

**Министерство транспорта РФ  
Федеральное агентство морского и речного транспорта  
ФБОУ ВПО  
«НОВОСИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ  
ВОДНОГО ТРАНСПОРТА»**

**629.12  
Г738**

**А.Ш. Готман**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ  
В ПРОЕКТИРОВАНИИ ОБВОДОВ СУДОВ**

Учебное пособие для аспирантов

Новосибирск 2011

УДК 513.73; 629.12.011.1.001.2(07)

Готман А.Ш. Дифференциальная геометрия и её использование в проектировании обводов судов; учебное пособие/ А.Ш. Готман. - Новосибирск: Новосиб. гос. акад. вод. трансп., 2011

Настоящее учебное пособие составлено на основании лекций, прочитанных в школе-семинаре при кафедре ТУК НГАВТ в 2010 -11 учебном году, и предназначено для аспирантов, студентов - стажёров, преподавателей и инженеров кораблестроителей. В пособии изложены элементы дифференциальной геометрии и математические основы проектирования обводов судов с развёртывающейся наружной обшивкой с помощью вычислительной техники. Автор благодарит всех слушателей, принимавших активное участие в обсуждении текста данного пособия: А.В. Булыгину, А.А., Девяткина, Алексея В. Краснова и Александра В. Краснова.

*Рецензенты:*

Владимиров Ю.Н. – зав. кафедрой высшей математики Новосибирского государственного университета экономики и управления, канд. физ.-мат. наук, доцент;  
Девяткин А.А. – доцент кафедры ТУК Новосибирской государственной академии водного транспорта, канд. техн. наук.

ISBN 978-5-8119-3

© Готман А.Ш., 2011  
© ФБОУ ВПО «Новосибирская государственная академия водного транспорта», 2011

## ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальная геометрия, как и начертательная геометрия, была создана Монжем (Гаспар Монж, 1746 – 1818 гг.). Сначала Монж публиковал решения отдельных задач, полученные методами начертательной и аналитической геометрии, а потом включил в свои работы и методы анализа. Так постепенно с 1799 по 1805 год были созданы начертательная геометрия и дифференциальная геометрия. В это же время разрабатывались основы математического анализа Огюстеном Коши, Жозефом Луи Лагранжем, Леонардом Эйлером, династией математиков Бернулли и др.. В разработку дифференциальной геометрии внесли существенный вклад ученики Монжа Клеро (Алексис Клод Клеро, 1713 – 1765 гг.) и Менье (Жан Батист Мари Шарль Менье, 1754 – 1793 гг.). Г. Монж был первым, кто описал развёртывающиеся поверхности, выделив их из прочих линейчатых поверхностей.

Если обшивка корпуса судна спроектирована из развёртывающихся поверхностей, то при постройке существенно снижается трудоёмкость её изготовления за счёт сокращения объёма выборки и горячей гибки. Если учесть линейчатость развёртывающихся поверхностей, то можно упростить продольный набор корпуса и конструкцию постелей для его сборки и сварки, как это показано на рисунке 1. Кроме того, есть возможность получения развёртки вместо растяжки, что повышает точность выполнения плазовых работ и облегчает автоматизацию постройки корпуса. Однако главное преимущество состоит в том, что обводы, спроектированные из развёртывающихся поверхностей (обводы с РО), можно описывать аналитически, а это позволяет на всех этапах проектирования и постройки корпуса судна использовать ЭВМ.

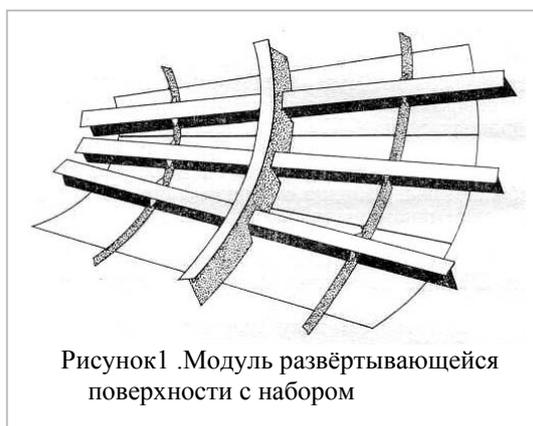


Рисунок 1. Модуль развёртывающейся поверхности с набором

Для использования вычислительной техники в судостроении был разработан метод описания обводов, заданных теоретическим чертежом, а также метод построения развёртки<sup>1</sup> наружной обшивки на ЭВМ. Практически невозможно составить уравнение произвольной поверхности, которой является поверхность корпуса судна. Однако можно с достаточной точностью аппроксимировать любые сечения

поверхности корпуса такие, как ватерлинии, батоксы и шпангоуты с помощью кривой, которая названа автором «корабельной верзиерой». Этого достаточно, чтобы использовать ЭВМ для согласования теоретического чертежа, выполнять все расчёты по теоретическому чертежу, проектировать обводы с развёртывающейся наружной обшивкой и строить её развёртку. Для выполнения всех этих расчётов используются внутренние свойства поверхностей, которые изложены в разделе «Элементы дифференциальной геометрии».

Данное пособие составлено для студентов и инженеров, желающих проектировать на ЭВМ обводы судов из развёртывающихся поверхностей. Такие обводы имеет многолетнюю историю. Практически многие мелкие суда и катера всегда получаются с развёртывающейся наружной обшивкой [3]. Ещё в середине прошлого века делались попытки проектировать обводы с развёртывающейся обшивкой, но это были упрощённые формы обводов со значительной потерей гидродинамического качества. Однако, следует учесть, что нет никакого смысла экономить на постройке корпуса, стоимость которого составляет только небольшую часть стоимости судна, чтобы потом терять в скорости или экономичности эксплуатации судна.

<sup>1</sup> Следует отметить, что точная развёртка отличается от растяжки, которая обычно строится на плазе.

# ЧАСТЬ 1. Элементы дифференциальной геометрии

## § 1 Векторная функция [1]

**Определение 1.** Вектор<sup>2</sup> называется **переменным**, если его координаты являются функцией некоторого параметра  $t$ , и в результате изменения параметра  $t$  меняются его модуль и направление.

Переменный вектор записывается в виде

$$\mathbf{u}(t) = i u_x(t) + j u_y(t) + k u_z(t), \quad (1)$$

то есть он является **векторной функцией** скалярного аргумента  $t$ .

**Замечание 1.** Здесь индексы  $x, y, z$  обозначают ось, на которую сделана проекция.

**Определение 2.** Векторная функция называется **непрерывной** при  $t = t_0$ , если её приращение, соответствующее бесконечно малому приращению аргумента, тоже бесконечно мало (по определению непрерывности функции в точке).

**Определение 3.** Постоянный вектор  $\mathbf{a}$  называется **пределом** переменного вектора  $\mathbf{u}$ , если разность между ними является бесконечно малым вектором

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{u} - \mathbf{a}) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

или

$$\mathbf{a} = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}. \quad (3)$$

**Следствие 1.** Из теоремы о связи предела и бесконечно малой функции следует, что **переменный вектор равен сумме своего предела и бесконечно малого вектора.**

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} + \lim_{t \rightarrow t_0} \Delta \mathbf{u}, \quad (4)$$

где приращение  $\Delta \mathbf{u}$  равно

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{u}(t_0). \quad (5)$$

**Замечание 2.** К переменным, бесконечно малым и постоянным векторам применимы все теоремы математического анализа.

**Теорема 1.** Для **непрерывности** переменного вектора необходимо и достаточно **непрерывности** его координат.

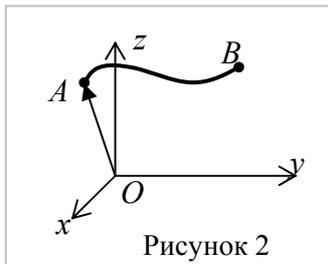
Доказательство основано на том, что квадрат модуля приращения вектора является суммой квадратов приращений его координат, то есть

$$|\Delta \mathbf{u}|^2 = |\Delta u_x|^2 + |\Delta u_y|^2 + |\Delta u_z|^2, \quad (6)$$

Если при  $\Delta t \rightarrow 0$  приращения координат стремятся к нулю, то и  $|\Delta \mathbf{u}| \rightarrow 0$ , и функция  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  непрерывна. Обратно, если  $|\Delta \mathbf{u}| \rightarrow 0$ , то приращение любой из его координат, например,

$$|\Delta u_x| \leq |\Delta \mathbf{u}|$$

тоже стремится к нулю. Отсюда теорема 1 доказана.



### Годограф векторной функции

**Определение 4.** Годографом векторной функции скалярного аргумента  $\mathbf{u}(t)$  (переменный вектор) называется

<sup>2</sup> Вектором мы называем величину, которая характеризуется числом и направлением. Если рассматривается геометрическая интерпретация вектора в виде направленного отрезка, то числом является длина, или модуль, этого отрезка.

пространственная кривая  $AB$ , которую описывает конец вектора при изменении аргумента  $t$  (рисунок 2).

### Производная векторной функции

**Определение 5.** Производной векторной функции  $\mathbf{u}(t)$  по её скалярному аргументу  $t$  называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Обозначения производной

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t}. \quad (7)$$

Так как при делении вектора  $\Delta \mathbf{u}$  на скаляр  $\Delta t$  получается вектор, то предел этого вектора, то есть производная, тоже является вектором. При этом сам предел зависит от аргумента  $t$ . Таким образом, производная является новой векторной функцией

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(t) \quad (8)$$

**Свойство 1.** Векторную функцию снова можно дифференцировать и т.д.

Производные второго, третьего и т.д. порядков обозначают так:

$$\frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{u}}; \quad \frac{d\ddot{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3} = \overset{\cdot}{\ddot{\mathbf{u}}}. \quad (9)$$

**Свойство 2.** Производная суммы векторов равна сумме производных этих векторов

$$\frac{d(\mathbf{u} + \mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (10)$$

**Свойство 3.** Производная постоянного вектора равна нулю, так как его приращение равно нулю.

$$\dot{\mathbf{u}} = 0, \text{ если } \mathbf{u} = \text{const}. \quad (11)$$

**Свойство 4.** Векторный или скалярный постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$\frac{d}{dt} \lambda \mathbf{u} = \lambda \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (12)$$

**Свойство 5.** Произведение вектора на скаляр, скалярное и векторное произведения дифференцируются по обычному правилу математического анализа.

#### а) Вектор постоянной длины

Если вектор, изменяя своё направление, сохраняет неизменный модуль, то

$$\mathbf{u}^2 = \text{const} \quad (13)$$

Дифференцируя левую и правую часть этого равенства, получают формулу

$$\mathbf{u} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0. \quad (14)$$

Так как скалярное произведение двух не равных нулю векторов может быть равно нулю только в том случае, когда векторы взаимно перпендикулярны, то  $\mathbf{u}$  и  $\dot{\mathbf{u}}$  тоже взаимно перпендикулярны.

**Следствие 1.** Производная вектора **постоянной** длины **перпендикулярна** этому вектору.

**Следствие 2.** Производная **единичного** вектора всегда **перпендикулярна** этому вектору.

Эти следствия легко объяснить. Если длина вектора постоянна, то его годограф при изменении направления описывает кривую, лежащую на поверхности сферы. Производная этого вектора будет направлена по касательной к сфере, которая всегда перпендикулярна к её радиусу.

### б) Вектор постоянного направления

Если у вектора направление постоянно, но модуль меняется, то его можно выразить в виде произведения единичного вектора  $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$  на скаляр, то есть,

$$\mathbf{u} = |\mathbf{u}| \cdot \mathbf{b}. \quad (15)$$

Дифференцирование этого вектора позволяет вынести постоянный множитель за знак производной. Тогда получается

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d|\mathbf{u}|}{dt} \cdot \mathbf{b} = \dot{u} \frac{\mathbf{u}}{u} = \frac{\dot{u}}{u} \mathbf{u}. \quad (16)$$

Веля обозначение  $\frac{\dot{u}}{u} = \lambda$ , получим

$$\dot{\mathbf{u}} = \lambda \mathbf{u}. \quad (17)$$

В этом случае производная коллинеарна самому вектору. И обратно, при выполнении условия (17) вектор всегда имеет постоянно направление.

### в) Вектор, направленный параллельно некоторой плоскости

Если вектор  $\mathbf{u}$ , изменяясь, остаётся параллельным неизменной плоскости, то он перпендикулярен нормальному вектору этой плоскости  $\mathbf{N}$ . Это условие перпендикулярности записывается в виде равенства нулю скалярного произведения

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (18)$$

Продифференцируем это равенство, имея в виду, что  $\mathbf{N}$  - это постоянный вектор. Тогда

$$\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0; \quad \mathbf{N} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt} = 0. \quad (19)$$

В силу этих условий вектор  $\mathbf{u}$  и его две производные перпендикулярны одному направлению, оставаясь параллельными одной плоскости. Условие их компланарности можно записать в виде равенства нулю их смешанного произведения

$$\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0. \quad (20)$$

Можно доказать достаточность условия (20) для того, чтобы вектор  $\mathbf{u}$ , изменяясь, оставался параллельным одной и той же плоскости.

Следствие 3. Для того, чтобы вектор, изменяясь, оставался параллельным неизменной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы он был компланарен своей первой и второй производной.

### г) Интеграл от векторной функции

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{u}(t) dt,$$

если

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{u}(t).$$

Неопределённым интегралом от векторной функции  $\mathbf{u}(t)$  называется функция

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{u}(t) dt + \mathbf{c}. \quad (21)$$

Как и в анализе, эта функция определяется с точностью до постоянного слагаемого  $\mathbf{c}$ .

**Определение 6.** Определённым интегралом называется следующий постоянный вектор

$$\int_a^b \mathbf{u}(t) dt = \mathbf{v}(b) - \mathbf{v}(a). \quad (22)$$

Основные свойства интегралов применимы и к интегралам от векторной функции, то есть интеграл суммы векторных функций равен сумме интегралов, и постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

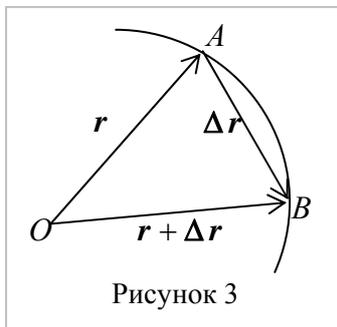
## § 2 Кривая линия на плоскости

**Определение 7.** Прямая называется **касательной к кривой** в данной её точке, если она является предельным положением секущей, проходящую через данную точку в другую точку кривой, неограниченно приближающуюся к данной.

Пусть кривая задана параметрически

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (23)$$

Если взять отношение приращения радиуса  $\Delta \mathbf{r}$  (рисунок 3) к приращению его параметра  $\Delta t$ , то получается вектор  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ , направленный по секущей  $AB$ . Если точка  $B$  неограниченно приближается к точке  $A$ , то секущая  $AB$  вращается вокруг точки  $A$ , стремясь занять положение касательной. Вместе с тем отношение  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  стремится к производной  $\dot{\mathbf{r}}$  как к своему



пределу (рисунок 3). Отсюда следует, что производная от радиуса-вектора точки кривой по параметру  $t$  есть вектор, направленный по касательной к этой кривой.

Для того, чтобы получить уравнение касательной прямой, введём обозначение  $\mathbf{q}$  - радиуса – вектора этой прямой (рисунок 4)

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + t\dot{\mathbf{r}}. \quad (24)$$

Выразив вектор через его координаты

$$\mathbf{q} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

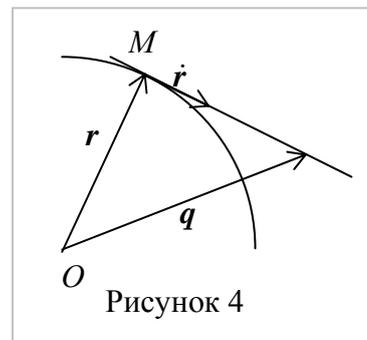
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k},$$

где

$$\xi = x + \dot{x}t,$$

$$\eta = y + \dot{y}t,$$

$$\zeta = z + \dot{z}t. \quad (25)$$



и исключив  $t$ , получим каноническое уравнение касательной

$$\frac{\xi - x}{\dot{x}} = \frac{\eta - y}{\dot{y}} = \frac{\zeta - z}{\dot{z}}. \quad (26)$$

### Параметрическое и неявное уравнения плоской кривой

Пусть задано векторное уравнение плоской кривой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Его можно записать в **параметрическом** виде

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (27)$$

Исключая параметр из уравнения  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  кривой, расположенной в плоскости  $Oxy$ , можно прийти к соотношению вида

$$F(x, y) = 0, \quad (28)$$

которое называется **неявным** уравнением кривой.

Подставляя  $x$  и  $y$  выражения (27) в уравнение (28), получают тождественное равенство, справедливое при любом значении  $t$ ,

$$F\{x(t), y(t)\} = 0. \quad (29)$$

Это неявное уравнение кривой, выраженное через параметр.

## § 4 Кривая в пространстве и сопровождающий трёхгранник Френе

Пусть задано векторное уравнение кривой  $A_0A$  (рисунок 5)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (30)$$

Для составления сопровождающего трёхгранника Френе вводится понятие **натурального параметра**  $s$ , где  $s$  - длина дуги. Длина дуги  $s$ , имеет начало в точке  $A_0$  и конец в произвольной точке  $A$  и определяется формулой

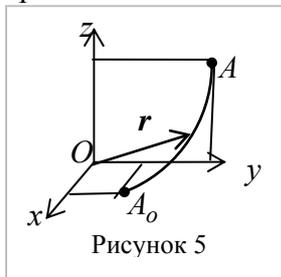


Рисунок 5

$$s = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}| dt \quad (31)$$

Здесь  $t_0, t$  - параметры, соответствующие точкам  $A_0$  и  $A$ .

Производная этой функции равна

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\mathbf{r}}|. \quad (32)$$

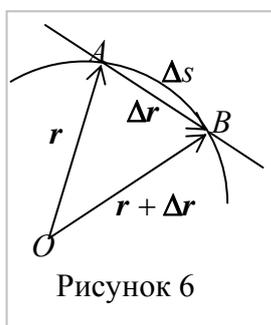


Рисунок 6

Если она положительна во всех **не особых** точках<sup>3</sup> кривой, то эта функция монотонно возрастает при возрастании значения параметра  $t$ . Это позволяет установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие между точками кривой и значениями длины дуги, что даёт возможность вместо  $t$  в качестве натурального параметра принять длину дуги  $s$  (рисунок 6). Производные по натуральному параметру  $s$ , в отличие от производных по  $t$ , обозначают штрихом

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}'; \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \mathbf{r}'''. \quad (33)$$

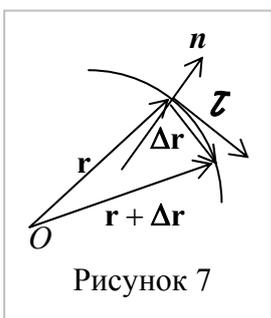


Рисунок 7

С другой стороны,  $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}$  - это касательный вектор ( $\tau$ ).

