,\mathbf{r} = \frac{\partial s_i}{\partial \xi_k} d\,\xi_k \mathbf{e}_i = H_i d\,\xi_i \mathbf{e}_i\,. \qquad (3.16)$$

Возводя в квадрат обе части равенства (3.16) и замечая, что $\left(d\mathbf{r}\right)^2 = \left(d\,s\right)^2$, $\mathbf{e}_i{}^2 = 1$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = 0\ (i \neq k)$, получим для квадрата длины элемента $d\,\mathbf{r}$ формулу

$$\left(\mathrm{d}\,\mathbf{r}\right)^2 = H_1^2 (\mathrm{d}\xi_1)^2 + H_2^2 (\mathrm{d}\xi_2)^2 + H_3^2 (\mathrm{d}\xi_3)^2. \qquad (3.17)$$

и, следовательно, квадрат длины дуги тоже выражается через коэффициенты Ламе

$$\left(\mathrm{d}\,s\right)^2 = H_1^2 (\mathrm{d}\xi_1)^2 + H_2^2 (\mathrm{d}\xi_2)^2 + H_3^2 (\mathrm{d}\xi_3)^2. \qquad (3.18)$$

Отсюда для ортогональных криволинейных координат выражение для составляющих вектора $d\,\mathbf{r}$ имеет вид

$$d\,s_i = H_i d\,\xi_i\,.\ (i = 1,2,3)\,, \qquad (3.19)$$

то есть,

$$ds_1 = H_1 d\,\xi_1,\quad ds_2 = H_2 d\,\xi_2,\quad ds_3 = H_3 d\,\xi_3\,. \qquad (3.20)$$

Через коэффициенты Ламе в ортогональных криволинейных координатах ξ_i выражаются элементы длины дуги s_1, s_2, s_3

$$\mathrm{d}\,s = \sqrt{H_1^2 (\mathrm{d}\xi_1)^2 + H_2^2 (\mathrm{d}\xi_2)^2 + H_3^2 (\mathrm{d}\xi_3)^2}\ . \qquad (3.21)$$

Замечание 1. Таким образом, коэффициентов Ламе дают связь дифференциала длины дуги на координатной поверхности с координатными линиями ξ_i

$$\frac{d\,s_k}{d\xi_k} = H_k,\quad \frac{d\,\xi_k}{ds_k} = \frac{1}{H_k}. \qquad (3.22)$$

Установим связь между величинами h_1, h_2, h_3, введенными в (3.11) и (3.12) как координаты градиента $grad\xi_k$ в виде

$$grad\xi_k = \frac{\partial\,\xi_k}{\partial\,s_i}\mathbf{e}_i = h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2 + h_3\mathbf{e}_3 \qquad (3.23)$$

с коэффициентами Ламе.

Для криволинейных координат выражение дифференциала радиуса - вектора имеет вид (3.15), так что составляющими вектора $d\,\mathbf{r}$ являются

$$\frac{d\,s_k}{d\xi_k} = H_k \text{ или } ds_k = H_k d\,\xi_k. \qquad (3.24)$$

С другой стороны,

$$\frac{d\,\xi_k}{ds_k} = h_k\,. \tag{3.25}$$

Отсюда получается

$$h_i = 1/H_i\,. \tag{3.26}$$

2) *Вывод дифференциалов элемента длины дуги, элемента площади и элемента объёма*

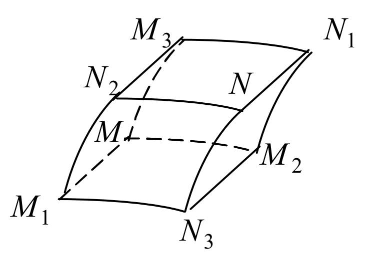


Рис. 110.