Докажем, что это единичный вектор касательной к кривой.

Из формулы (32) следует

$$|ds| = |\dot{\mathbf{r}} dt| = |d\mathbf{r}|, \quad (34)$$

тогда

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1 \quad (35)$$

Отсюда получается, что первая производная радиуса - вектора точки кривой по натуральному параметру  $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}$  есть **единичный** вектор, **направленный по касательной** (рисунок 7). Это следует из того, что предел отношений хорды и стягиваемой ею дуги равен единице, если дуга стремится к нулю

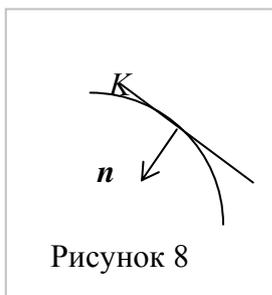


Рисунок 8

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = 1.$$

Всякая прямая, проходящая через точку кривой перпендикулярно касательной в этой точке, является нормалью этой кривой  $\mathbf{n}$  (рисунок 8).

**Определение 8.** **Нормалью**  $\mathbf{n}$  плоской кривой называют прямую, расположенную в её плоскости, перпендикулярную касательной и проходящую через точку касания (рисунок 8).

Через всякую точку **пространственной кривой** проходит

<sup>3</sup> Точка кривой называется особой, если в ней нет производной (например, точкалома).

бесконечное множество нормалей, которые все расположены в одной плоскости  $S$ . Эта плоскость называется **нормальной плоскостью** кривой (рисунок 9).

Вторая производная от радиуса – вектора кривой по натуральному параметру

$$\mathbf{r}'' = \frac{d\mathbf{r}'}{ds} \quad (36)$$

равна первой производной от единичного вектора  $\mathbf{r}'$ , то есть вектора постоянной длины, и, следовательно, перпендикулярна этому вектору. Но вектор первой производной направлен по касательной. Значит, вектор второй производной по натуральному параметру  $\mathbf{r}''$  направлен по некоторой нормали к кривой.

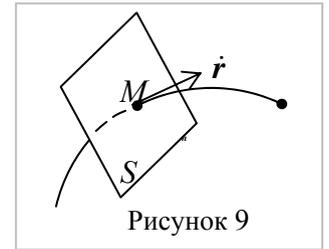


Рисунок 9

**Определение 9.** Нормаль, направленная по второй производной радиуса – вектора  $\mathbf{r}''$  по натуральному параметру  $s$ , называется **главной нормалью** кривой.

**Определение 10.** Всякая плоскость, проходящая через касательную прямую кривой, называется **касательной плоскостью**.

Через вектор касательной  $\mathbf{r}'$  можно провести бесчисленное множество касательных плоскостей, поэтому выбирается одна, наиболее характерная.

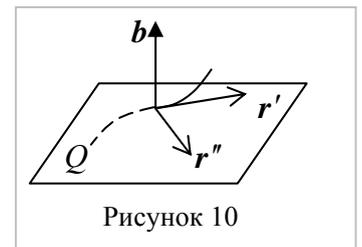


Рисунок 10

**Определение 11.** Касательная плоскость, проходящая через главную нормаль кривой и её касательный вектор, называется **соприкасающейся плоскостью** ( $Q$ ) (Рисунок 10).

Для того, чтобы определить положение соприкасающейся плоскости кривой, параметризованной при помощи произвольного параметра, рассмотрим формулы преобразования производных радиуса – вектора, соответствующие переходу от параметра  $t$  к натуральному параметру  $s$ . Следует помнить, что длина дуги  $s$  является функцией параметра  $t$ . Тогда

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' \dot{s}, \quad (37)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'' \dot{s}^2 + \mathbf{r}' \ddot{s}. \quad (38)$$

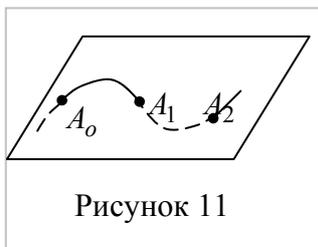


Рисунок 11

Вторая из этих формул показывает, что вектор  $\ddot{\mathbf{r}}$  лежит в той же плоскости, что и векторы  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$ . Но первый из них  $\mathbf{r}'$  направлен по касательной, а второй  $\mathbf{r}''$  - по главной нормали кривой и, значит, оба эти вектора **лежат в соприкасающейся плоскости**. Всё это даёт возможность сделать следующий вывод: **при любой параметризации кривой вектор второй производной её радиуса – вектора расположен в её соприкасающейся плоскости**.

**Замечание 3.** Можно дать другое понятие соприкасающейся плоскости. **Соприкасающейся плоскостью** кривой линии называется предельное положение плоскости, проходящей через три неограниченно сближающиеся точки этой линии (рисунок 11).

**Определение 12.** Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется **бинормалью**.

**Касательная, нормаль и бинормаль** [2] определяют в каждой точке кривой трёхгранник с тремя прямыми углами при вершине, совпадающей с точкой на кривой. Это и есть **трёхгранник Френе**, который называют **сопровождающим, основным или натуральным трёхгранником**.

Гранями основного трёхгранника являются три взаимно перпендикулярные плоскости:

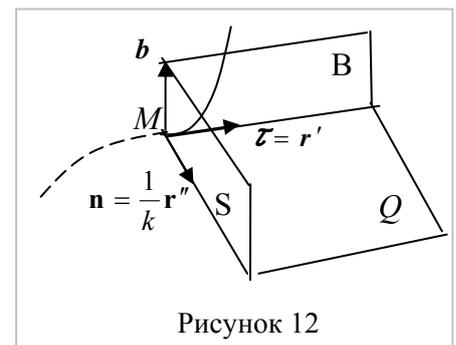


Рисунок 12

1. **Соприкасающаяся плоскость**  $Q$  содержит касательную  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}'$  и главную нормаль  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|} = \frac{1}{k} \mathbf{r}''$ , откуда  $k = |\mathbf{r}''|$ , а  $\mathbf{r}'' = k\mathbf{n}$ .

2. **Нормальная плоскость**  $S$  содержит нормаль  $\mathbf{n}$  и бинормаль  $\mathbf{b} = \mathbf{r}' \times \mathbf{n}$ ,

3. **Спрямяющая плоскость**  $B$  содержит бинормаль  $\mathbf{b} = \mathbf{r}' \times \mathbf{n}$  и касательную  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}'$ .

Направляющий вектор **касательной** равен  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}'$ .

Направляющий вектор **бинормали** равен  $\mathbf{b} = \mathbf{r}' \times \mathbf{n}$  или  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$ .

Направляющий вектор **главной нормали** равен  $\mathbf{n} = \frac{1}{k} \mathbf{r}''$ ,  $k = |\mathbf{r}''|$ , где  $k$  - кривизна кривой в точке  $M$ .

**Трёхгранник Френе** позволяет связать с каждой точкой пространственной кривой прямоугольную систему координат, оси которой совпадают с **касательной**  $\boldsymbol{\tau}$ , **главной нормалью**  $\mathbf{n}$  и **бинормалью**  $\mathbf{b}$  (рисунок 12).

Можно представить, что касательная  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}'$  в точке  $M$  вращается вокруг мгновенного положения бинормали  $\mathbf{b}$  с **угловой скоростью**  $k$ , откуда получается, что  $k$  определяет кривизну кривой. Бинормаль  $\mathbf{b}$  вращается вокруг мгновенного положения касательной с **угловой скоростью**  $\tau$ , откуда  $\tau$  определяет кручение кривой. В соответствии с этим вводится вектор  $\mathbf{Q} = \tau \boldsymbol{\tau} + k \mathbf{b}$ , который называется вектором Дарбу. Он определяет направление оси вращения трёхгранника Френе в точке  $M$ . При этом модуль  $|\mathbf{Q}| = \sqrt{\tau^2 + k^2}$  определяет **пространственную кривизну** кривой в точке  $M$ .

## § 5 Поверхность и её свойства

Уравнение поверхности в неявной форме записывается в виде

$$F(x, y, z) = 0. \quad (39)$$

**Определение 13.** Прямая называется **касательной прямой** поверхности, если она касается какой-либо кривой, принадлежащей этой поверхности.

Чтобы найти условие прикосновения прямой к поверхности, задаётся параметрическое уравнение кривой, расположенная на этой поверхности:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (40)$$

Подстановка координат точек этой кривой в уравнение поверхности (39) даёт тождественное равенство

$$F\{x(t), y(t), z(t)\} = 0,$$

справедливое при любом значении  $t$ . Дифференцирование этого равенства даёт следующее выражение:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 \quad ..(41)$$

или

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} = 0.$$

Левая часть содержит производные от координат точки кривой, равные координатам направляющего вектора касательной  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}$  и частные производные  $F_x, F_y, F_z$  от левой части уравнения поверхности (39), которые зависят только от положения точки, в которой они вычисляются и не зависят от выбора кривой, проходящей через эту точку.

Рассмотрим вектор нормали к поверхности

$$\mathbf{N} = \mathbf{i} F_x + \mathbf{j} F_y + \mathbf{k} F_z \quad .. (42)$$

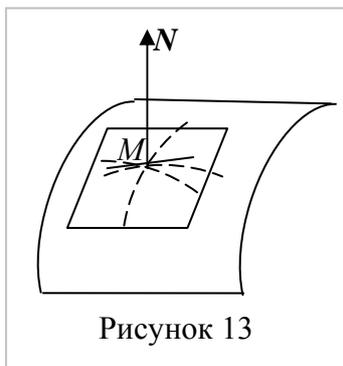


Рисунок 13

Этот вектор зависит от точки, лежащей на поверхности. Таким образом, левая часть (41) может быть представлена в виде скалярного произведения векторов  $N$  и  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , то есть

$$N \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0. \quad (43)$$

**Определение 14. Особыми точками** поверхности называются точки, в которых  $N = 0$ .

Остальные точки называются **обыкновенными**. В обыкновенных точках поверхности равенство (43) представляет собой условие перпендикулярности касательного вектора  $\dot{\mathbf{r}}$  любой кривой, проходящей через эту точку поверхности, и вектора нормали  $N$ , связанного с данной точкой поверхности (рисунок 14).

**Замечание 4.** Через данную точку поверхности можно провести множество кривых, принадлежащих этой поверхности. Касательные к ним все будут **перпендикулярны к нормали в этой точке** (рисунок 13).

**Замечание 5.** Все прямые, касающиеся поверхности в её обыкновенной точке, **лежат в одной плоскости, которая является касательной плоскостью**.

Пусть радиус – вектор произвольной точки **касательной плоскости** обозначен  $\rho$  и равен

$$\rho = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k} \quad (44)$$

Отсюда уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$N \cdot (\rho - \mathbf{r}) = 0 \quad (45)$$

в координатной форме это уравнение имеет вид

$$F_x(\xi - x) + F_y(\eta - y) + F_z(\zeta - z) = 0 \quad (45')$$

Каноническое уравнение прямой, **нормальной к поверхности**, записывается в виде

$$\frac{\xi - x}{F_x} = \frac{\eta - y}{F_y} = \frac{\zeta - z}{F_z} \quad (46)$$

### Нормальное сечение поверхности

**Определение 15.** Среди плоских сечений поверхности, проходящих через её данную точку, **нормальными** называют те плоскости, которые содержат **нормаль к поверхности** в этой точке (рисунок 14). В этой же точке главная нормаль  $\mathbf{n}$

нормального сечения совпадает с единичным вектором нормали  $\mathbf{v}$  поверхности. При этом возможны два случая: 1) вектор  $\mathbf{n}$  главной нормали

кривой и вектор  $\mathbf{v}$  нормали поверхности совпадают или 2) они отличаются знаком. Так как вектор главной нормали  $\mathbf{n}$  всегда указывает в сторону вогнутости плоской кривой, то в первом случае вектор нормали поверхности указывает в сторону вогнутости, а во втором случае - в сторону выпуклости нормального сечения. В первом случае нормальное сечение называют вогнутым, а во втором выпуклым. Однако, это зависит от выбора направления, то есть является относительным.

Абсолютным является различие или совпадение направлений выпуклости или вогнутости для двух различных нормальных сечений, проходящих через данную точку поверхности. Обозначим полную кривизну некоторого нормального сечения в данной точке как

$$k_n = \frac{1}{\rho_n}. \quad (47)$$

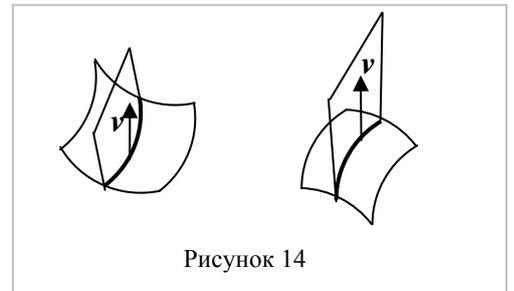


Рисунок 14

Её значение связано с нормальной кривизной сечения поверхности той же нормальной плоскостью формулой, где угол между ними может иметь одно из двух значений 0 или  $\pi$  (рисунок 15). Первый случай вогнутости, а второй – выпуклости.

Отсюда

$$\rho_n = \pm R.$$

Таким образом, **кривизна нормального сечения и нормальная кривизна поверхности, соответствующая направлению этого сечения, совпадают для вогнутых и отличаются только знаком для выпуклых нормальных сечений.**

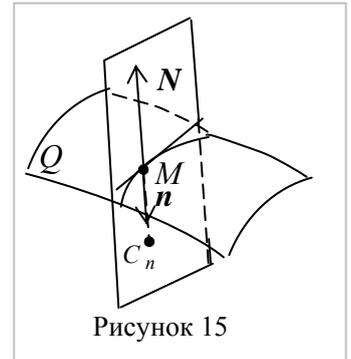


Рисунок 15

## § 6 Кривая на поверхности

Как уже указывалось в определении 15, среди плоских сечений поверхности, проходящих через её данную точку, **нормальными** являются те сечения, плоскость которых содержит нормаль поверхности в этой точке. В этой же точке главная нормаль  $\mathbf{n}$  нормального сечения совпадает с единичным вектором нормали к поверхности  $\mathbf{v} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ .

**Замечание 6. Кривизны линий, расположенных на поверхности, связаны целым рядом соотношений. Для получения этих соотношений следует изучить расположение сопровождающего трёхгранника кривой по отношению к поверхности.**

При этом касательный вектор кривой  $\mathbf{r}'$  всегда расположен в касательной плоскости поверхности, а векторы главной нормали  $\mathbf{r}''$  и бинормали  $\mathbf{b}$  кривой наклонены под некоторыми углами к этой плоскости. Рассмотрим **вектор главной кривизны кривой** (рисунок 16)

$$\mathbf{r}'' = k \mathbf{n}, \quad (48)$$

расположенной на поверхности. Здесь вектор  $\mathbf{n}$  - единичный вектор главной нормали кривой, который равен

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|}.$$

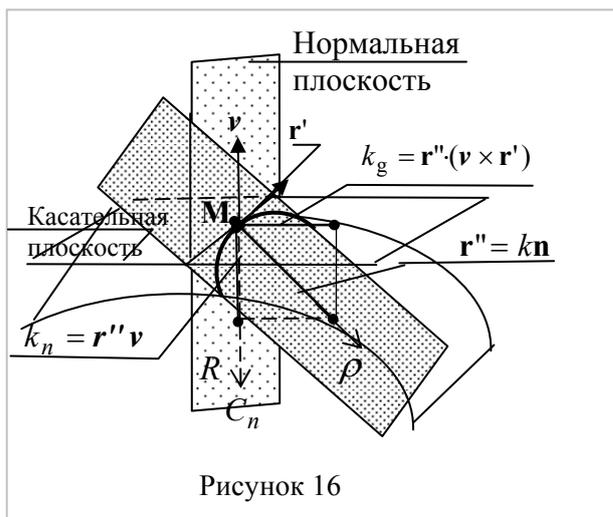


Рисунок 16

**Определение 16. Нормальной кривизной** кривой на поверхности  $k_n$  называется проекция вектора кривизны кривой  $\mathbf{r}'' = k \mathbf{n}$  на нормаль  $\mathbf{v}$  поверхности в точке, через которую проходит эта кривая.

$$k_n = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{v} = (k \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}.$$

**Определение 17.** Величина, обратная нормальной кривизне  $k_n$ , называется

**радиусом нормальной кривизны**  $\rho_n = \frac{1}{k_n}$ ,

причём радиус **полной кривизны** кривой равен  $\rho = \frac{1}{k}$ .

Нормаль поверхности считается ориентированной, если заранее выбран **единичный вектор нормали**  $\mathbf{v} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ . Так как нормаль считается ориентированной, то проекция  $\mathbf{r}''$  на неё  $\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{v} = n \rho_n \mathbf{r}''$  может быть положительной или отрицательной, так что радиус нормальной кривизны  $\rho_n = 1/k_n$  выражается относительным числом для кривой, рассматриваемой независимо от поверхности.

Таким образом, **нормальная кривизна** равна

$$k_n = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{v} = np_{\mathbf{v}} \mathbf{r}'' . \quad (49)$$

### Полная, нормальная и геодезическая кривизна кривой на поверхности

В каждой точке регулярной кривой  $C^4$  (кривая выделена на рис. 16 жирной линией)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) ,$$

лежащей на поверхности  $S$  , вектор полной кривизны равен  $\mathbf{r}'' = k \mathbf{n}$  и может быть единственным образом представлен в виде суммы двух векторов, один из которых (вектор **геодезической** или **тангенциальной кривизны**) лежит в касательной плоскости, а другой (вектор **нормальной кривизны**) направлен вдоль нормали к поверхности, то есть,

$$\mathbf{r}'' = k \mathbf{n} = k_g (\mathbf{v} \times \mathbf{r}') + k_n \mathbf{v} , \quad (50)$$

где  $\mathbf{v}$  - единичный вектор нормали **к поверхности**,  $\mathbf{n}$  - главная нормаль кривой, а  $|\mathbf{r}'| = 1$ , так как производная берётся по натуральному параметру (см. формулу (35)). В каждой точке  $M$  величина  $k_g$  - геодезическая кривизна кривой  $C$  в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(M)$  равна

$$k_g = \mathbf{r}'' \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}') .$$

Это равенство получается, если равенство (50) умножить скалярно на  $(\mathbf{v} \times \mathbf{r}')$  . Тогда смешанное произведение  $(\mathbf{v} \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v} = 0$  и  $\mathbf{r}'' \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}') = k_g$  - **геодезическая кривизна кривой  $C$  в точке  $M$**  .

Отсюда геодезическая кривизна является проекцией кривизны кривой  $C$  на касательную плоскость

$$k_g = |np_{\text{кас}} \mathbf{r}''| . \quad (51)$$

Нормальная кривизна равна

$$k_n = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{v} , \quad (52)$$

$k_n$  - это кривизна кривой  $C$  в точке  $[u(s), v(s)]$  . Она является кривизной нормального сечения<sup>5</sup>, плоскость которого проходит через касательную к кривой  $C$ ..

**Определение 18.** Геодезической кривизной линии на поверхности в точке  $M$  называется **модуль проекции вектора кривизны этой линии на плоскость, касающуюся поверхности в этой точке** (на рисунках 17 и 18 это проекция равна  $MC_n$ ).

О нормальной кривизне существует теорема, доказанная Менье.

**Теорема Менье:** центр кривизны наклонного сечения поверхности совпадает с проекцией на его плоскость центра кривизны нормального сечения, имеющего ту же касательную, что и данное наклонное сечение (рисунок 17).

Эту теорему можно записать так: кривизна  $k$  кривой, лежащей на поверхности, равна кривизне нормального сечения, плоскость которого проходит через касательную к кривой в данной её точке, делённой на косинус угла  $\theta$  между соприкасающейся плоскостью кривой в этой точке и плоскостью нормального сечения, то есть,

$$k = \left| \frac{k_n}{\cos \theta} \right| . \quad (53)$$

Это выражение определяет кривизну **любого наклонного сечения** через кривизну **нормального сечения, имеющую с наклонным сечением общую касательную**.

<sup>4</sup> регулярной называют кривую, в каждой точке которой существуют производные.

<sup>5</sup> Нормальное сечение - это сечение поверхности плоскостью, содержащей нормаль к поверхности.

Рассмотрим кривизну

$$k = \frac{1}{\rho}$$

кривой, которая является её **полной кривизной** и отличается от **нормальной кривизны**  $k_n$ .

Зависимость между **полной** и **нормальной** кривизной получают, вводя угол между нормальным вектором поверхности и вектором главной нормали кривой (рисунок 17)

$$\theta = \widehat{nv}, \quad (54)$$

где  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$  - единичный вектор нормали поверхности в

выбранной точке. Нормальная кривизна определяется по формуле  $k_n = \mathbf{r}'' \mathbf{v}$ , при этом  $\mathbf{r}'' = k \mathbf{n}$ . Отсюда  $\mathbf{r}'' \mathbf{v} = k n \mathbf{v}$ , но  $n \mathbf{v} = \cos \theta$ , так как  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{n}$  - единичные векторы. С

учётом того, что  $k = \frac{1}{\rho}$ , получаем  $k_n = \frac{1}{R} = k \cdot \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\rho}$ ,  $\frac{1}{R} = \frac{\cos \theta}{\rho}$  откуда

$$\rho = R \cos \theta. \quad (55)$$

Таким образом, полная кривизна зависит от нормальной кривизны и угла  $\frac{\pi}{2} - \theta$ , который совпадает с углом между касательной плоскостью поверхности и соприкасающейся плоскостью кривой.

Обратно, если соприкасающаяся плоскость кривой на поверхности в данной её точке задана, то она определяет своим пересечением с касательной плоскостью поверхности и касательную прямую данной кривой. Но, зная направление касательной прямой, можно найти нормальную кривизну, и так как угол  $\theta$  тоже известен, то полная кривизна сечения определяется. Полученный результат позволяет свести рассмотрение кривых линий, принадлежащих поверхности, к рассмотрению кривизны её плоских сечений.

Для изучения связи кривизны кривой, принадлежащей поверхности, с характеристиками поверхности рассматриваются **первая и вторая квадратичные формы** поверхности.

### Первая квадратичная форма

Для изучения свойств кривых, всеми точками лежащих на поверхности, на ней наносится сетка, как показано на рисунке 18, проекция которой на координатную плоскость  $(u, v)$  представляет собой совокупность пересекающихся прямых.

Вычислим длину дуги линии, расположенной на поверхности. Для этого используется **внутреннее** параметрическое уравнение кривой

$$u = u(t), v = v(t),$$

от которого зависит радиус-вектор каждой точки

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[u(t), v(t)].$$

Запишем квадрат дифференциала длины дуги. Учитывая, что дифференциал длины дуги  $ds$  и модуль дифференциала радиуса вектора  $|d\mathbf{r}|$  равны между собой, можно записать равенство их квадратов

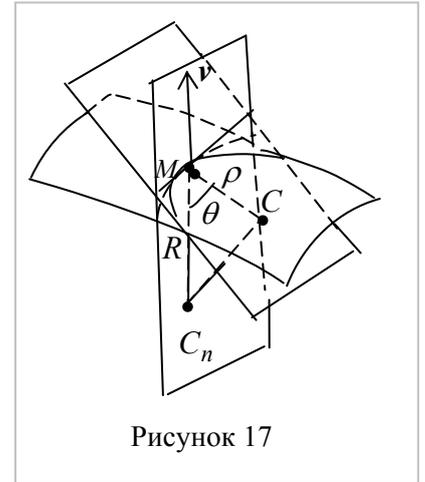


Рисунок 17

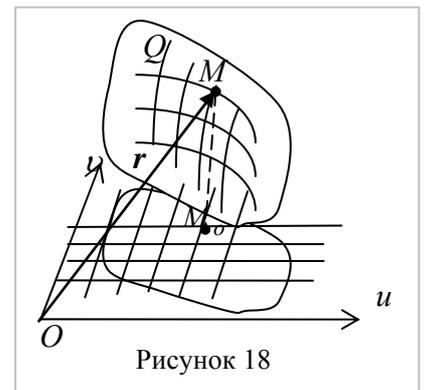


Рисунок 18

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2, \quad (56)$$

где дифференциал радиуса - вектора имеет вид

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv,$$

где  $\mathbf{r}_u = \frac{d\mathbf{r}}{du}$ ,  $\mathbf{r}_v = \frac{d\mathbf{r}}{dv}$ .

Отсюда

$$ds^2 = \mathbf{r}_u^2 du^2 + 2\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v dudv + \mathbf{r}_v^2 dv^2.$$

Для получения первой квадратичной формы вводятся обозначения

$$\mathbf{r}_u^2 = E; \quad \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = F; \quad \mathbf{r}_v^2 = G, \quad (57)$$

тогда получается

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (58)$$

**Замечание 7.** Это выражение квадрата дифференциала длины дуги или первой квадратичной формы играет основную роль во всей теории поверхностей.

Правая часть (58) и представляет первую квадратичную форму

$$\varphi_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (59)$$

с коэффициентами, являющимися функциями точки поверхности и с переменными  $du$  и  $dv$  - дифференциалами криволинейных координат, которые зависят от направления кривой, проходящей через данную точку.

Действительно, если первая квадратичная форма задана, то есть, заданы её коэффициенты  $E, F, G$  в функции от  $u$  и  $v$ , а также известно внутреннее уравнение кривой  $u = u(t), v = v(t)$ , то её дугу можно вычислить даже в том случае, когда параметрическое уравнение самой поверхности не известно.

Коэффициенты линейного элемента удовлетворяют ряду неравенств. Из равенства

$$E = \mathbf{r}_u^2; \quad G = \mathbf{r}_v^2$$

следует, что для всякой неособенной точки поверхности

$$E > 0; \quad G > 0. \quad (60)$$

Применяя тождество Лагранжа, получим, что квадрат векторного произведения  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$

$$[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]^2 = \mathbf{r}_u^2 \mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v)^2 = EG - F^2. \quad (*)$$

Выражение  $EG - F^2$  называется **дискриминантом линейного элемента**.  $[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]^2$  - это квадрат модуля векторного произведения, поэтому он всегда положителен. Отсюда следует, что

$$EG - F^2 > 0. \quad (61)$$

Следовательно, во всякой неособенной точке  $\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \neq 0$ .

Неравенства (60) и (61) соответствуют тому факту, что первая квадратичная форма положительна и не может обратиться в нуль при переменных  $du$  и  $dv$ , не равных нулю одновременно.

**Замечание 8.** Квадратичные формы, обладающие этим свойством, называются **положительно определёнными**.

Следует заметить, что по смыслу первая квадратичная форма является квадратом дифференциала длины дуги, поэтому она всегда положительна, потому что длина не может быть отрицательной. Весь приведенный выше анализ необходим для проверки свойств введённых обозначений  $E, F, G$ , для которых понятно, что  $E$  и  $G$  обязательно положительны в силу того, что они обозначают квадраты длин, а вот относительно  $F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v$  это не очевидно, поэтому потребовалось доказательство.

## Вторая квадратичная форма

Для вычисления нормальной кривизны  $k_n = \mathbf{r}'' \mathbf{v}$  дифференцируется выражение

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}_u u' + \mathbf{r}_v v' \quad (62)$$

единичного касательного вектора кривой, расположенной на поверхности. Пользуясь правилами дифференцирования сложной функции и вводя обозначения

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{du^2} = \mathbf{r}_{uu}; \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{du dv} = \mathbf{r}_{uv}; \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dv^2} = \mathbf{r}_{vv}. \quad (63)$$

получают

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r}_u u'' + \mathbf{r}_v v'' + \mathbf{r}_{uu} u'^2 + 2\mathbf{r}_{uv} u'v' + \mathbf{r}_{vv} v'^2.$$

Чтобы найти проекции вектора кривизны кривой на поверхности на нормаль, достаточно умножить  $\mathbf{r}''$  скалярно на единичный вектор нормали  $\mathbf{v}$  поверхности в выбранной точке, где  $\mathbf{v} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$  - единичный вектор нормали к поверхности. При этом следует принять во внимание, что векторы  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$  расположены в касательной плоскости и, следовательно, перпендикулярны  $\mathbf{v}$ , а из этого следует, что  $\mathbf{r}_u \mathbf{v} = 0$ ,  $\mathbf{r}_v \mathbf{v} = 0$ . Таким образом, нормальная кривизна, равная  $k_n = \mathbf{r}'' \mathbf{v}$ , записывается так:

$$k_n = \mathbf{r}'' \mathbf{v} = \mathbf{v} \mathbf{r}_{uu} u'^2 + 2\mathbf{v} \mathbf{r}_{uv} u'v' + \mathbf{v} \mathbf{r}_{vv} v'^2.$$

Скалярное произведение единичного вектора нормали  $\mathbf{v}$  и вторых частных производных радиуса – вектора точки поверхности являются функциями координат точки. Для них вводятся особые обозначения, полагая

$$D = \mathbf{v} \mathbf{r}_{uu}; \quad D' = \mathbf{v} \mathbf{r}_{uv}; \quad D'' = \mathbf{v} \mathbf{r}_{vv}. \quad (64)$$

После этого нормальная кривизна примет вид

$$k_n = D u'^2 + 2D' u'v' + D'' v'^2. \quad (65)$$

Выражение

$$\varphi_2 = D d u^2 + 2D' dudv + D'' dv^2 \quad (66)$$

называется **второй квадратичной формой** поверхности.

Если учесть, что  $u' ds = du$ ,  $v' ds = dv$ , то справедливо преобразование

$$k_n ds^2 = D u'^2 ds^2 + 2D' u'v' ds^2 + D'' v'^2 ds^2 = D du^2 + 2D' dudv + D'' dv^2,$$

тогда можно написать, что нормальная кривизна равна

$$k_n = \frac{D d u^2 + 2D' dudv + D'' dv^2}{ds^2},$$

а

$$ds^2 = \varphi_1 = E d u^2 + 2F dudv + G dv^2.$$

Отсюда нормальная кривизна  $k_n$  может быть выражена через первую и вторую квадратичные формы в виде:

$$k_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{D d u^2 + 2D' dudv + D'' dv^2}{E d u^2 + 2F dudv + G dv^2}, \quad (67)$$

то есть, она равна отношению второй и первой квадратичной форм. Таким образом, отношение дифференциалов криволинейных координат, соответствующих направлению кривой, проходящей через ту точку поверхности, для которой подсчитаны коэффициенты обеих форм, даёт нормальную кривизну кривой на поверхности.

Из равенства (\*)  $[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]^2 = EG - F^2$  можно записать, что  $\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = \sqrt{EG - F^2}$ . Тогда единичный вектор нормали поверхности выражается так:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (68)$$

а  $D, D', D''$  равны

$$D = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad D' = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad D'' = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (69)$$

Для величин  $D, D', D''$  можно получить другие выражения, проясняющие смысл коэффициента нормальной кривизны  $k_n$ . Эти выражения легко получаются при дифференцировании тождеств

$$\mathbf{r}_u \mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{r}_v \mathbf{v} = 0,$$

которое даёт

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} \mathbf{v} + \mathbf{r}_{uu} \mathbf{v} &= 0; & \mathbf{r}_u \mathbf{v}_v + \mathbf{r}_{uv} \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{r}_v \mathbf{v}_u + \mathbf{r}_{vu} \mathbf{v} &= 0; & \mathbf{r}_v \mathbf{v}_v + \mathbf{r}_{vv} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} \mathbf{v} &= -\mathbf{r}_u \mathbf{v}_u; & \mathbf{r}_{uv} \mathbf{v} &= -\mathbf{r}_u \mathbf{v}_v, \\ \mathbf{r}_{vu} \mathbf{v} &= -\mathbf{r}_v \mathbf{v}_u; & \mathbf{r}_{vv} \mathbf{v} &= -\mathbf{r}_v \mathbf{v}_v, \end{aligned}$$

что и приводит к выражению

$$D = -\mathbf{v}_u \mathbf{r}_u; \quad D' = -\mathbf{v}_u \mathbf{r}_v = -\mathbf{v}_v \mathbf{r}_u; \quad D'' = -\mathbf{v}_v \mathbf{r}_v. \quad (70)$$

Подставляя (64) в (60), получаем новое выражение второй квадратичной формы

$$\varphi_2 = -\mathbf{v}_u du \cdot \mathbf{r}_u du - \mathbf{v}_u du \cdot \mathbf{r}_v dv - \mathbf{v}_v dv \cdot \mathbf{r}_u du - \mathbf{v}_v dv \cdot \mathbf{r}_v dv.$$

После перегруппировки получается

$$\varphi_2 = (\mathbf{v}_u du + \mathbf{v}_v dv) \cdot [-(\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)] = -d\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

то есть, выражение для второй квадратичной формы имеет вид

$$\varphi_2 = -d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{v}. \quad (71)$$

Подставляя (65) и (58) в формулу (67), получаем

$$k_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{D du^2 + 2D' dudv + D'' dv^2}{ds^2},$$

и далее

$$k_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{-d\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{dr^2} = -\frac{d\mathbf{v}}{dr}. \quad (72)$$

Формула (71) и полученное из неё выражение

$k_n = -\frac{d\mathbf{v}}{dr}$  показывает, что **нормальная кривизна** линии,

проходящей через данную точку поверхности, **зависит от направления нормали к поверхности и её касательной.**

Отсюда нормальная кривизна  $k_n$  отражает отношение дифференциала единичного вектора нормали к поверхности в выбранной точке к дифференциалу радиуса – вектора точки.

Учитывая, что  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$ , а  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ , легко видеть, что нормальная кривизна  $k_n$  зависит от  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$ , то есть только от направления касательной плоскости к поверхности в данной точке.

Отсюда учитывая, что **нормальной кривизной кривой**  $k_n$  на поверхности называется проекция вектора кривизны кривой линии  $\mathbf{r}'' = k \mathbf{n}$  на нормаль  $\mathbf{v}$  поверхности в точке, через которую проходит эта кривая, то есть,  $k_n = \mathbf{r}'' \mathbf{v}$ . Отсюда легко понять следующее утверждение: так как  $\mathbf{r}'' = d\mathbf{r}'/ds$  есть производная от вектора касательной, то

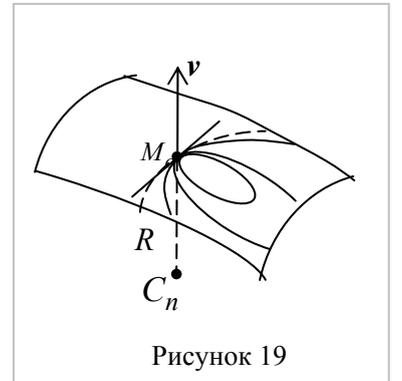


Рисунок 19

все кривые на поверхности, проходящие через общую точку  $M_o$  поверхности и имеющую в ней общую касательную, имеют один и тот же нормальный вектор кривизны кривой  $k_n$ .

Таким образом, можно утверждать, что **все кривые поверхности, проходящие через выбранную на этой поверхности точку и имеющие в ней общую касательную, имеют в этой точке равную нормальную кривизну  $k_n$**  (рисунок 19).

Все эти кривые получаются как пересечение наклонных плоскостей, проходящих через общую прямую, касающуюся поверхности в точке  $M_o$ .

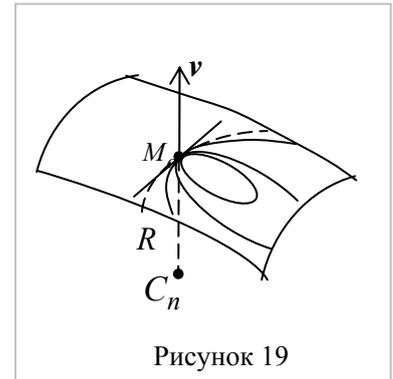


Рисунок 19

### Индикатриса Дюпена

Изучение кривизны всех линий на поверхности сводится к рассмотрению плоских сечений. Кроме того, известно, что кривизна произвольного сечения связана с кривизной нормального сечения. Таким образом, вопрос о кривизне линий на поверхности сводится к рассмотрению кривизны нормальных сечений.

Через данную точку поверхности можно провести бесчисленное множество нормальных сечений. Для того, чтобы проследить изменение кривизны от одного сечения к другому, строят график следующим образом: на касательной к каждому нормальному сечению откладывают отрезок, длина которого равна квадратному корню из радиуса кривизны этого сечения (рисунок 20).