Пусть (рис. 110) $d\,\mathbf{r} = \overline{MN}$, где N - бесконечно близкая к M точка; проведем через N три координатных поверхности, которые вместе с тремя координатными поверхностями, проходящими через точку M, образуют криволинейный бесконечно малый параллелепипед. Рёбрами этого параллелепипеда будут дифференциалы длины дуги

$$ds_1 = H_1 d\,\xi_1,\quad ds_2 = H_2 d\,\xi_2,\quad ds_3 = H_3 d\,\xi_3\,, \tag{3.27}$$

но тогда грани его будут иметь площади, равные дифференциалу

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 d\,\xi_2 d\,\xi_3,\quad d\sigma_2 = H_3 H_1 d\,\xi_3 d\,\xi_1,\quad d\sigma_3 = H_1 H_2 d\,\xi_1 d\,\xi_2\,, \tag{3.28}$$

а дифференциал объёма получается в виде

$$\mathrm{d}V = H_1 H_2 H_3 \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3. \tag{3.29}$$

3) *Вывод коэффициентов Ламе в цилиндрических и сферических координатах*

1. Коэффициенты Ламе в *цилиндрических координатах*

$$\xi_1 = \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,,$$

$\xi_2 = \varphi$ - угол между вектором $\boldsymbol{\rho} = \{x_1, x_2\}$ и осью x_1, $\xi_3 = z = x_3$.

Из дифференциальной геометрии известно, что

$$ds_1 = d\,\rho,$$
$$ds_2 = \rho\, d\varphi,$$
$$ds_3 = dz.$$

Сравнивая с $ds_1 = H_1 d\,\xi_1,\quad ds_2 = H_2 d\,\xi_2,\quad ds_3 = H_3 d\,\xi_3$, получим

$$H_\rho = 1,\quad H_\varphi = \rho,\quad H_z = 1.$$

2. Коэффициенты Ламе в *сферических координатах*

$$ds_1 = d\,r,\quad ds_2 = r\,d\theta,\quad ds_3 = r\sin\theta\; d\varphi$$

Сравнивая с $ds_1 = H_1 d\,\xi_1,\quad ds_2 = H_2 d\,\xi_2,\quad ds_3 = H_3 d\,\xi_3$, получим в виде

$$H_r = 1,\quad H_\theta = r,\quad H_\varphi = r\sin\theta.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ТАБЛИЦЫ

Таблица 1. Основные системы координат

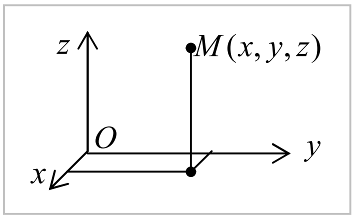
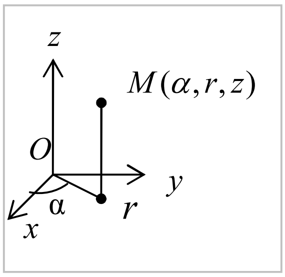
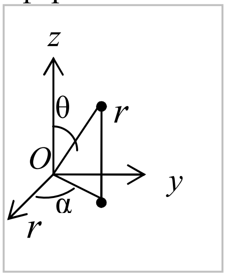
Декартова система координат	Цилиндрические координаты	Сферические координаты
 	$x = r\cdot\cos\alpha$ $y = r\cdot\sin\alpha$ $z = z$  	 $x = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\alpha$ $y = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\alpha$ $z = r\cdot\cos\theta$

Таблица 2. Производные

№	Функция	Производная
1	C	0
2	$C{\cdot}u$	Cu'
3	$u\pm\upsilon$	$u'\pm\upsilon'$
4	$\upsilon(x)\cdot u(x)$	$\upsilon'(x)\cdot u(x)+\upsilon(x)\cdot u'(x)$
5	$\dfrac{u(x)}{\upsilon(x)}$	$\dfrac{u'(x)\upsilon(x)-u(x)\upsilon'(x)}{\upsilon^2(x)}$
6	u^n	$n u^{n-1}u'$
7	e^u	$e^u u'$
8	a^u	$a^u \ln a\, u'$
9	u^υ	$\upsilon u^\upsilon u' + u^\upsilon \ln u\, \upsilon'$
10	$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
11	$\sin u$	$(\cos u)u'$
12	$\cos u$	$-(\sin u)u'$
13	$\mathrm{tg}\,u$	$\dfrac{u'}{\cos^2 u} = \sec^2 u\cdot u'$
14	$\mathrm{ctg}\,u$	$-\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -\mathrm{cosec}^2 u\cdot u'$
15	$\arcsin u$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16	$\arccos u$	$-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17	$\mathrm{arctg}\,u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$
18	$\mathrm{arcctg}\,u$	$-\dfrac{u'}{1+u^2}$