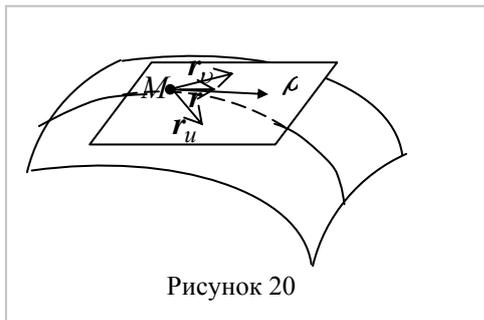


Рисунок 20

**Определение 19.** Геометрическое место концов отрезков, направленных по касательной каждого нормального сечения и равных корню квадратному радиуса кривизны соответствующего сечения, называется **индикатрисой Дюпена**.

Для вывода уравнения индикатрисы начало координат совмещают с точкой  $M$ , а за масштабные векторы принимают координатные векторы  $r_u$  и  $r_v$ , вычисленные для данной точки. Оси координатной системы обозначают  $\xi$  и  $\eta$ . Тогда радиус – вектор текущей точки индикатрисы равен

$$\rho = \xi r_u + \eta r_v.$$

С другой стороны, этот радиус равен

$$\rho = \sqrt{\rho_n} \frac{dr}{ds},$$

где  $\frac{dr}{ds}$  - единичный вектор касательной некоторого нормального сечения, а  $\rho_n$  – радиус его кривизны в точке  $M$ . Но единичный вектор касательной может быть получен дифференцированием радиуса – вектора точки нормального сечения по его натуральному параметру, так что

$$\frac{dr}{ds} = r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds}. \quad (73)$$

Сравнивая оба выражения  $\rho$ , будем иметь

$$\xi = \sqrt{\rho_n} \frac{du}{ds}; \quad \eta = \sqrt{\rho_n} \frac{dv}{ds}.$$

Рассмотрим теперь выражение для нормальной кривизны  $k_n = 1/R$ .

$$\frac{1}{R} = D \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2D' \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + D'' \left( \frac{dv}{ds} \right)^2. \quad (74)$$

Умножив обе его части на радиус кривизны соответствующего нормального сечения, получают

$$\frac{\rho_n}{R} = D \left( \sqrt{\rho_n} \frac{du}{ds} \right)^2 + 2D' \left( \sqrt{\rho_n} \frac{du}{ds} \right) \left( \sqrt{\rho_n} \frac{dv}{ds} \right) + D'' \left( \sqrt{\rho_n} \frac{dv}{ds} \right)^2.$$

Так как  $\rho_n$  и  $R$  отличаются самое большее знаком, то полученное соотношение можно написать так:

$$D \xi^2 + 2D' \xi \eta + D'' \eta^2 = \pm 1.$$

Знак плюс в правой части отвечает случаю вогнутого, а знак минус случаю выпуклого нормального сечения.

Это есть уравнение второго порядка, так как коэффициенты  $D, D', D''$  не зависят от направление сечения, то есть, для данной точки постоянны. Это уравнение не содержит первых степеней координат  $\xi$  и  $\eta$ .

Таким образом, индикатриса Дюпена есть **центральная кривая второго порядка**, центр которой совпадает с рассматриваемой точкой поверхности, так как отсутствие первых степеней в уравнении кривой второго порядка указывает на совпадение центра с началом координат.

### Характеристика точек поверхности

Составим дискриминант из коэффициентов второй квадратичной формы

$$\delta = DD'' - D'^2.$$

Так как величина  $\delta$  является дискриминантом старших членов уравнения индикатрисы Дюпена, то её знак решает вопрос о типе точки поверхности.

Знак  $\delta$  совпадает со знаком полной кривизны, которая равна

$$K = \frac{\delta}{EG - F^2},$$

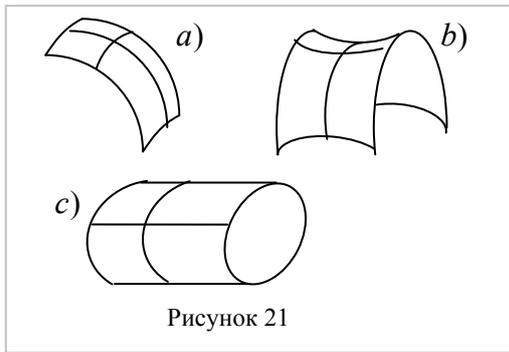


Рисунок 21

а дискриминант первой квадратичной формы всегда положительный.

Отсюда: точка будет **эллиптической** *a*), если полная кривизна **положительна**, **гиперболической** *b*), если полная кривизна **отрицательна**, и **параболической** *c*), если полная кривизна **равна нулю** (рисунок 21).

**Определение 20.** Точки поверхности, в которых кривизна  $k_n$  имеет одно и то же значение для всех нормальных сечений, называется **омбилической** (например, точка на сфере).

В каждой **неомбилической** точке  $(u, v)$  существуют два нормальных сечения (главные нормальные сечения), которым соответствуют **наибольшая величина**  $k_1$  и **наименьшая величина**  $k_2$  кривизны (главные кривизны поверхности в точке  $(u, v)$ ). Плоскости главных нормальных сечений взаимно перпендикулярны; для любого нормального сечения в точке  $(u, v)$ , плоскость которого образует угол  $\theta$  с плоскостью первого главного нормального сечения

$$k_n = k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta \quad (\text{теорема Эйлера}).$$

Величины  $k_1$  и  $k_2$  являются корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} D - kE & D' - kF \\ D' - kF & D'' - kG \end{vmatrix} = 0.$$

**Определение 21.** Симметрические функции

$$H(u, v) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad \text{и} \quad K(u, v) = k_1 k_2$$

называются соответственно **средней** и **гауссовой** кривизной поверхности в точке  $(u, v)$ . Их выражение через коэффициенты основных квадратичных форм имеет вид

$$H(u, v) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \frac{ED'' - 2FD' + GD}{EG - F^2} \quad - \text{(средняя кривизна)}, \quad (75)$$

$$K(u, v) = k_1 k_2 = \frac{D''D - D'^2}{EG - F^2} \quad - \text{(гауссова кривизна)}. \quad (76)$$

**Замечание 1.** Значения  $k_1, k_2, H(u, v)$  и  $K(u, v)$  **не зависят** от выбора системы координат.

**Теорема Гаусса:** Гауссова кривизна не изменяется при изгибании поверхности.

**Замечание 2.** Это свойство поверхности используется далее для построения развёртки.

### Огибающая семейства поверхностей

**Определение 22.** Если существует поверхность, касающаяся в каждой своей точке некоторой поверхности данного семейства

$$F(x, y, z, c) = 0, \quad (77)$$

то она называется **огibaющей данного семейства** (рисунок 22).

Отсюда каждая точка огibaющей принадлежит некоторой поверхности семейства, а эта поверхность характеризуется значением параметра  $c$ . Отсюда можно сказать, что каждой точке огibaющей соответствует определённое значение  $c$ , так что  $c$  есть функция координат  $x, y, z$  точки огibaющей

$$c = c(x, y, z). \quad (78)$$

Подставляя в это уравнение семейства координаты точки огibaющей и соответствующее ей значение параметра, получим тождественное равенство

$$F(x, y, z, c(x, y, z)) \equiv 0. \quad (79)$$

Для того, чтобы принять во внимание условие прикосновения огibaющей и поверхностей семейства, рассмотрим некоторую кривую

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

расположенную на огibaющей.

Так как координаты точек этой кривой должны удовлетворять уравнению (79), то для них тоже будет иметь место тождественное равенство

$$F(x(t), y(t), z(t), c(t)) \equiv 0.$$

Дифференцирование последнего соотношения приводит к новому тождеству

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial F}{\partial c} \frac{dc}{dt} = 0. \quad (80)$$

Но касательный вектор огibaющей должен быть одновременно и касательным вектором соответствующей поверхности семейства, условием чего является равенство

$$\mathbf{N} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} = 0. \quad (81)$$

Учитывая, что  $\mathbf{N} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$  - это нормаль к поверхности  $F(x, y, z, c) = 0$ , а

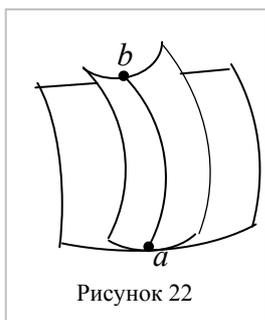


Рисунок 22

$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$  - вектор касательной к кривой, принадлежащей поверхности, то

совершенно очевидно, что  $N$  и  $\frac{dr}{dt}$  взаимно перпендикулярны, и их скалярное произведение равно нулю

$$N \frac{dr}{dt} = 0.$$

Сравнение (80) и (81) приводит к соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial c} \frac{dc}{dt} = 0,$$

справедливому для каждой кривой на огибающей.

Так как эти кривые заведомо можно выбрать так, чтобы они соединяли точки различных поверхностей семейства, то последнее условие должно выполняться и при переменном  $c$ , то есть при  $\frac{dc}{dt} \neq 0$ , а это значит, что

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 0.$$

Отсюда координаты точек огибающей должны удовлетворять двум уравнениям

$$(A): F(x, y, z, c) = 0 \quad \text{и} \quad (B): \frac{\partial F(x, y, z, c)}{\partial c} = 0. \quad (82)$$

Исключая параметр  $c$  из этих уравнений, можно получить соотношение вида

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad (83)$$

которое будет уравнением огибающей поверхности, если она существует.

### Характеристика семейства поверхностей

Значение параметра  $c$  изменяется при перемещении точки по огибающей. Однако, можно искать на огибающей такие особые геометрические места, в точках которых параметр семейства сохраняет постоянное значение.

При таком условии уравнения (A) и (B) в (82) выражают две поверхности, а место общих точек этих поверхностей есть, вообще говоря, некоторая кривая, принадлежащая огибающей, причём всем точкам этой кривой соответствует одно и то же значение параметра  $c$ . Эти кривые называются **характеристикой семейства**.

Так как все точки характеристики принадлежат в силу уравнения (A) также некоторой поверхности семейства, то можно дать такое определение:

**Определение 23. Характеристика** есть линия  $ab$ , вдоль которой огибающая касается некоторой фиксированной поверхности семейства (см. рисунок 20).

Чтобы понять внутренние свойства **характеристик** рассмотрим две поверхности семейства, соответствующие двум достаточно близким значениям параметра  $c$  и  $c + \Delta c$ , которые пересекаются по некоторой линии. Координаты точек этой линии, очевидно, удовлетворяют уравнениям

$$F(x, y, z, c) = 0 \quad (84)$$

и

$$F(x, y, z, c + \Delta c) = 0. \quad (85)$$

Пользуясь теоремой Лагранжа, можно получить третье уравнение в виде

$$F_c(x, y, z, c_1) = 0, \quad (86)$$

где  $c_1$  находится между двумя данными. Этому уравнению также удовлетворяют координаты точек рассматриваемой кривой.

Если  $\Delta c \rightarrow 0$ , то значения параметра  $c$  неограниченно сближаются. В таком случае

уравнение (86) перейдет в формулу

$$F_c(x, y, z, c) = 0 \quad (87)$$

и вместе с уравнением (А) определит предельное положение рассматриваемой линии.

**Заключение 1. Предельное** положение линии пересечения двух поверхностей семейства, соответствующих двум бесконечно близким значениям параметра  $c$ , **совпадает с его характеристикой.**

### Ребро возврата

Характеристики образуют на огибающей поверхности семейство линий, зависящее от одного параметра.

**Определение 24.** Если это семейство линий имеет огибающую, то она называется **ребром возврата** данного семейства поверхностей.

Предположим, что рассматриваемое семейство поверхностей имеет ребро возврата, выражающееся уравнением

$$r = r(t).$$

Подставляя выражение координат точки этой кривой в уравнение (84), мы обратим их в тождество, так как по определению ребро возврата принадлежит огибающей.

Дифференцируя условие (80), найдём

$$\frac{\partial^2 F}{\partial c \partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial c \partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial c \partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} \frac{dc}{dt} = 0. \quad (88)$$

Но касательный вектор ребра возврата должен совпадать в каждой его точке с касательным вектором соответствующей характеристике и должен поэтому быть перпендикулярен к нормальному вектору всякой поверхности выражается уравнением

$$F_c(x, y, z, c) = 0.$$

и её нормальный вектор  $N_c$ , имеет координаты

$$F_{cx}, F_{cy}, F_{cz}.$$

Приняв во внимание условие перпендикулярности

$$N \cdot \frac{dr}{dt} = 0 \quad (89)$$

и заметив, что значение параметра  $c$  меняется при движении по ребру возврата, получим из соотношения (88)

$$F_{cc} = 0.$$

Таким образом, координаты точки ребра возврата должны удовлетворять уравнениям

$$F(x, y, z, c) = 0, \quad F_c(x, y, z, c) = 0, \quad F_{cc}(x, y, z, c) = 0. \quad (90)$$

Разрешая эти уравнения относительно  $x, y, z$ , мы можем определить их в функции параметра  $c$  и получить, таким образом, параметрические уравнения ребра возврата  $r = r(c)$ , если оно существует.

Таблица 1. Основные понятия кривизны кривой в пространстве и на поверхности

№	Наименование кривизны	Формула	Чертёж
1	Кривизна плоской кривой $k = \left  \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right $ $\vec{\tau}$ - вектор касательной	$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left  \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right $ $\Delta\varphi$ - угол поворота касательной $\Delta s$ - длина дуги АВ	
2	Касательная вращается вокруг мгновенного положения бинормали с <b>угловой скоростью</b> $k$ - это кривизна кривой	$k = \left  \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{ds} \right $ $k = \frac{1}{\rho}$ $\dot{\mathbf{r}}$ - вектор касательной	
3	Бинормаль вращается вокруг мгновенного положения касательной с <b>угловой скоростью</b> $\tau$ - это кручение кривой	Формулы Френе – Серре $\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$ $\mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$ $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$	$\mathbf{b} = \mathbf{r}' \times \mathbf{n}$ - ед. вектор бинормали $\mathbf{t} = \mathbf{r}'$ - ед. вектор касательной $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{ \mathbf{r}'' } = \frac{1}{k}\mathbf{r}''$ , $k =  \mathbf{r}'' $ , $\mathbf{n}$ - ед. вектор нормали
4	Трёхгранник Френе Уравнение соприкасающейся плоскости $Q$ $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{b} = 0$ Уравнение нормальной плоскости $S$ : $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{t} = 0$ Уравнение спрямляющей плоскости $B$ : $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{n} = 0$	$ \mathbf{Q}  = \sqrt{\tau^2 + k^2}$ - полная кривизна кривой в точке $M_o$ $\mathbf{Q} = \tau\mathbf{t} + k\mathbf{b}$ - вектор Дарбу. Он определяет направление оси вращения трёхгранника Френе в точке $M_o$	Трёхгранник Френе 
5	Вектор кривизны кривой $\mathbf{r}''$ раскладывается на два направления: касательное $\mathbf{N} \times \mathbf{r}'$ и нормальное $\mathbf{N}$	$\mathbf{r}'' = k_g(\mathbf{v} \times \mathbf{r}') + k_n\mathbf{v}$	
6	Тангенциальная или геодезическая кривизна	$k_g =  \mathbf{n} \times \mathbf{r}'' $	$k_g = (\mathbf{v} \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}''$
7	Вектор нормальной кривизны $k_n$	$k_n = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{v}$	Этот вектор направлен по нормали $\mathbf{v}$ к поверхности

## ЧАСТЬ 2. Проектирование обводов судов из развёртывающихся поверхностей

### § 1 Развёртывающиеся поверхности

Если семейство поверхностей, по которым строится огибающая поверхность, являются плоскостями, то характеристики являются **прямыми** линиями.

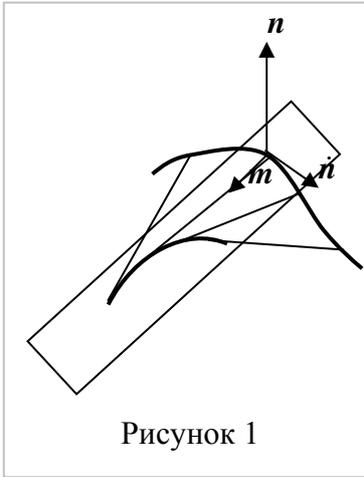


Рисунок 1

**Условие 1.** Если ребро возврата семейства плоскостей совпадает с некоторой пространственной кривой, то все характеристики семейства касаются этой кривой, а поверхность называется поверхностью с **ребром возврата** или **поверхностью касательных**.

**Условие 2.** Если все характеристики семейства плоскостей проходят через одну точку, то все плоскости семейства касаются **конической поверхности**.

**Условие 3.** Если все характеристики семейства параллельны между собой, то огибающая этого семейства есть **цилиндрическая поверхность**.

**Замечание 5.** Все эти поверхности являются **развёртывающимися поверхностями**.

#### Огибающая касательных плоскостей

Рассмотрим семейство плоскостей, касающихся поверхности в точках некоторой линии

$$r = r(t).$$

Это семейство будет однопараметрическим, так как каждая его плоскость определяется значением параметра  $t$ , соответствующего положению точки на кривой.

**Характеристика** семейства проходит через точку прикосновения соответствующей плоскости и поверхности, её единичный направляющий вектор  $m$  определяется из условий

$$m \cdot n = 0; \quad m \dot{n} = 0,$$

где вектор  $n$  - перпендикулярен касательному вектору кривой (рисунок 1).

Характеристика семейства плоскостей, касающихся данной кривой, проходит через точку прикосновения этой кривой, соответствующей плоскости семейства. Кривая, касающаяся каждой плоскости семейства, лежит на огибающей этого семейства.

#### Линии кривизны на поверхности

**Определение 3.** **Линией кривизны** называется такая линия поверхности, вдоль которой нормали последней образуют развёртывающуюся поверхность.

**Замечание 5.** Если повернуть каждую из этих нормалей на прямой угол так, чтобы она осталась нормальной к линии кривизны, то она станет касательной к плоскости. При этом поверхность, составленная из этих касательных, останется развёртывающейся (рисунок 2).

Важны **два факта**: 1) линия кривизны характеризуется тем, что её **нормали** образуют **развёртывающуюся поверхность** и, 2) если нормали некоторой кривой образуют **развёртывающуюся поверхность**, то они образуют такую же поверхность и после поворота на постоянный угол.

Существует теорема: «Если неплоская поверхность образована семейством кривых, вдоль которых касательная плоскость остаётся неизменной, то эта поверхность линейчатая, а упомянутые кривые являются

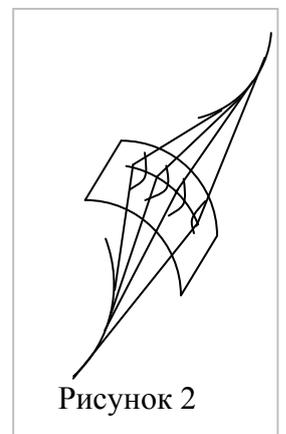


Рисунок 2

прямолинейными образующими»<sup>6</sup>. Отсюда следует вывод, что поверхность с нулевой гауссовой кривизной обязательно линейчатая, а касательная плоскость вдоль каждой прямолинейной образующей остаётся неизменной.

## § 2 Теоретические основы построения корпуса судна с развёртывающейся обшивкой

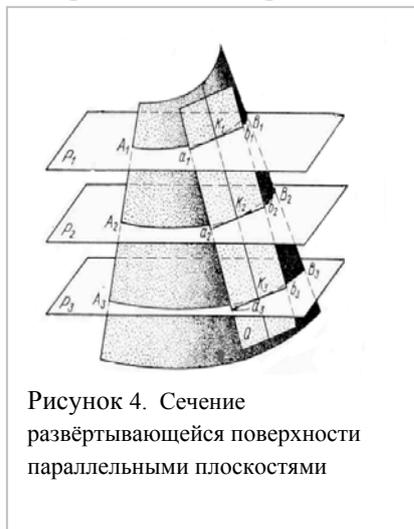


Гаспар Монж (1746 - 1815) был первым, кто описал развёртывающиеся поверхности в его "Application de l'analyse a la géométrie" (1805). Монж дал следующее определение развёртывающихся поверхностей: «развёртывающейся поверхностью называется поверхность, которая обладает тем свойством, что, будучи гибкой и нерастяжимой, она может быть путём изгибания наложена на плоскость всеми точками без складок и разрывов». Он также описал три типа развёртывающихся поверхностей: цилиндрические, конические и поверхности касательных (поверхности с ребром возврата), которые используются по сей день.

Развёртывающиеся поверхности – это поверхности нулевой гауссовой кривизны. Из равенства нулю гауссовой кривизны можно сделать следующие выводы: 1) через каждую точку поверхности проходит прямая, принадлежащая этой поверхности, 2) касательная плоскость, проходящая вдоль каждой прямолинейной образующей поверхности остается неизменной [3].

Для того, чтобы определить, что поверхность является поверхностью нулевой гауссовой кривизны, не требуется искать на чертеже её особые точки вроде вершин конуса или ребра возврата поверхности касательных. В общем случае развёртывающиеся поверхности можно рассматривать как поверхности с произвольным расположением особых точек. Эти поверхности мы назвали **полипараметрическими** поверхностями (рисунок 3). Конические, цилиндрические и поверхности касательных - это частные случаи полипараметрических поверхностей.

Основным свойством полипараметрических поверхностей является то, что любые две бесконечные близко расположенных прямолинейных образующие могут либо пересекаться, либо быть параллельными. Именно эта особенность приводит к тому, что касательная плоскость остаётся неизменной вдоль любой прямолинейной образующей поверхности. Поверхности двойной кривизны не имеют таких свойств.



Полипараметрические поверхности обеспечивают гораздо большие возможности создания различных форм корпуса корабля, поскольку нет никаких ограничений, с которыми сталкивается проектант при использовании только цилиндрической, только конической или только поверхности с ребром возврата. Использование полипараметрических поверхностей для разработки теоретического чертежа приводит к простому способу его построения. В отличие от всех известных методов (Hatch 1964 года, Килгор 1967, 1948 и Г.Е. Павленко др.), этот метод не требует никаких дополнительных построений вне сетки теоретического чертежа для нахождения прямолинейных образующих поверхности. Например, когда используют только конические поверхности, то нужно искать вершины каждого конуса за пределами сетки

<sup>6</sup> В общем случае вдоль кривой на поверхности направление касательной плоскости меняется от точки к точке.

теоретического чертежа, что приводит к ограничению размера судна (Hatch 1964). В данном методе таких ограничений и сложностей нет.

Из рисунка 4 видно, что если найти точки с параллельными касательными, например, на полушироте ко всем ватерлиниям, и соединить эти точки, то в случае, когда поверхность развёртываемая, эти точки будут лежать на одной прямой. Таким образом, построение сечений теоретического чертежа с условием развёртываемости наружной обшивки сводится к нахождению прямолинейных образующих поверхности.

### § 3 Метод построения теоретического чертежа судна

Из рисунка 4 легко перейти к рассмотрению линий теоретического чертежа.

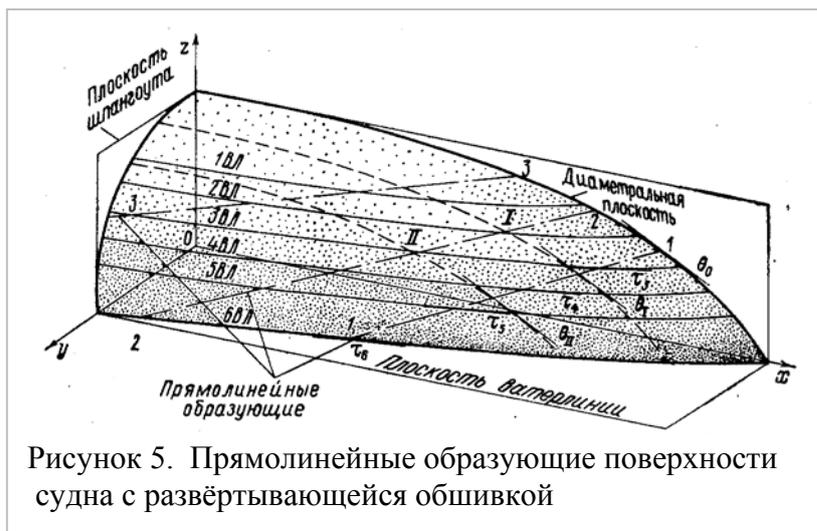
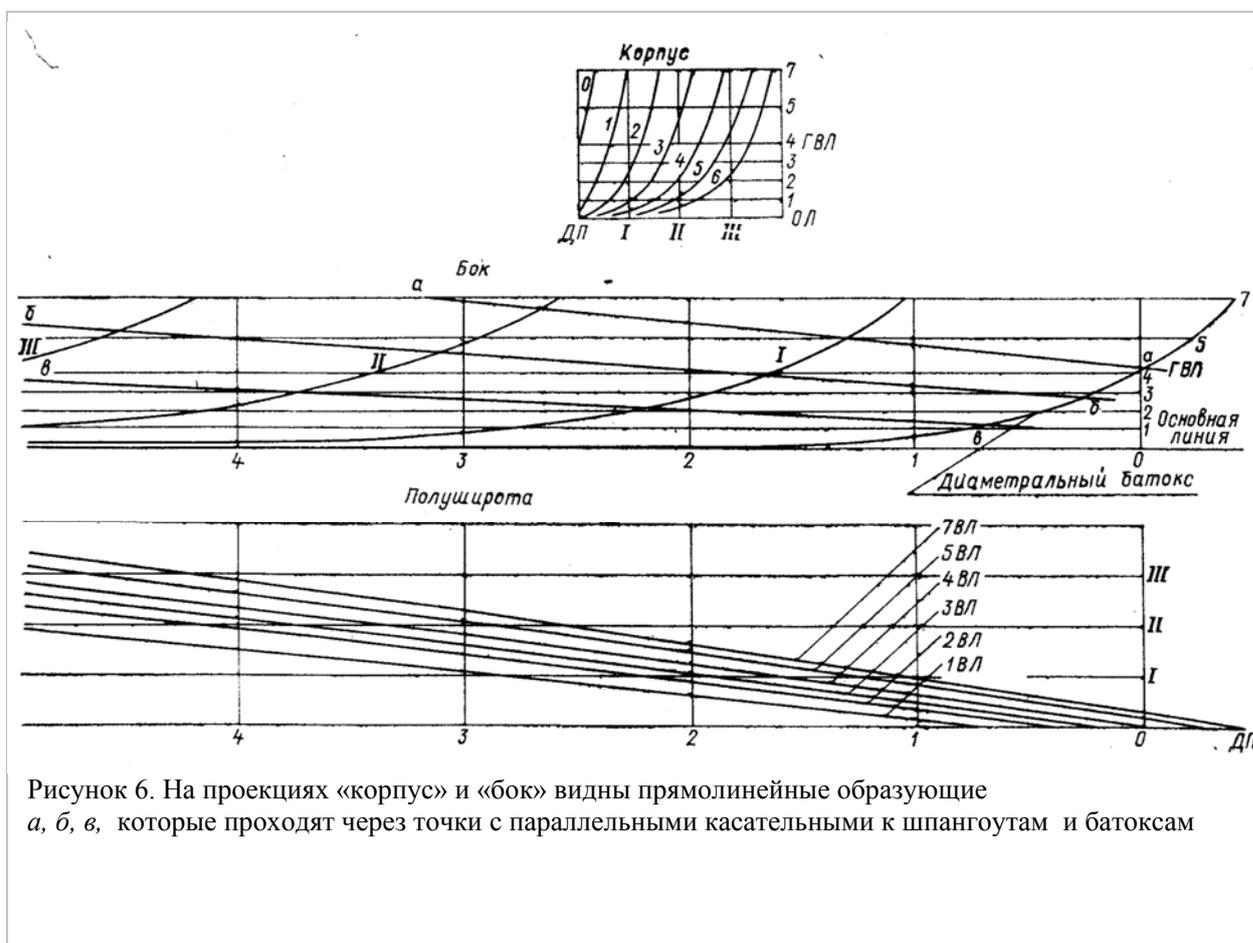


Рисунок 5. Прямолинейные образующие поверхности судна с развёртываемой обшивкой

На рисунке 5 показаны три батокса (штриховые линии), считая диаметральный, шесть и ватерлиний и приведены также три прямолинейных образующих, так как эта поверхность развёртываемая. На прямолинейной образующей 1 – 1 все три батокса имеют касательные, параллельные между собой. На этой же прямолинейной образующей ватерлинии 3, 4, 5 и 6 тоже имеют параллельные

касательные. Следовательно, на проекциях теоретического чертежа на одной и той же прямолинейной образующей касательные должны быть параллельны между собой во всех случаях, то есть и тогда, когда они проведены к батоксам или к ватерлиниям, или к шпангоутам.

На рисунке 6 приведен пример построения теоретического чертежа носовой оконечности. Можно сначала нанести тонкими линиями шпангоуты и по ним построить батоксы и ватерлинии обычным способом, обеспечивая необходимые параметры такие, как угол входа ватерлиний, водоизмещение, форму миделя, форму диаметрального батокса и линию палубы. Потом все эти параметры несколько корректируются. Затем с помощью угольника и линейки на одной из проекций наносятся точки, в которых касательные параллельны. Если они лежат на одной прямой, то в окрестности этой образующей поверхность является развёртываемой. Если точки с параллельными касательными не лежат на одной прямой, то нужно подтянуть сечения так, чтобы при минимальных изменениях получить прямолинейную образующую. При этом следует учитывать, что теоретический чертёж строится по сечениям плоскостями, расположенными на равных расстояниях. Значит, точки с параллельными касательными должны делить прямолинейную образующую на равные части. Можно выбрать 2 кромочных шпангоута, найти на них точки с параллельными касательными, а потом построить промежуточные шпангоуты, разделив прямолинейные образующие на равные части. Для того, чтобы получить приемлемую форму обводов, приходится немножко поварьировать форму кромочных шпангоутов. При некотором навыке это получается без большого труда. Такой метод построения теоретического чертежа сразу определяют участки, которые необходимо оставить неразвёртываемыми, и найти прямолинейные образующие на всей остальной части поверхности.



#### § 4 Теоретические основы построения развёртки обшивки корпуса судна

Пусть  $K_c$  - кривизна плоского сечения (шпангоута или ватерлинии) в точке  $M(x, y, z)$  поверхности корпуса. Тогда геодезическая кривизна  $K_g$  в этой точке связана с  $K_c$  уравнением

$$K_g = K_c \cdot \cos \theta, \quad (1)$$

где  $\theta$  - угол между нормалью плоского сечения в точке  $M(x, y, z)$ , проведенной в плоскости этого сечения, и касательной плоскостью к поверхности, проходящей через точку  $M(x, y, z)$ .

Кривизна кривой  $K_p$  на развёртке этого сечения равна геодезической кривизне

$$K_p = K_g,$$

или

$$K_p = K_c \cdot \cos \theta. \quad (2)$$

Кривизна  $K_c$  шпангоута, заданного в виде  $y = f(z)$ ,

$$K_c = \frac{y''_{zz}}{(1 + y'^2_z)^{3/2}}, \quad (3)$$

и для ватерлинии, заданной в виде  $y = f(x)$ ,

$$K_c = \frac{y''_{xx}}{(1 + y'^2_x)^{3/2}}. \quad (4)$$

Для развёртки принята плоская система координат  $OTP$  с осями  $OT$  и  $OP$ . Тогда кривизна соответствующей кривой на развёртке имеет вид

$$K_p = \frac{t''_{pp}}{(1+t'_p{}^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

Отсюда получено дифференциальное уравнение сечений шпангоутов и ватерлиний на развёртке

$$\frac{t''_{pp}}{(1+t'_p{}^2)^{3/2}} = K_c \cos \theta, \quad (6)$$

где  $K_c$  и  $\cos \theta$  являются функциями координат точки  $M(x, y, z)$ . Если  $x = const$ , то есть, задача решается для шпангоута, то в правой части уравнения (6) кривизна  $K_c$  - функция одной координаты  $z$ .

Учитывая, что кривизна кривой на развёртке  $K_p$  равна геодезической кривизне сечения  $K_g$ , можно получить дифференциальное уравнение, решением которого при заданных начальных условиях является искомая кривая

$$t''_{pp} = K_g(p)(1+t'_p{}^2)^{3/2}. \quad (7)$$

Это уравнение интегрируется путём замены переменной

$$t'_p = u.$$

Тогда (7) можно записать в виде

$$u' = K_g(p)(1+u^2)^{3/2}.$$

Это обычное уравнение с разделяющимися переменными, приводящееся к виду

$$\frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = K_g(p)dp.$$

После интегрирования получим

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \int K_g(p)dp + C_1.$$

Левый интеграл легко берётся с помощью тригонометрической подстановки

$$u = \operatorname{tg} v, \quad du = \sec^2 v$$

и получается в виде

$$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \int K_g(p)dp + C.$$

Решая это уравнение относительно  $u$ , получим

$$u = \frac{\left[ C_1 + \int K_g(p)dp \right]^2}{\sqrt{1 - \left[ C_1 + \int K_g(p)dp \right]^2}}. \quad (8)$$

Учитывая, что  $u = \frac{dt}{dp}$ , интегрирование необходимо выполнить ещё раз. Тогда

$$t = \int \frac{\left[ C_1 + \int K_g(p)dp \right]^2}{\sqrt{1 - \left[ C_1 + \int K_g(p)dp \right]^2}} dp + C_2. \quad (9)$$

Это решение задачи в общем виде. Получить его можно только для цилиндра или кругового конуса. Для других случаев решение можно получить только численным интегрированием.

Пусть уравнение развёртывающейся поверхности задано в виде системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) f_1(y_1, z_1) = 0, \\ 2) f_2(y_2, z_2) = 0, \\ 3) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \\ 4) y_1'_{z_1} = y_2'_{z_2} \\ 5) y = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \end{array} \right. \quad (10)$$

Первые два уравнения определяют в неявном виде кромочные сечения. Если это уравнения ватерлиний, то вместо  $z$  будет написано  $x$ .

Пусть первые два уравнения записаны в виде корабельной верзиеры

$$\left. \begin{array}{l} F_1 : y_1^3 + y_1^2(a_1 z_1 + a_3) + y_1(a_3 z_1^2 + a_4 z_1 + a_5) + a_6 z_1^3 + a_7 z_1^2 + a_8 z_1 + a_9 = 0, \\ F_2 : y_2^3 + y_2^2(b_1 z_2 + b_3) + y_2(b_3 z_2^2 + b_4 z_2 + b_5) + b_6 z_2^3 + b_7 z_2^2 + b_8 z_2 + b_9 = 0. \end{array} \right\} \quad (11)$$

В процессе определения ординат  $y_2$  второго шпангоута определяются координаты  $y_1$  и  $z_1$  точки на первом шпангоуте, через которую проходит соответствующая прямолинейная образующая. Для построения развёртки одновременно определяются значения геодезической кривизны  $K_{g_1}$  и  $K_{g_2}$  по формуле

$$K_g = \frac{y''_{zz}}{(1 + y'^2_z)^{3/2}} \times \frac{|y_2 - y_1 - y'_{1z_1}(z_2 - z_1)|}{\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + y'^2_{1z_1} [(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] - 2y'_{1z_1}(y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1)^2}}. \quad (12)$$

в каждой из этих точек.

Для определения геодезической кривизны  $K$  необходимо знать значения первой и второй производной в этих точках. Так как уравнения заданы в неявном виде, производные определяются по формулам

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dz_1} = -\frac{F'_{1z_1}}{F'_{1y_1}}, \\ \frac{dy_2}{dz_2} = -\frac{F'_{2z_2}}{F'_{2y_2}}, \\ \frac{d^2 y_1}{dz_1^2} = -\frac{F''_{1y_1 z_1} F'_{1z_1} - F''_{1z_1 z_1} F'_{1y_1}}{(F'_{1y_1})^2}, \\ \frac{d^2 y_2}{dz_2^2} = -\frac{F''_{2y_2 z_2} F'_{2z_2} - F''_{2z_2 z_2} F'_{2y_2}}{(F'_{2y_2})^2}. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Одновременно определяются разности

$$\left. \begin{array}{l} \Delta x = x_2 - x_1, \\ \Delta y = y_2 - y_1, \\ \Delta z = z_2 - z_1, \end{array} \right\} \quad (14)$$

и длина прямолинейной образующей между точками  $M_1$  и  $M_2$  по формуле

$$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \quad (15)$$

Угол  $\alpha$  определяется как угол между векторами касательной и прямолинейной образующей, проходящей через точку  $M_1$ .