	Таблица 3. Неопределённые интегралы
1	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$
2	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
3	$\int e^u du = e^u + C$
4	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
5	$\int \sin u \, du = -\cos u + C$
6	$\int \cos u \, du = \sin u + C$
7	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$
8	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
9	$\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$
10	$\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
11	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$
12	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right\rvert + C$
13	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$
14	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{u-a}{u+a} \right\rvert + C$
15	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{u+a}{u-a} \right\rvert + C$
16	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
17	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\rvert + C$
18	$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$
19	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\rvert + C$

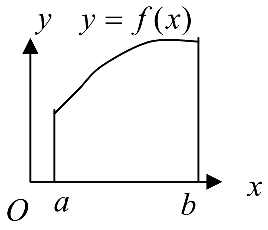
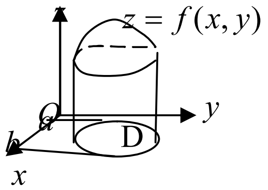
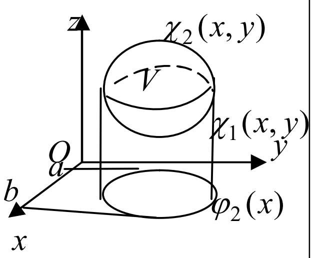
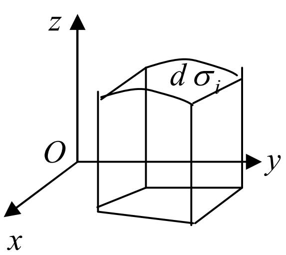
Таблица 4. Определённые интегралы			
Название интеграла и графическое объяснение	Область определения и подынтегральная функция	Интегральная сумма и формула по определению	Способ вычисления
Определённый интеграл 	Область определения - отрезок $[ab]$. Подынтеграль - ная функция - функция одной переменной $y=f(x)$	$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ $\int_a^b f(x)dx=$ $=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$	Формула Ньютона –Лейбница $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$
Двойной интеграл 	Область определения - плоская фигура D. Подынтеграль-ная функция - $z=f(x,y)$ - функция двух переменных	$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$ $\iint_D f(x,y)\,dS=$ $=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$	Двойной интеграл равен двукратному интегралу $\iint_D f(x,y)\,dS=$ $=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$
Тройной интеграл 	Область определения – объёмная фигура V. Подынтеграль - ная функция - $u=f(x,y,z)$ -функция трёх переменных	$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$ $\iiint_V f(x,y,z)dV=$ $=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$	Тройной интеграл равен трёхкратному интегралу $\iiint_V f(x,y,z)\,dV=$ $=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y)dz$
Поверхностный интеграл **первого** рода 	Область определения - поверхность $\Sigma=\Sigma(x,y)$ Подынтеграль - ная функция - скалярная функция трёх переменных $u=f(x,y,z)$	$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_i$ $\Delta\sigma_i$ - элемент поверхности Σ $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma=$ $=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_i$	Поверхностный интеграл первого рода сводится к двойному интегралу $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma=$ $=\iint_\Sigma f(x,y,z)\times$ $\times\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$