Вектор касательной равен

$$\mathbf{K} = y_1' z_1 \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad (15)$$

а вектор прямолинейной образующей имеет вид

$$\mathbf{L} = (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j} + (z_2 - z_1) \mathbf{k}. \quad (16)$$

Угол  $\alpha$  определяется по формуле

$$\alpha = \arccos \frac{(z_2 - z_1) + y_1' z_1 (y_2 - y_1)}{\sqrt{1 + y_1'^2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}. \quad (17)$$

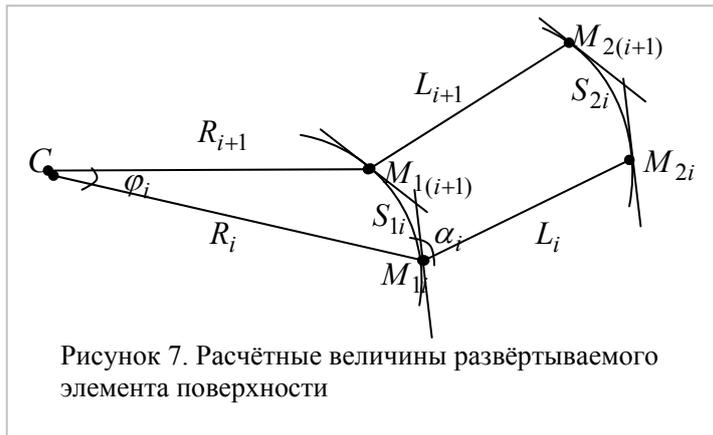


Рисунок 7. Расчётные величины развёртываемого элемента поверхности

Расчёт координат точек  $M_1$  и  $M_2$  выполняется от основной плоскости до палубы. При этом  $z_1$  меняется через равные интервалы  $\Delta z_1$ , а  $z_2$  определяется по условию параллельности касательных в точках  $M_1$  и  $M_2$ , и интервалы  $\Delta z_2$  получаются разными. Для построения развёртки необходимо знать длину дуг шпангоутов между соседними точками. Точки обозначаются

$M_{11}, M_{12}, M_{13}, \dots, M_{1i}, M_{1(i+1)}, \dots, M_{1n}$  - точки на первом шпангоуте,

$M_{21}, M_{22}, M_{23}, \dots, M_{2i}, M_{2(i+1)}, \dots, M_{2n}$  - точки на втором шпангоуте (рисунок 7). Для более точного определения длин дуг следует брать как можно больше точек на каждом шпангоуте. Тогда длина дуги с точностью до малых высшего порядка будет определяться просто как расстояние между соседними точками (рисунок 8).

$$\delta s_i = \sqrt{(z_{2i} - z_{1i})^2 + (y_{2i} - y_{1i})^2}. \quad (18)$$

Аналогично определяются длины дуг второго шпангоута.

Для построения развёртки необходимо знать угол между радиусами кривизны соседних точек  $\varphi_i$ . Угол  $\varphi_i$  определяется как произведение длины дуги на кривизну по формулам

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1i} &= \delta s_{1i} K_{g_{1i}}; \\ \varphi_{2i} &= \delta s_{2i} K_{g_{2i}}; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $K_{g_{1i}}$  и  $K_{g_{2i}}$  - кривизна в точках  $M_{1i}$  и  $M_{2i}$  соответственно (см. рис.), а  $\delta s_{1i}$  и  $\delta s_{2i}$  - длины дуг между точками  $M_{1i} - M_{1(i+1)}$  и  $M_{2i} - M_{2(i+1)}$ .

Основная линия судна должна совпадать с координатной линией ОР развёртки. Тогда плоская часть днища совместится с плоскостью развёртки. Первая прямолинейная образующая, для которой определяются координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  в системе координат развёртки ОТР  $M_1(p_1, t_1)$  и  $M_2(p_2, t_2)$ , должна принадлежать плоской части днища.

Для перевода координат точек в систему ОТР необходимо точно определить начальный угол наклона первой прямолинейной образующей к основной линии  $\alpha_1$ . Такой же угол эта образующая составляет с координатной осью развёртки. ОР. Если  $M_1 M_2$  - первая прямолинейная образующая, то координаты точек  $M_1$  и  $M_2$ , на ней определяются следующим образом. Пусть  $x_1$  - абсцисса левого граничного шпангоута, а  $x_2$  - абсцисса

второго граничного шпангоута. Тогда в системе координат  $O^1P^1T^1$ , у которой осью  $O^1P^1$  служит первая образующая координаты точки  $M_1$  равны:

$$p_1^1 = x_1; \quad t_1^1 = 0,$$

а координаты точки  $M_2$

$$p_2^1 = x_1 + L_1; \quad t_2^1 = 0.$$

где  $L_1$  - длина первой образующей.

Координаты последующих точек первого и второго граничных шпангоутов определяются как проекции на оси  $O^1P^1$  и  $O^1T^1$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} p_{i+1}^1 &= p_i^1 + \frac{R_i}{\sqrt{K_{i+1}^2 + 1}} - \frac{R_i}{\sqrt{K_i^2 + 1}}; \\ t_{i+1}^1 &= t_i^1 + \frac{R_i K_{i+1}}{\sqrt{K_{i+1}^2 + 1}} - \frac{R_i K_i}{\sqrt{K_i^2 + 1}}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где  $K_1$  и  $K_{i+1}$  - угловые коэффициенты радиусов кривизны  $R_i$  по отношению к первой прямолинейной образующей. Они определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} K_i &= \operatorname{tg} \left( \alpha_1 + \frac{\pi}{2} + \varphi_i \right); \\ K_{i+1} &= \operatorname{tg} \left( \alpha_1 + \frac{\pi}{2} + \varphi_{i+1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Перевод координат в систему ОРТ выполняется по формулам

$$\left. \begin{aligned} p_i &= p_o + p_i^1 \cos \alpha_o + t_i^1 \sin \alpha_o; \\ t_i &= p_o + p_i^1 \sin \alpha_o + t_i^1 \cos \alpha_o, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где  $\alpha_o$  - угол между осями  $O^1P^1$  и  $OP$  (рисунок 9).

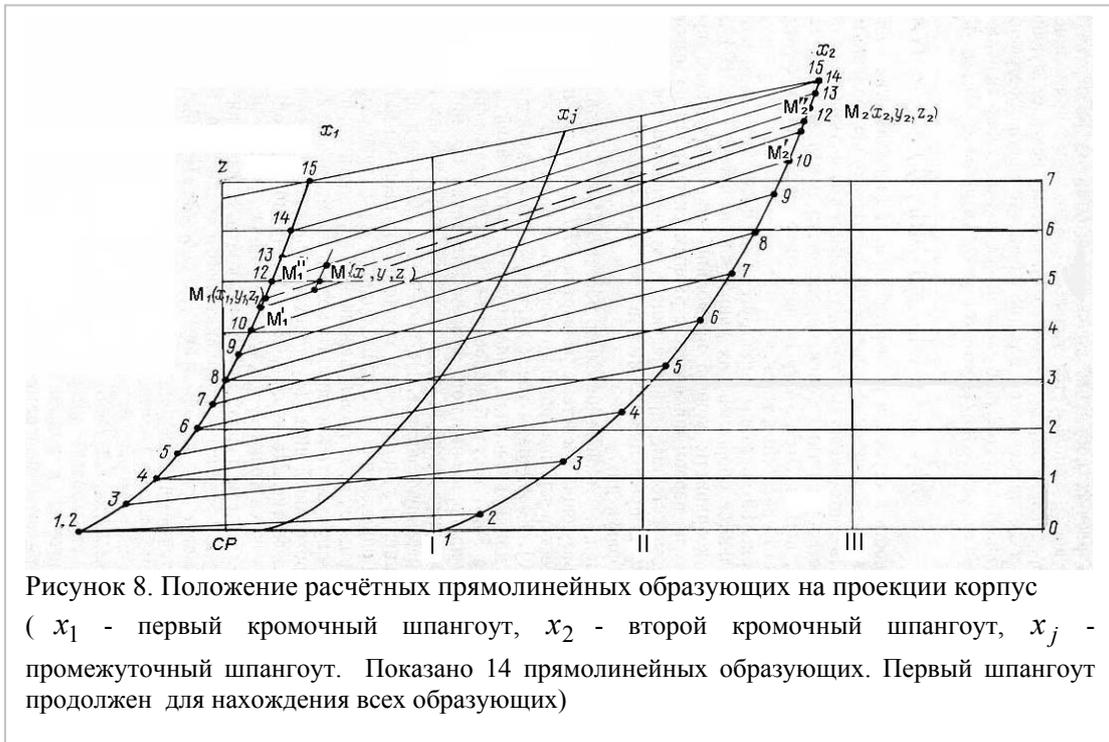
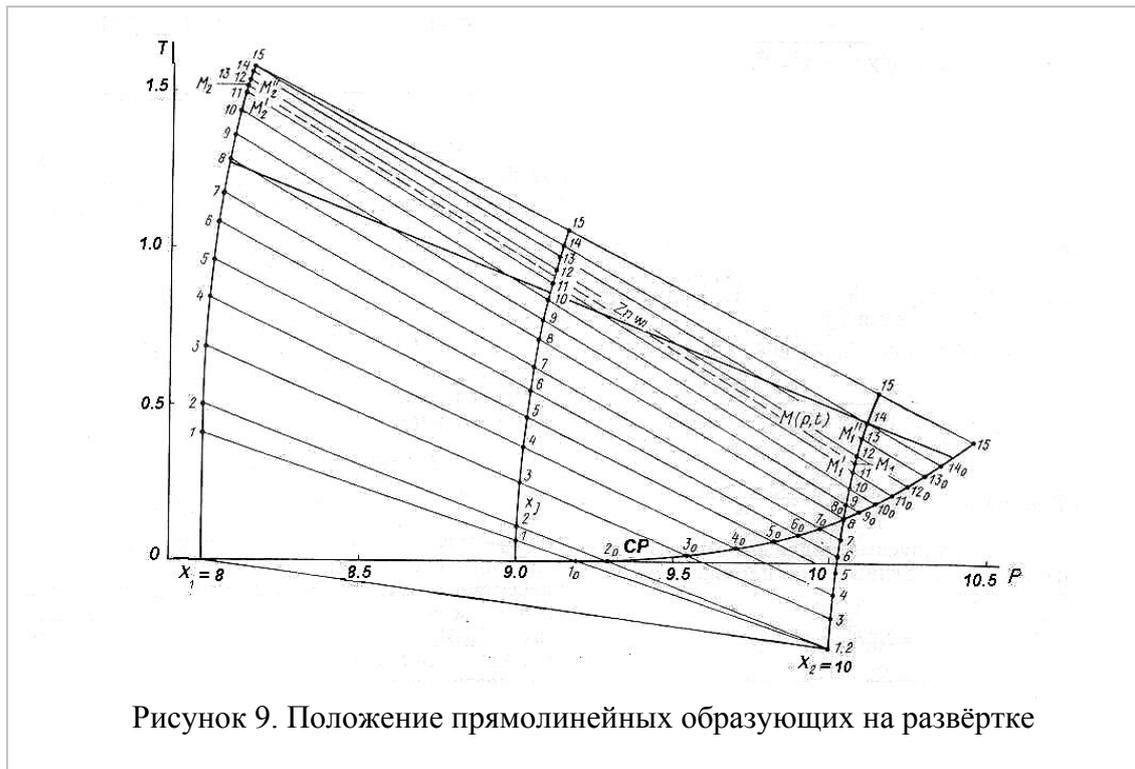


Рисунок 8. Положение расчётных прямолинейных образующих на проекции корпус (  $x_1$  - первый кромочный шпангоут,  $x_2$  - второй кромочный шпангоут,  $x_j$  - промежуточный шпангоут. Показано 14 прямолинейных образующих. Первый шпангоут продолжен для нахождения всех образующих)

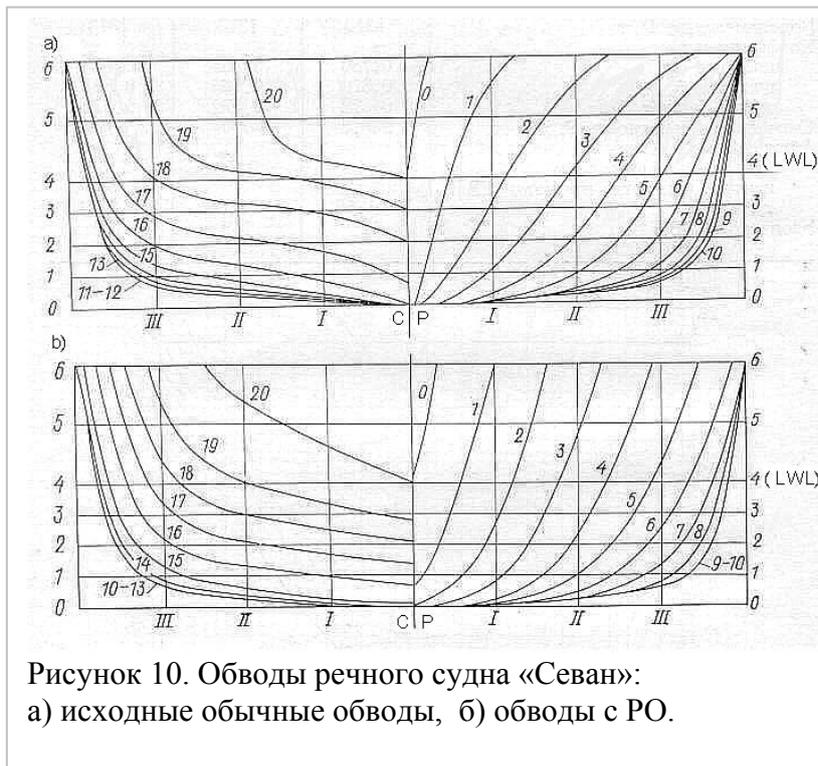


## § 5 Примеры хорошо обтекаемых обводов судов с развёртывающейся наружной обшивкой<sup>7</sup>

Первый вопрос, который обычно возникает при проектировании теоретического чертежа с дополнительным условием, наложенных на форму корпуса, не будет ли потери гидродинамического качества. Безусловно, экономить на изготовлении корпуса, нет смысла, если в дальнейшем будет потеря скорости судна.

Для ответа на этот вопрос были выполнены сравнительные буксировочные испытания в опытовом бассейне ГИВТа и ЛИВТа на разных моделях. В качестве исходных для сравнения были выбраны хорошо отработанные обводы судов с высоким гидродинамическим качеством. Попутно с предлагаемым методом проектирования хорошо обтекаемых обводов были разработаны упрощённые формы корпуса.

Первыми были испытаны модели речных судов «Севан» и «Родина», для



<sup>7</sup> Для сокращения записи вводится сокращение «обводы с РО».

которых к тому времени уже были испытаны большие серии моделей и получены обводы с малым сопротивлением. Для судна «Севан» была испытана модель а) с обычными обводами и б) одна модель с развёртывающейся обшивкой «Севан» с РО (рисунки 10 и 11)

**Таблица 1**

Характеристики корпуса	Обводы речного теплохода «Севан»	
	обычные	С РО
Длина расчётная $L$ , м	62	62
Ширина расчётная $B$ , м	9,4	9,4
Осадка $T$ , м	1,9	1,9
Водоизмещение $D$ , т	638	638
Коэффициент полноты ватерлинии $\alpha$	0,760	0,759
Коэффициент полноты $\beta$	0,882	0,875
Коэффициент общей полноты $\delta$	0,576	0,576
Площадь смоченной поверхности $S$ , м <sup>2</sup>	545	545
Абсцисса центра величины $x_c$ , м	-0,735	-0,795
Абсцисса центра тяжести площади ГВЛ $x_f$ , м	-2,46	-2,58
Угол входа ГВЛ	8°	14°



**Таблица 2**

Характеристики корпуса	Обводы речного теплохода «Родина»		
	обычные	С РО	упрощённые
Длина расчётная $L$ , м	90	90	90
Ширина расчётная $B$ , м	11,6	11,6	11,6
Осадка $T$ , м	2,2	2,2	2,2
Водоизмещение $D$ , т	1313	1313	1313
Коэффициент полноты ватерлинии $\alpha$	0,780	0,765	0,775
Коэффициент полноты $\beta$	0,870	0,865	0,865
Коэффициент общей полноты $\delta$	0,572	0,572	0,572
Площадь смоченной поверхности $S$ , м <sup>2</sup>	967,5	960	970
Абсцисса центра величины $x_c$ , м	1,46	0,74	1,35
Абсцисса центра тяжести площади ГВЛ $x_f$ , м	-1,66	-1,83	-0,84
Угол входа ГВЛ	12°	14°	17°

В сравнительных испытаниях моделей типа «Родина» было выполнено три варианта обводов из развёртывающихся поверхностей, причём, один из вариантов был сделан упрощённым. Испытания показали, что упрощённые обводы имеют большее сопротивление, по сравнению не только с исходным вариантом, но и с хорошо обтекаемыми обводами из развёртывающихся поверхностей. Хорошо обтекаемые развёртывающиеся обводы имели сопротивление, равное сопротивлению исходного обычного варианта обводов. Модели и результаты сравнительных испытаний приведены на рисунке 12. Главные размерения и другие характеристики моделей приведены в таблице 3.

**Таблица 3**

Характеристики корпуса	Обводы скоростного речного судна			
	обычные	с РО Вариант 1	с РО Вариант 2	с РО Вариант 3
Длина расчётная $L$ , м	30,4	30,4	30,4	30,4
Ширина расчётная $B$ , м	3,65	3,65	3,65	3,65
Осадка $T$ , м	0,75	0,75	0,75	0,75
Водоизмещение $D$ , т	48,7	48,7	48,7	48,7
Абсцисса центра величины $x_c$ , м	-1,76	-1,8	-1,81	-1,86
Смоченная поверхность $S$ , м <sup>2</sup>	111,9	111,9	111,7	112

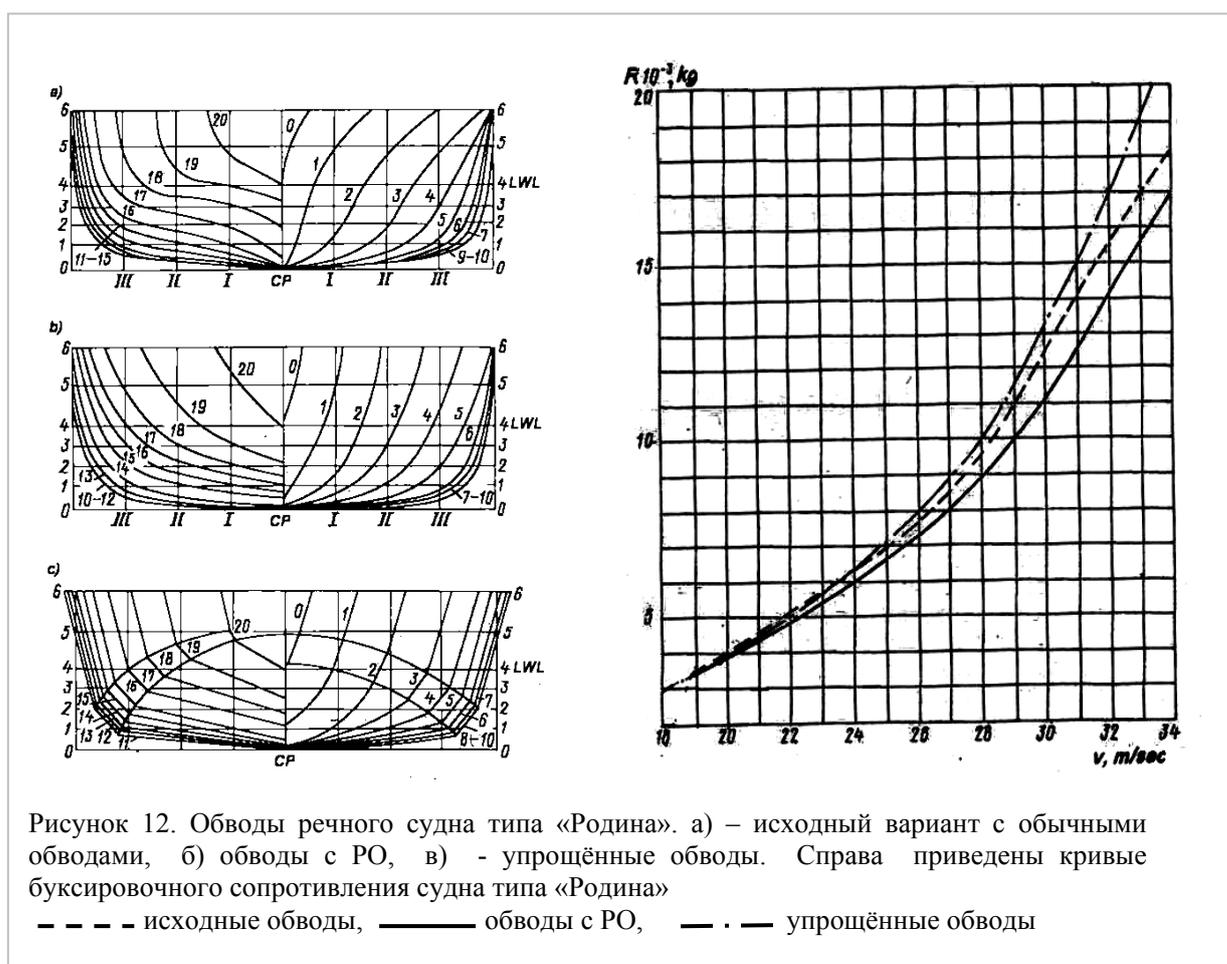


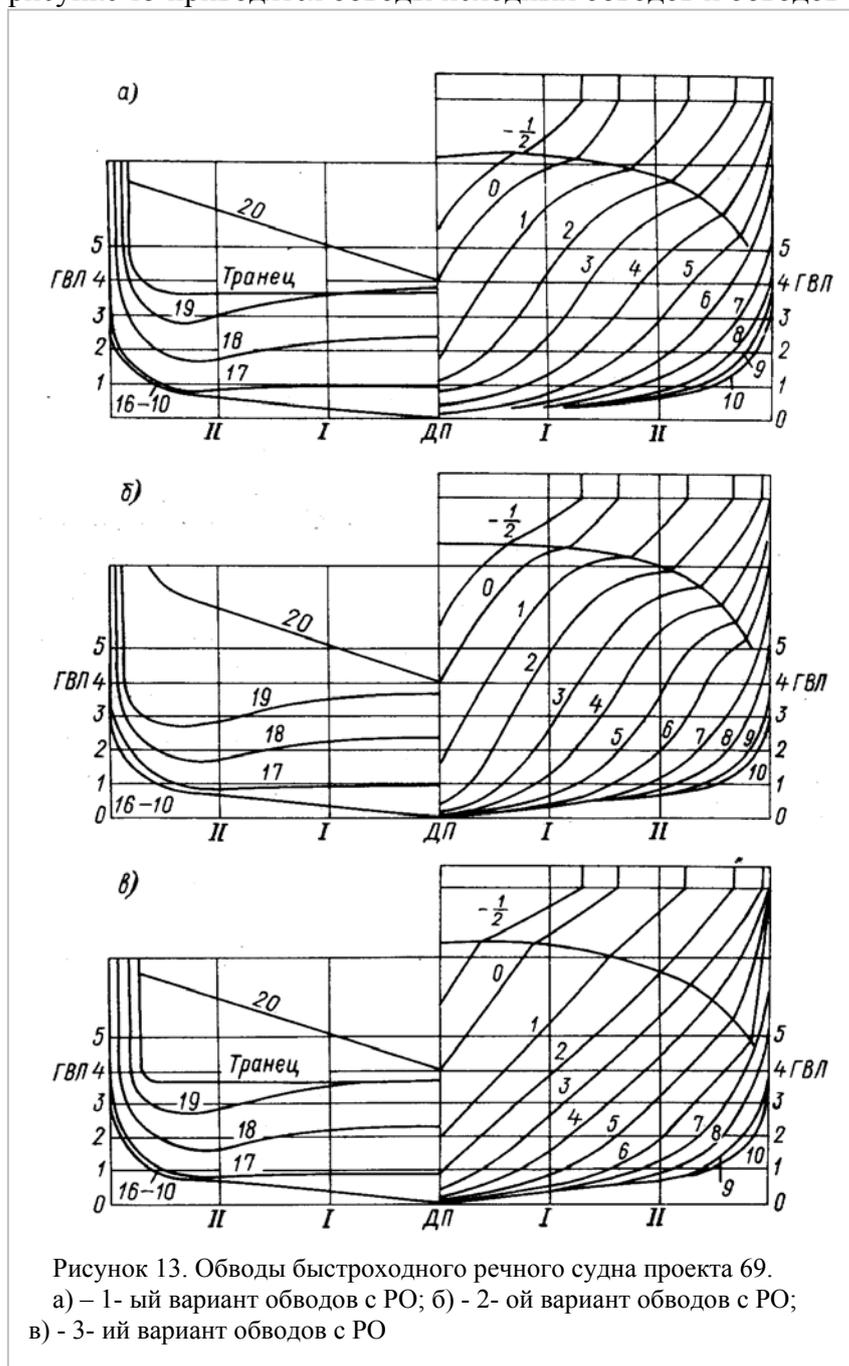
Рисунок 12. Обводы речного судна типа «Родина». а) – исходный вариант с обычными обводами, б) обводы с РО, в) - упрощённые обводы. Справа приведены кривые буксировочного сопротивления судна типа «Родина»

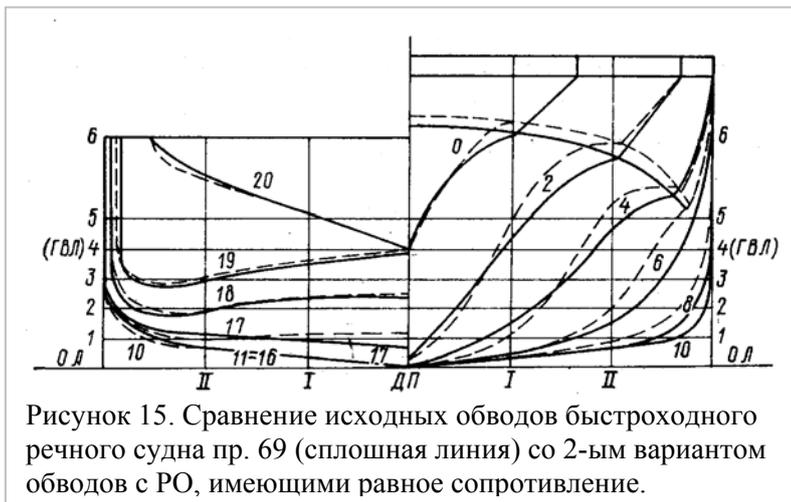
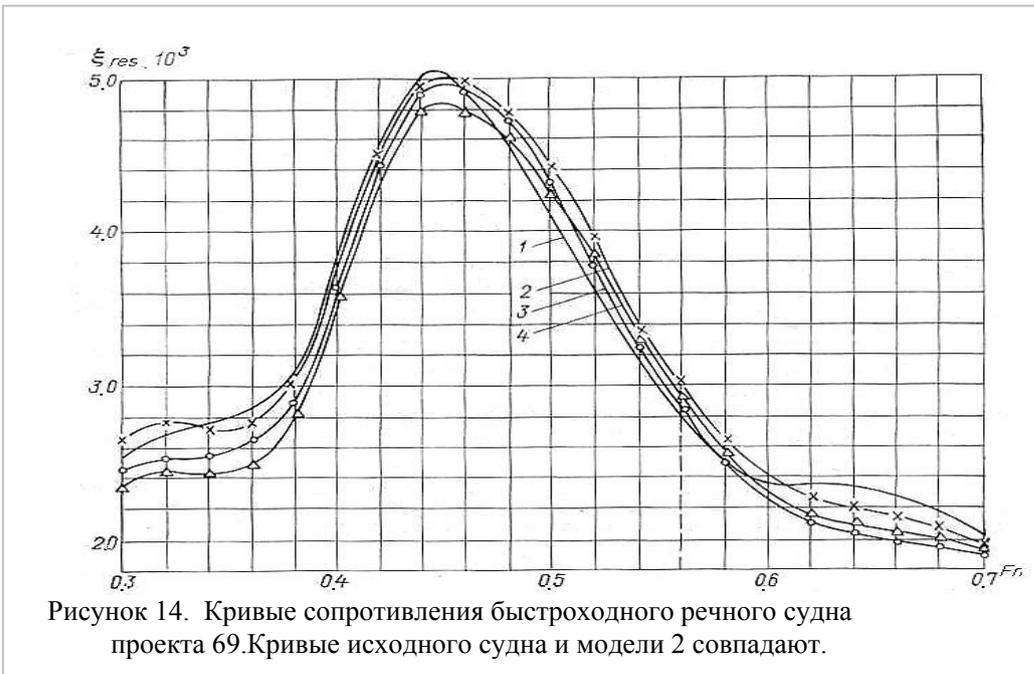
--- исходные обводы, — обводы с РО, — . — упрощённые обводы

**Таблица 4**

Характеристики корпуса	Обводы скоростного речного судна			
	обычные	с РО Вариант 1	с РО Вариант 2	с РО Вариант 3
Длина расчётная $L$ , м	30,4	30,4	30,4	30,4
Ширина расчётная $B$ , м	3,65	3,65	3,65	3,65
Осадка $T$ , м	0,75	0,75	0,75	0,75
Водоизмещение $D$ , т	48,7	48,7	48,7	48,7
Абсцисса центра величины $x_c$ , м	-1,76	-1,8	-1,81	-1,86
Смоченная поверхность $S$ , м <sup>2</sup>	111,9	111,9	111,7	112

Ниже приводятся обводы (рисунок 12) результаты сравнительных испытаний моделей быстроходного речного судна 69 (рисунок 13), а также для наглядности необходимых изменений, которые получаются при проектировании обводов с РО, на рисунке 15 приводятся обводы исходных обводов и обводов с РО.





В книге [3] приводятся результаты сравнительных испытаний обычных обводов и обводов из развёртывающихся поверхностей для корпусов грузового и пассажирского катамарана. Эти испытания также показали, что сопротивление не увеличивается, если обводы проектируются из развёртывающихся поверхностей.

Если корпус судна спроектирован с развёртывающейся наружной обшивкой, то его согласование упрощается, потому что, если получена поверхность на одной проекции, то она уже согласована на двух других. В этом случае не требуется дополнительное согласование обводов, которым озабочены сейчас многие разработчики САПР.

## Литература

1. А.П. Норден Краткий курс дифференциальной геометрии. Физматгиз, 1958, 244 стр
2. Г. Корн и Т. Корн Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука» ГРФ-МЛ, 1974, 832 стр.
3. Готман А.Ш 1979 Проектирование обводов судов с развёртывающейся наружной обшивкой, Изд. Судостроение, 192 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Анализ точности вычисления координат точек на развёртке

Программа аппроксимации сечений теоретического чертежа таких, как шпангоуты, ватерлинии и батоксы, представляет собой кривую третьего порядка вида<sup>8</sup>

$$y^3 + y^2(a_1x + a_2) + y(a_3x^2 + a_4x + a_5) + a_6x^3 + a_7x^2 + a_8x + a_9 = 0. \quad (1\Pi_1)$$

Эта кривая описывает ватерлинию. Если в виде кромочных сечений взяты шпангоуты, то уравнение имеет вид

$$y^3 + y^2(a_1z + a_2) + y(a_3z^2 + a_4z + a_5) + a_6z^3 + a_7z^2 + a_8z + a_9 = 0. \quad (2\Pi_1)$$

Программа вычисления коэффициентов аппроксимирующей кривой основана на стандартном методе наименьших квадратов, поэтому получение коэффициентов  $a_i, i=1, \dots, 9$  не представляет никаких трудностей. Так как эти уравнения имеют три решения, то необходимо выбирать одно, которое соответствует исходным данным. В расчётной программе это выполняется путём сравнения полученных трёх решений с исходными данными.

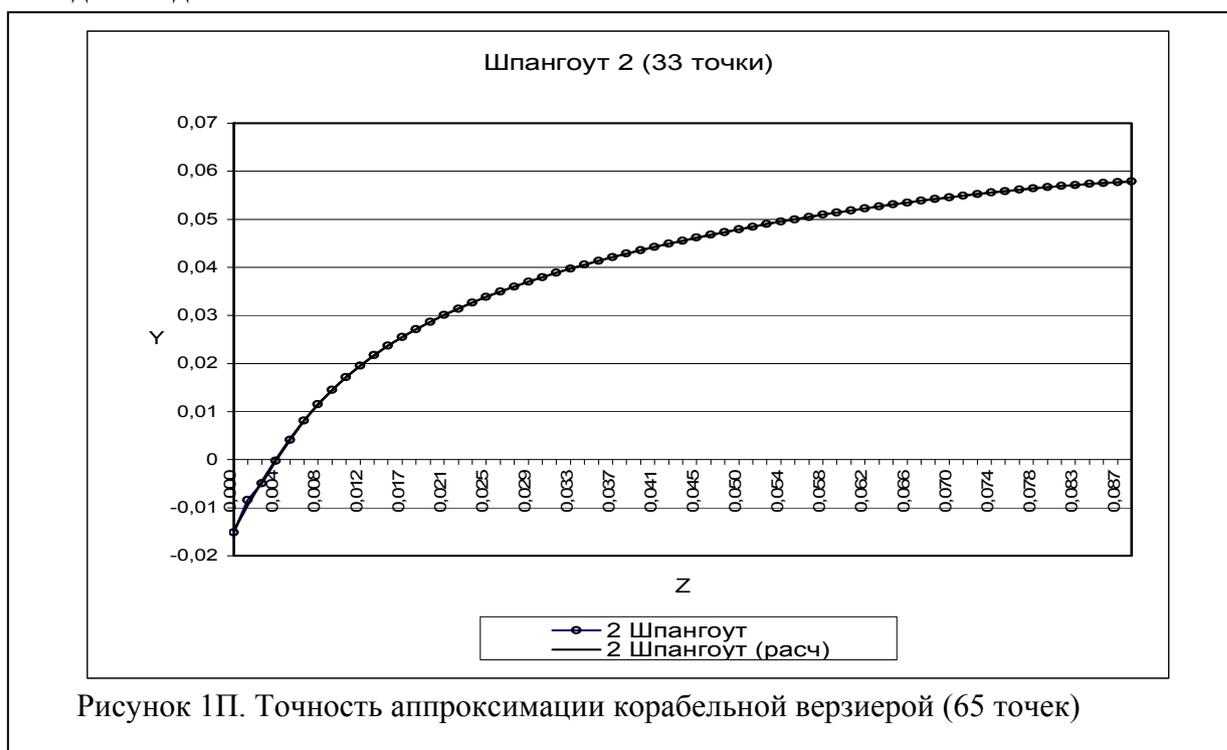


Рисунок 1\Pi. Точность аппроксимации корабельной верзиерой (65 точек)

На диаграмме показаны заданные точки и аппроксимирующая кривая одного из шпангоутов. В разделе 4 (Теоретические основы построения развёртки обшивки корпуса судна) приведены все необходимые формулы и уравнения для составления расчётных программ. Этих уравнений достаточно для получения ординат поверхности корпуса по пятой формуле системы (10). Поскольку поверхность развёртывающаяся, то можно получить её точную развёртку с нанесёнными на ней сечениями шпангоутов, ватерлиний и прямолинейных образующих.

Особого внимания требует определение точности вычисления ординат сечений на развёртке. Так как получение аппроксимации, то есть уравнений сечений, тем легче, чем меньше исходных точек, то, конечно, требуется анализ зависимости точности ординат точек на развёртке от принятого количества заданных ординат. Практически точность зависит от точности определения длин дуг  $\delta s_{1i}$  и  $\delta s_{2i}$ , а также углов наклона

<sup>8</sup> Такая аппроксимация позволяет решать различные задачи, в которых требуется знание ординат теоретического чертежа и производных любого порядка в точках поверхности корпуса.

касательных  $\alpha_i$ , которые должны быть равны в кромочных точках на одной прямолинейной образующей.

Точность вычисления угла наклона касательных в начале каждого сечения, если берётся **65** исходных точек, видна из приведенных расчётных значений

$$\alpha_1 = 0.14807999E+01 \text{ и } \alpha_2 = 0.14783647E+01,$$

где  $\alpha_1$  - угол наклона касательной на первом кромочном шпангоуте, а  $\alpha_2$  - на втором. Отсюда видно, что разница составляет  $\delta = 0,0024$ . При этом расхождение в длине соответствующей прямолинейной образующей на корпусе и на развёртке составляет  $\delta = -0.002103\text{м}$  (на длине  $\approx 0,4$  м.). К верхнему концу сечения ошибка, естественно, накапливается. Значения углов наклона касательных равны:

$$\alpha_1 = 0.15591757E+01 \text{ и } \alpha_2 = 0.15672173E+01,$$

то есть  $\delta = -0,008$ , а расхождение по длине образующих равно  $\delta = 0.000209\text{м}$ .

Если берётся **33** точки на кромочных сечениях, то точность вычисления угла наклона касательных в начале каждого сечения равна

$$\alpha_1 = 0.14807288E+01 \text{ и } \alpha_2 = 0.14768992E+01.$$

Разница составляет  $\delta = 0.00383$ . Разница по длине образующих равна  $\delta = 0.001899\text{м}$ .

К концу сечения ошибка, естественно, накапливается. Значения углов наклона касательных равны

$$\alpha_1 = 0.15596029E+01 \text{ и } \alpha_2 = 0.15671908E+01.$$

Разница составляет  $\delta = 0.004913$ , а расхождение по длине образующих равно  $\delta = 0.004913\text{м}$  на той же длине.