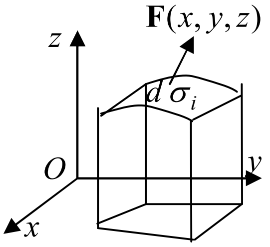
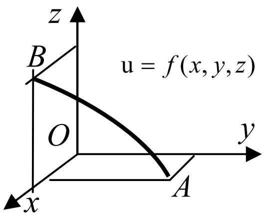
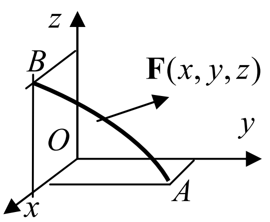
Таблица 4. Определённые интегралы (продолжение)			
Поверхностный интеграл **второго** рода  	Область определения - поверхность $\Sigma = \Sigma(x,y)$. Подынтеграль - ная функция - векторная функция $\mathbf{F}(x,y,z) =$ $= P(x,y,z)\,\mathbf{i} +$ $+ Q(x,y,z)\,\mathbf{j} +$ $+ R(x,y,z)\,\mathbf{k}$	$I_n =$ $= \sum_{i=1}^{n}\big(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i +$ $+ Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i +$ $+ R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\big)d\sigma_i$	Поверхностный интеграл второго рода сводится к трём двойным интегралам $\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma =$ $\iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dxdz + Rdxdy$
Криволинейный интеграл **первого** рода  	Область определения - кривая AB, уравнение которой в параметри-ческом виде $\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}.$ Подынтеграль - ная функция - скалярная функция трёх переменных $u = f(x,y,z)$	$I_n =$ $= \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta l_i$ $\int_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y,z)\,d\,l =$ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta l_i$	Криволинейный интеграл первого рода сводится к определённому интегралу $\int_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y,z)\,d\,l =$ $= \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]dt$
Криволинейный интеграл **второго** рода  	Область определения - кривая AB. Подынтеграль - ная функция - векторная функция $\mathbf{F}(x,y,z) =$ $= P(x,y,z)\,\mathbf{i} +$ $+ Q(x,y,z)\,\mathbf{j} +$ $+ R(x,y,z)\,\mathbf{k}$	$I_n =$ $= \sum_{i=1}^{n}\big(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta x_i +$ $+ Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta y_i +$ $+ R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta z_i\big)$ $\int_{\overset{\smile}{AB}}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} =$ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\big(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta x_i +$ $+ Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta y_i +$ $+ R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta z_i\big)$	Криволинейный интеграл второго рода сводится к трём определённым интегралам **путём подстановки уравнения** кривой AB $\int_{\overset{\smile}{AB}}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} =$ $= \int_{\overset{\smile}{AB}} P\mathrm{d}\,x + Qdy + Rdz$

Таблица 5. Формулы Стокса, Остроградского – Гаусса и Грина

№	Наименование	Обозначение или формула
1	**Формула Стокса** в векторном виде (Циркуляция)	$\oint\limits_{\lambda} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\,\mathbf{s} = \iint\limits_{\Sigma} rot\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\,\sigma$
2	**Формула Стокса** в координатной форме	$\oint\limits_{\lambda} P\,d\,x + Q\,d\,y + R(\,d\,z = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix} d\,\sigma$
3	**Формула Остроградского – Гаусса** в векторном виде (Поток)	$\iiint\limits_{V} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ или $\iiint\limits_{V} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$
4	**Формула Остроградского – Гаусса** в координатной форме.	$\iiint\limits_{V} \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iint\limits_{\Sigma} \{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma$
5	Первая формула Грина	$\iiint\limits_{V} u\,\Delta\upsilon\,dV = \iint\limits_{\Sigma} u\,\dfrac{\partial\upsilon}{\partial n}\,d\,\sigma - \iiint\limits_{V} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial z}\right) dV$
6	Вторая формула Грина	$\iiint\limits_{V} (u\Delta\upsilon - \upsilon\nabla u)dV = \iint\limits_{\Sigma} \left(u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial n} - \upsilon\dfrac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$
7	Основная формула Грина	$4\pi u(M_o) = -\iint\limits_{\Sigma} \left[u(P)\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{1}{R_{M_oP}}\right) - \dfrac{1}{R_{M_oP}}\dfrac{\partial u}{\partial n}\right] d\,\sigma_P - \iiint\limits_{V} \dfrac{\Delta u(P)}{R_{M_oP}} dV$

Таблица 6. Основные характеристики скалярного поля в разных системах координат

№	Наименование	Обозначение или формула
1	**Производная вектора** скорости в декартовых координатах (ускорение)	$\dfrac{d\,\mathbf{v}}{d\,t} = \dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial t} + \dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial x}\upsilon_x + \dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial y}\upsilon_y + \dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial z}\upsilon_z$
2	**Производная вектора** скорости в цилиндрических координатах (ускорение)	$\dfrac{d\,\mathbf{v}}{d\,t} = \dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial t} + \dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial r}\upsilon_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\alpha}\upsilon_\alpha + \dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial z}\upsilon_z$
3	**Производная вектора** скорости в сферических координатах (ускорение)	$\dfrac{d\,\mathbf{v}}{d\,t} = \dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial t} + \dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial r}\upsilon_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\alpha}\upsilon_\alpha + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\theta}\upsilon_\theta$
4	**Градиент потенциала** в декартовых координатах	$\operatorname{grad}\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$
5	**Градиент потенциала** в цилиндрических координатах	$\operatorname{grad}\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\mathbf{e}_\alpha + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z$
6	**Градиент потенциала** в сферических координатах	$\operatorname{grad}\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\mathbf{e}_\alpha + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta$
7	**Градиент вектора** в декартовых координатах	$\operatorname{grad}_{\mathbf{v}}\mathbf{a} = \dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}\upsilon_x + \dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}\upsilon_y + \dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}\upsilon_z$
8	**Градиент вектора** в цилиндрических координатах	$\operatorname{grad}_{\mathbf{v}}\mathbf{a} = \dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial r}\upsilon_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial\alpha}\upsilon_\alpha + \dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}\upsilon_z$
9	**Градиент вектора в** сферических координатах	$\operatorname{grad}_{\mathbf{v}}\mathbf{a} = \dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial r}\upsilon_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial\alpha}\upsilon_\alpha + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial\theta}\upsilon_\theta$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ЛОГАРИФМЫ

Определение. Логарифмом числа u называется показатель степени, в которую нужно возвести основание, чтобы получить число u.

Аналитическое выражение логарифма имеет вид:

$$e^{\ln u} = u, \quad 10^{\lg u} = u, \quad a^{\log_a u} = u. \qquad (2.1)$$

Замечание 1. Здесь $e, 10, a$ являются основанием соответствующих логарифмов. Логарифмы с основанием e называются натуральными, с основанием 10 называются десятичными, а с основанием в виде числа a называются логарифмами по основанию a.

Справедливо и такое равенство, когда число записывается в виде степени, то есть,

$$u = e^{\ln u}, \quad u = 10^{\lg u}, \quad u = a^{\log_a u}.$$

Свойства логарифмов:

1. *Логарифм основания* (логарифмов) всегда равен единице.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в формуле 1 $u = e$, тогда $e^{\ln e} = e$, а это возможно только, если $\ln e = 1$ ч.т.д.

Аналогично доказывается утверждение 1 для случая десятичных логарифмов и логарифмов по любому основанию.

$$10^{\lg 10} = 10 \quad \Rightarrow \quad \lg 10 = 1,$$
$$a^{\log_a a} = a \quad \Rightarrow \quad \log_a a = 1. \qquad (2.2)$$

Логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов этих чисел

$$10^{\lg(a \cdot b)} = a \cdot b, \quad 10^{\lg a} = a, \quad 10^{\lg b} = b,$$
$$a \cdot b = 10^{\lg(a \cdot b)} = 10^{\lg a} 10^{\lg b} = 10^{\lg a + \lg b} \Rightarrow \lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b.$$
$$\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b. \qquad (2.3)$$