Из этого примера видно, что точность построения развёртки тем выше, чем большее число исходных точек берётся на кромочных шпангоутах. Это связано с точностью определения углов  $\alpha_i$  и длин дуг между соседними точками.

**Замечание 1.** Определение длин дуг по формулам (18) точнее, чем по приращению длины касательной  $ds_i = \sqrt{1 + y_{izi}^2} dz_i$ . В формуле (18) исключается ошибка вычисления производной.

**Замечание 2.** Точность вычисления развёртки зависит от масштаба модели. Это связано с количеством десятичных знаков, принимаемых ЭВМ в расчёте. Поэтому все расчёты следует выполнять с двойной точностью.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Программы расчётов на ФОРТРАНЕ

Комплекс программ состоит из двух частей. Первая часть **COMPLEX** состоит из программ подготовки исходных данных. Эта программа названа **APPROX** с каким-нибудь указанием номера кромочного шпангоута. По ней определяются одновременно ординаты  $Y$  вместе с первой  $Y'$  и второй  $Y''$  производной в каждой точке.

**COMPLEX** в общем случае содержит несколько программ **APPROX(N)** в зависимости от количества кромочных шпангоутов. **N** указывает номер кромочного шпангоута. Аппроксимация каждого кромочного шпангоута выполняется в своём файле.

Программа аппроксимации заданного шпангоута названа **APPR\_ORD(33).FOR**. Для неё задаются исходные данные в подпрограмме **ORD\_DATA33(1)**. Число 33 указывает количество заданных на шпангоуте точек, а в скобках записан номер кромочного шпангоута.

По программе **APPR\_ORD(33).FOR** выполняется расчёт 1) коэффициентов корабельной верзиеры по заданным ординатам, 2) полученные по ней ординаты и 3) первая и 4) вторая производные, которые записываются в виде массива данных **MASSIV\_Y\_PR12(33)**. Эти данные выводятся в виде:

## Таблица ординат

### ЗАДАНИЕ ОРДИНАТЫ

0.034141  
0.059256  
0.074874  
0.083910  
0.090690  
0.097014  
0.101554  
0.105018  
0.107708  
0.109821  
0.111493  
0.112827  
0.113898  
0.114764  
0.115470  
0.116050  
0.116531  
0.116934  
0.117274  
0.117567  
0.117820  
0.118042  
0.118240  
0.118419  
0.118582  
0.118733  
0.118874  
0.119008  
0.119136  
0.119259  
0.119379  
0.119496  
0.119611

\*\*\*\*\*

### КОЭФИЦИЕНТЫ КОРАБЕЛЬНОЙ ВЕРЗИЕРЫ ДАННОГО ШПАНГОУТА

-18.59089851  
-0.28280345  
25.67077637  
3.87433648  
0.02355296  
-0.39497471  
-3.06705260  
-0.19428886  
-0.00051526

### Проверочный расчёт ординат и производных кромочного шпангоута

Z	Y	Y'	Y''
0.000000	0.034268	10.834247	-1262.162231
0.002750	0.059017	7.162856	-1265.967041
0.005500	0.074558	4.388188	-738.493347
0.008250	0.084385	2.928859	-366.231171
0.011000	0.091312	2.184851	-198.713623
0.013750	0.096677	1.748079	-129.181412
0.016500	0.101039	1.437024	-101.315674

0.019250	0.104625	1.176366	-89.583511
0.022000	0.107532	0.942010	-80.609955
0.024750	0.109832	0.735947	-68.661652
0.027500	0.111614	0.566560	-54.400547
0.030250	0.112984	0.436046	-40.853798
0.033000	0.114043	0.339437	-29.895439
0.035750	0.114875	0.268979	-21.783611
0.038500	0.115540	0.217481	-16.012842
0.041250	0.116083	0.179370	-11.949993
0.044000	0.116535	0.150673	-9.073405
0.046750	0.116918	0.128709	-7.013012
0.049500	0.117247	0.111593	-5.512741
0.052250	0.117535	0.098041	-4.402080
0.055000	0.117789	0.087136	-3.565156
0.057750	0.118016	0.078251	-2.924989
0.060500	0.118221	0.070915	-2.427651
0.063250	0.118407	0.064794	-2.036154
0.066000	0.118578	0.059648	-1.724739
0.068750	0.118736	0.055255	-1.472757
0.071500	0.118882	0.051502	-1.268094
0.074250	0.119020	0.048250	-1.099200
0.077000	0.119149	0.045418	-0.958875
0.079750	0.119270	0.042959	-0.842259
0.082500	0.119385	0.040780	-0.743277
0.085250	0.119494	0.038854	-0.659324
0.088000	0.119599	0.037142	-0.587630

Из приведенной таблицы видно, что первая и вторая производные меняются монотонно и имеют один и тот же знак. Это выполняется в том случае, когда сечение не имеет перегибов. В последнем случае первая и вторая производные могут на определённых участках менять знаки.

**Замечание 1.** Следует учесть, что получение такой аппроксимации требует терпения и, к сожалению, много времени, потому что, как бы точно ни были сняты ординаты с чертежа, расчёт ординат по аппроксимирующей кривой выявляет малейшие, не видимые глазу, отклонения между точками.

В комплексе содержится программа **LAGRANGE** для увеличения числа заданных точек. По этой программе число заданных точек удваивается. Для сохранения плавности кривой в программе используется формула Лагранжа второго порядка

$$y(z) = \frac{(z - z_2) \cdot (z - z_3)}{(z_1 - z_2) \cdot (z_1 - z_3)} y_0 + \frac{(z - z_1) \cdot (z - z_3)}{(z_2 - z_1) \cdot (z_2 - z_3)} y_1 + \frac{(z - z_1) \cdot (z - z_2)}{(z_3 - z_1) \cdot (z_3 - z_2)} y_2.$$

Если число снятых с чертежа точек равнялось 8-ми, то после удвоения получается 17, а из 17-ти потом получается 33 и т.д.

После получения хорошей аппроксимации, как приведено в приведенной выше Таблице А, для двух кромочных шпангоутов используется вторая часть программы, которая называется **SURFACE**, по которой определяются ординаты всех промежуточных шпангоутов, а также координаты *P* и *T* каждой точки на развёртке.

Для расчёта по этой программе необходимо составить данные в виде 4-х массивов: ORD\_DATA33(1\_2). – массив ординат первого и второго кромочных шпангоутов; COEFF1\_2 – массив коэффициентов корабельных верзиер 1-го и 2-го кромочных шпангоутов;

MASSIV\_PRZ1(12) - массив первых производных двух кромочных шпангоутов.

MASSIV\_PRZ2(12) - массив вторых производных двух кромочных шпангоутов.

В результате расчёта для каждого шпангоута получается таблица, в которой даны координаты (X,Z,Y) теоретического чертежа, координаты концов прямолинейных

образующих на первом кромочном шпангоуте (X,Z1,Y1), на втором кромочном шпангоуте (X,Z2,Y2), и координаты соответствующих точек на развёртке (P,T). Кроме того, выводится DELTA – разница между длиной прямолинейной образующей на корпусе и на развёртке. Практически DELTA показывает точность расчёта ординат на развёртке.

**В результате получаются данные расчёта в виде такой таблицы:**

\*\*\*\*\*

Шпангоут N5 = 3 X= 0.7

\*\*\*\*\*

: X : Z : Y : Z1 : Y1 : Z2 : Y2 : P : T : DELTA

\*\*\*\*\*

: 0.70:	0.0000:	-0.0013:	0.0000:	-0.0132:	0.0000:	0.0343:	0.7000:	0.0000:	0.9021E-02
: 0.70:	0.0027:	0.0139:	0.0027:	-0.0012:	0.0028:	0.0590:	0.7005:	0.0170:	0.8859E-03
: 0.70:	0.0055:	0.0231:	0.0055:	0.0060:	0.0055:	0.0746:	0.7008:	0.0267:	0.9864E-03
: 0.70:	0.0082:	0.0298:	0.0082:	0.0116:	0.0083:	0.0844:	0.7012:	0.0339:	0.1012E-02
: 0.70:	0.0110:	0.0352:	0.0110:	0.0165:	0.0110:	0.0913:	0.7015:	0.0400:	0.1006E-02
: 0.70:	0.0137:	0.0398:	0.0137:	0.0208:	0.0138:	0.0967:	0.7018:	0.0453:	0.9943E-03
: 0.70:	0.0165:	0.0438:	0.0165:	0.0247:	0.0165:	0.1010:	0.7021:	0.0502:	0.9892E-03
: 0.70:	0.0192:	0.0474:	0.0192:	0.0283:	0.0193:	0.1046:	0.7024:	0.0547:	0.9994E-03
: 0.70:	0.0220:	0.0506:	0.0220:	0.0316:	0.0220:	0.1075:	0.7027:	0.0589:	0.1030E-02
: 0.70:	0.0247:	0.0533:	0.0247:	0.0344:	0.0248:	0.1098:	0.7030:	0.0627:	0.1073E-02
: 0.70:	0.0275:	0.0554:	0.0275:	0.0366:	0.0275:	0.1116:	0.7033:	0.0662:	0.1120E-02
: 0.70:	0.0302:	0.0571:	0.0302:	0.0384:	0.0303:	0.1130:	0.7036:	0.0694:	0.1184E-02
: 0.70:	0.0330:	0.0585:	0.0330:	0.0400:	0.0330:	0.1140:	0.7039:	0.0725:	0.1274E-02
: 0.70:	0.0357:	0.0598:	0.0357:	0.0415:	0.0358:	0.1149:	0.7042:	0.0756:	0.1389E-02
: 0.70:	0.0385:	0.0611:	0.0385:	0.0429:	0.0385:	0.1155:	0.7046:	0.0786:	0.1523E-02
: 0.70:	0.0412:	0.0622:	0.0412:	0.0442:	0.0413:	0.1161:	0.7049:	0.0815:	0.1670E-02
: 0.70:	0.0440:	0.0633:	0.0440:	0.0455:	0.0440:	0.1165:	0.7052:	0.0845:	0.1825E-02
: 0.70:	0.0467:	0.0643:	0.0467:	0.0467:	0.0468:	0.1169:	0.7056:	0.0874:	0.1984E-02
: 0.70:	0.0495:	0.0652:	0.0495:	0.0478:	0.0495:	0.1172:	0.7059:	0.0903:	0.2144E-02
: 0.70:	0.0522:	0.0661:	0.0522:	0.0489:	0.0523:	0.1175:	0.7062:	0.0932:	0.2302E-02
: 0.70:	0.0550:	0.0669:	0.0550:	0.0500:	0.0550:	0.1178:	0.7066:	0.0961:	0.2456E-02
: 0.70:	0.0577:	0.0677:	0.0577:	0.0509:	0.0578:	0.1180:	0.7069:	0.0989:	0.2604E-02
: 0.70:	0.0605:	0.0684:	0.0605:	0.0519:	0.0605:	0.1182:	0.7073:	0.1018:	0.2747E-02
: 0.70:	0.0632:	0.0691:	0.0632:	0.0527:	0.0633:	0.1184:	0.7076:	0.1046:	0.2883E-02
: 0.70:	0.0660:	0.0698:	0.0660:	0.0535:	0.0660:	0.1186:	0.7080:	0.1074:	0.3011E-02
: 0.70:	0.0687:	0.0704:	0.0687:	0.0543:	0.0688:	0.1187:	0.7084:	0.1102:	0.3131E-02
: 0.70:	0.0715:	0.0709:	0.0715:	0.0550:	0.0715:	0.1189:	0.7087:	0.1130:	0.3242E-02
: 0.70:	0.0742:	0.0714:	0.0742:	0.0556:	0.0743:	0.1190:	0.7091:	0.1158:	0.3344E-02
: 0.70:	0.0770:	0.0719:	0.0770:	0.0562:	0.0770:	0.1191:	0.7094:	0.1186:	0.3437E-02
: 0.70:	0.0797:	0.0723:	0.0797:	0.0567:	0.0798:	0.1193:	0.7098:	0.1213:	0.3520E-02
: 0.70:	0.0825:	0.0727:	0.0825:	0.0572:	0.0825:	0.1194:	0.7102:	0.1241:	0.3593E-02
: 0.70:	0.0852:	0.0730:	0.0852:	0.0576:	0.0853:	0.1195:	0.7106:	0.1268:	0.3655E-02
: 0.70:	0.0880:	0.0733:	0.0880:	0.0579:	0.0880:	0.1196:	0.7109:	0.1296:	0.3707E-02

\*\*\*\*\*

N5 = 3 - означает номер шпангоута, X= 0.7 – указывает расстояние от миделя.

Для проверки расчёта промежуточных сечений (в данном случае шпангоутов) в программе EXCEL строятся сечения теоретического чертежа



Рисунок 2П<sub>2</sub> Расчётные шпангоуты, полученные по двум кромочным

Кроме того, на том же листе строится развёртка. Разница в построении этих чертежей состоит в том, что используются разные диаграммы. Для построения шпангоутов программе EXCEL используется диаграмма «График», а для построения развёртки используется «Точечная» диаграмма.

Для данной части чертежа диаграмма развёртки имеет вид

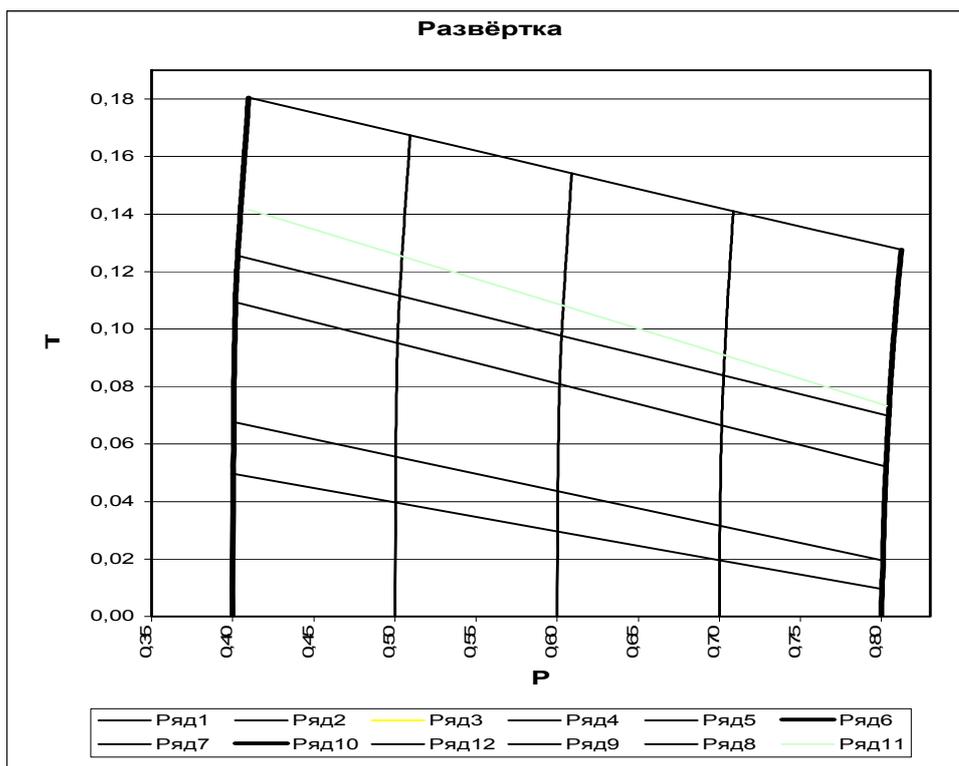


Рисунок 2П<sub>2</sub>. Развёртка части носовой оконечности от 2 до 6 шпангоута. К шести рядам линий сечений добавлено 5 прямолинейных образующих.

## Основные обозначения

$\dot{\mathbf{r}} = \dot{i} \dot{x} + \dot{j} \dot{y} + \dot{k} \dot{z}$  - производная радиуса - вектора по произвольному параметру.

$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  - единичный вектор касательной некоторого нормального сечения.

$\rho_n$  - радиус кривизны нормального сечения в точке М.

$\mathbf{N} = i F_x + j F_y + k F_z$  - вектор нормали в выбранной точке поверхности.

$k = \frac{1}{\rho}$  - кривизна кривой, полученной пересечением поверхности произвольно

направленной плоскости.

$k_n = \frac{1}{\rho_n}$  - кривизна нормального сечения поверхности.

$\mathbf{b}$  - бинормаль трёхгранника Френе.

$\mathbf{r}'' = k \mathbf{n}$  - кривизна кривой в направлении её главной нормали.

$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|}$  - вектор главной нормали кривой.

$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$  - единичный вектор нормали поверхности в выбранной точке.

$k_n = np_v \mathbf{r}'' = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{v}$  - связь кривизны кривой, лежащей на поверхности, с нормальной кривизной поверхности.

$\theta = \widehat{\mathbf{nv}}$  - угол между главной нормалью кривой и нормалью поверхности.

$k_n = \frac{1}{R} = \frac{\cos \theta}{\rho} = k \cdot \cos \theta$  - связь между полной кривизной кривой и нормальной кривизной.

## Оглавление

	стр
<b>ЧАСТЬ 1. Элементы дифференциальной геометрии</b>	<b>3</b>
Введение	3
§ 1 Векторная функция	4
§ 2 Кривая линия на плоскости	7
§ 4 Кривая в пространстве и сопровождающий трёхгранник Френе	8
§ 5 Поверхность и её свойства	10
§ 6 Кривая на поверхности	12
<b>ЧАСТЬ 2. Проектирование обводов судов из развёртывающихся поверхностей</b>	<b>24</b>
§ 1 Развёртывающиеся поверхности	24
§ 2 Теоретические основы построения корпуса судна с развёртывающейся обшивкой	25
§ 3 Метод построения теоретического чертежа судна	26
§ 4 Теоретические основы построения развёртки обшивки корпуса судна	27
§ 5 Примеры хорошо обтекаемых обводов судов с развёртывающейся наружной обшивкой	32
Литература	36
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Анализ точности вычисления координат точек на развёртке</b>	<b>37</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Программы расчётов на ФОРТРАНЕ</b>	<b>38</b>

**УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ**

**Ада Шоломовна Готман**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ  
В ПРОЕКТИРОВАНИИ ОБВОДОВ СУДОВ**

Учебное пособие для аспирантов

Подписано в печать 08.06.2011 с оригинал-макета  
Бумага офсетная № 1, формат 60x84 1/16, печать трафаретная – Riso  
Усл. печ. л. 2,81 Тираж 100 экз., заказ № . Цена договорная

ФБОУ ВПО “Новосибирская государственная академия водного транспорта”  
 (“НГАВТ”), 630099, г. Новосибирск, ул. Щетинкина, 33

Отпечатано в издательстве ФБОУ ВПО “НГАВТ”