Логарифм частного равен разности логарифмов числителя и знаменателя

$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b. \qquad (2.4)$$

Логарифм единицы по любому основанию равен нулю

$$\ln 1 = 0, \qquad \lg 1 = 0, \qquad \log_a 1 = 0. \qquad (2.5)$$

Это следует из формулы (1.4), если представить единицу в виде дроби $1 = \frac{a}{a}$, тогда

$$\lg 1 = \lg \frac{a}{a} = \lg a - \lg a = 0 \text{ ч.т.д.} \qquad (2.6)$$

Перевод логарифма по одному основанию к логарифму этого же числа u по другому основанию выполняется по следующим формулам

$$e^{\ln u} = u \Rightarrow \quad \lg u = \lg e^{\ln u} \Rightarrow \ln u \lg e,$$
$$10^{\lg u} = u \Rightarrow \quad \ln u = \ln 10^{\lg u} \quad \Rightarrow \lg u \ln 10 = \ln u,$$
$$a^{\log_a u} = u \quad \Rightarrow \log_b u = \log_b a^{\log_a u} \quad \Rightarrow \log_a u \cdot \log_b a = \log_b u.$$

Замечание 2. Для того, чтобы получить из логарифма числа u по основанию a логарифм этого же числа u по основанию b, необходимо имеющийся логарифм умножить на логарифм основания a по основанию b.

$$\log_a u \cdot \log_b a = \log_b u. \qquad (2.7)$$

Замечание 3. Для перевода логарифмов из натуральных к десятичным и обратно используют известные константы $\ln 10 = 2{,}3025851, \quad \lg e = 0{,}4342973, \quad e = 2{,}7183$.

$$\ln u \lg e = \lg u, \quad \ln u \cdot 0.4343 = \lg u .$$
$$\lg u \ln 10 = \ln u, \quad \lg u \cdot 2.3026 = \ln u .$$

Отсюда легко получить формулы

а) $$\ln u = \lg u / \lg e , \qquad (2..8)$$

то есть, если есть только десятичные логарифмы числа u, то можно получить натуральный логарифм u.

б) $$\lg u = \ln u / \ln 10 , \qquad (1.9)$$

то есть, если есть только натуральные логарифмы, можно получить натуральный логарифм u

в) $$\log_a u = \frac{\log_b u}{\cdot \log_b a} . \qquad (2.10)$$

При логарифмировании степенного выражения показатель степени ставится перед логарифмом. Это следует из формулы (1.3). Пусть нужно получить логарифм числа 6^4, тогда

$$\lg 6^4 = \lg(6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6) = \lg 6 + \lg 6 + \lg 6 + \lg 6 = 4 \cdot \lg 6 .$$

Обобщая это действие на произвольную степень, получаем формулу

$$\ln a^n = n \ln a . \qquad (2.11)$$

График логарифмической функции

На графике рис. 111 видно, что справедливы следующие пределы: когда $x \to 0$ логарифмическая функция стремится к минус бесконечности; когда $x \to \infty$ логарифмическая функция стремится к плюс бесконечности.;

Замечание 4. Значения логарифма отложены по оси y.

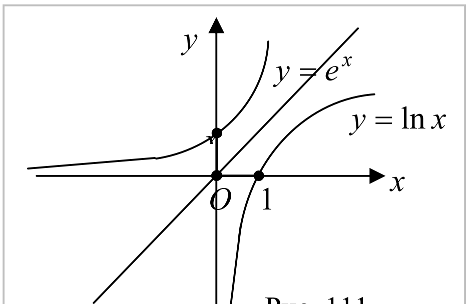


Рис. 111.

$$1) \ \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \quad 2) \ \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \quad 3) \ \ln 1 = 0 .$$

Замечание 5. Показательная функция $y = e^x$ и логарифмическая функция $y = \ln x$ являются обратными по отношению друг к другу. Их графики симметричны относительно биссектрисы $y = x$ (рис 111).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление.- Т. 1,2.-М.: Наука, 1984, 416 с. И 432 с..
2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. - ФИЗМАТЛИТ.- 2006.-336 с. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - СПб, 2001.- 432 с. .
3. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. -М.: Наука, ГРФ.- МЛ, 1979, 512 с.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.- 304 с.
5. Н.Е. Кочин «Векторное исчисление и начала тензорного исчисления» изд. 1965 г.

СОДЕРЖАНИЕ